Математическая физика, анализ, геометрия
1996, т. 3, № 1/2, с. 125–130

Замкнутые выпуклые поверхности в E^3 с заданными функциями кривизн

А.И. Медяник

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 9 июня 1994 года

Доказано, что существуют регулярная замкнутая выпуклая поверхность S и постоянный вектор $\mathbf{c}$ такие, что в точке с внешней нормалью $\mathbf{n}$ выполняется соотношение

$$K^{-1} + H^{-\alpha} + \mathbf{cn} = \varphi(\mathbf{n}),$$

где K и H — гауссова и средняя кривизна S в точке с нормалью $\mathbf{n}$, $\varphi(\mathbf{n})$ — заданная на сфере регулярная функция, удовлетворяющая условию замкнутости и неравенству

$$\inf \varphi > \frac{9}{32}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{64}{9}(\sup\varphi)^{2-\alpha}}\right](\sup\varphi)^{\alpha-1},$$

$\alpha \in (0, 1]$. С точностью до параллельного переноса решение $(S, \mathbf{c})$ — единственное.

В работе [1] было получено усиление одной теоремы существования К. Миранда из [2] для замкнутых выпуклых поверхностей в E^3, главные радиусы кривизны которых $R_1(\mathbf{n})$ и $R_2(\mathbf{n})$ в точке с нормалью $\mathbf{n}$ удовлетворяют уравнению вида

$$R_1R_2 + \Phi(R_1 + R_2, R_1R_2, \mathbf{n}) + \mathbf{cn} = \varphi(\mathbf{n}), \tag{1}$$

где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор, связанный с искомой поверхностью S, и правая часть (1) обращает в нуль на единичной сфере Ω интеграл $\int \mathbf{n}\,\varphi(\mathbf{n})\,d\omega$ (условие замкнутости). При этом сама функция $\Phi(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_5)$ определена в области $D = \{\eta_i :\ 0 < 4\eta_2 \le \eta_1^2\}$. А именно, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть функция Φ принадлежит классу $C^{m+1,\lambda}$ с $m \ge 2$, и для нее выполняется условие*

$$a_0 + A_0(R_1R_2)^{\mu} \le \Phi \le a_1 + A_1(R_1R_2)^{\mu}, \tag{2}$$

где a_0, A_0, a_1, A_1 и μ $(a_1 \ge a_0,\ A_1 > A_0,\ 0 < \mu \le 1)$ — постоянные. Пусть, кроме того, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial R_1} \ge 0$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial R_2} \ge 0$ и

$$\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial R_i\,\partial R_j}\lambda_i\lambda_j \le 0, \tag{3}$$

и для производных Φ по второму аргументу Φ_2 и Φ_{22} выполняется условие

$$\frac{p\,|\,\Phi_{22}\,|}{(1+p\Phi_2)^2}(1+p\nabla_n\Phi)+\frac{p\sqrt{\nabla_n\Phi_2}}{1+p\Phi_2}(1+p\sqrt{\nabla_n\Phi})+$$

$$+p\,|\,\Delta_n\Phi\,|\le\chi_0+(R_1+R_2)^{\nu}\chi_1, \tag{4}$$

где χ_0 и χ_1 — неотрицательные непрерывные функции R_1R_2 при $R_1R_2>0$, $\nu\in[0,2)$, $p\in[0,1]$, ∇_n и Δ_n — первый и второй дифференциальные параметры Бельтрами, которые надо вычислять, представляя Φ_2 и Φ только как функции одного $\mathbf{n}$. *Тогда уравнение* (1) *допускает одно и только одно решение* (S, $\mathbf{c}$) *класса $C^{m+2,\lambda}$ для любого $\varphi\in C^{m,\lambda}$, удовлетворяющего условию замкнутости и неравенству*

$$\inf\varphi>b_1+\frac{B_1}{B_0}\left(\frac{1}{q}-1\right)(\sup\varphi+b_0), \tag{5}$$

где $\quad B_0=\frac{1}{4}\max(3A_1-7A_0,\,-7A_0,\,3A_1),\qquad B_1=\frac{3}{4}\max(A_1-A_0,\,-A_0,\,A_1),$

$b_0=\max\left(0,\frac{1}{4}(3a_1-7a_0)\right)$, $b_1=\frac{1}{4}(7a_1-3a_0)$, *а число $q\in(0,1)$ определяется из соотношения*

$$\frac{B_0}{1-q}=\left(\frac{\sup\varphi+b_0}{q}\right)^{1-\mu}, \tag{6}$$

причем в случае $\mu=1$ предполагается, что

$$1\le\frac{1+A_1}{1+A_0}<\frac{1}{6}(\sqrt{9+120t}-3), \tag{7}$$

где $t=\min(1,\,1+A_1,\,(1+A_0)^{-1})$.

В настоящей статье получим следствие этой общей теоремы для случая, когда уравнение (1) имеет специальный вид

$$R_1R_2+f\left(\frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}\right)+\mathbf{cn}=\varphi(\mathbf{n}). \tag{8}$$

Так как R_1R_2 и $\dfrac{2R_1R_2}{R_1+R_2}$ — обратные к гауссовой и средней кривизнам поверхности S величины, то речь идет о теоремах существования для замкнутых выпуклых поверхностей в E^3 с заданными (с точностью до линейного слагаемого) функциями кривизн, точнее, обратных к ним величин.

Теорема 1. *Пусть функция $f(\eta)$ при $\eta>0$ принадлежит классу $C^{m+1,\lambda}$, $m\ge2$, и для нее выполняются условия*

$$0<f(\eta)\le A_1\eta^{\alpha},\quad 0<\alpha\le1, \tag{9}$$

$$f'(\eta)\ge0,\quad \bar{A}_2\eta^{\alpha-2}\le f''(\eta)\le0, \tag{10}$$

где $A_1 > 0$ и $\overline{A}_2 < 0$ — постоянные. Если для функции $\varphi \in C^{m,\lambda}$, удовлетворяющей условию замкнутости,

$$\inf \varphi > \frac{9A_1^2}{32}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{64}{9A_1^2}(\sup \varphi)^{2-\alpha}}\right](\sup \varphi)^{\alpha - 1}, \tag{11}$$

то уравнение (8) *допускает одно и только одно решение* (S, c) *класса* $C^{m+2,\lambda}$.

Доказательство. Поскольку $\frac{2R_1R_2}{R_1 + R_2} \le \sqrt{R_1R_2}$, то из условия (9) следует, что для функции f выполняется условие типа (2) с $a_0 = A_0 = a_1 = 0$ и $\mu = \frac{\alpha}{2} \le \frac{1}{2}$.

Далее, из условий (10) получаем

$$\frac{\partial f}{\partial R_1} = f'\frac{2R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} \ge 0; \quad \frac{\partial f}{\partial R_2} = f'\frac{2R_1^2}{(R_1 + R_2)^2} \ge 0;$$

$$\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R_i \partial R_j}\lambda_i\lambda_j = \frac{4f''(R_2\lambda_1 + R_1\lambda_2)^2}{(R_1 + R_2)^4} - \frac{4f'(R_2\lambda_1 - R_1\lambda_2)^2}{(R_1 + R_2)^3} \le 0.$$

И следовательно, для f выполняются условия типа (4). Кроме того, в рассматриваемом случае $\Delta_n f = \nabla_n f = \nabla_n f_2 \equiv 0$ и если рассматривать f как функцию переменных $R_1 + R_2$ и R_1R_2, то с учетом условий (10) имеем

$$f_2 = \frac{2f'}{R_1 + R_2} \ge 0; \; f_{22} = \frac{2f''}{(R_1 + R_2)^2} \ge \frac{2^\alpha \overline{A}_2}{(R_1 + R_2)^\alpha (R_1R_2)^{2-\alpha}}.$$

Поэтому для левой части неравенства (4) с заменой Φ на f получается такая оценка:

$$\frac{p\,|f_{22}|}{(1 + pf_2)^2} \le \frac{p\,2^\alpha\,|\overline{A}_2|}{(R_1 + R_2)^\alpha (R_1R_2)^{2-\alpha}} \le \frac{p\,|\overline{A}_2|}{(R_1R_2)^{2-\frac{\alpha}{2}}},$$

т.е. условие типа (4) выполняется с $\chi_1 = 0$ и $\chi_0 = p\,|\overline{A}_2|\,(R_1 R_2)^{\frac{\alpha}{2}-2}$.

А значит, для завершения доказательства теоремы надо показать, что для правой части (8) выполняется условие (5), в котором по определению следует положить $b_0 = b_1 = 0$, $B_0 = B_1 = \frac{3}{4}A_1$, $\mu = \frac{\alpha}{2}$, т.е. надо доказать, что

$$\inf \varphi > \left(\frac{1}{q} - 1\right)\sup \varphi, \tag{12}$$

где $q \in (0, 1)$ определяется из уравнения

$$\frac{3A_1}{4(1 - q)} = \left(\frac{\sup \varphi}{q}\right)^{1 - \frac{\alpha}{2}}. \tag{13}$$

Так как $0 < \alpha \le 1$, то $q^{1/2} \ge q^{1 - \frac{\alpha}{2}}$, и поэтому из (13) следует, что

$$\frac{3}{4}A_1 q^{1/2} \ge (1 - q)(\sup \varphi)^{1 - \frac{\alpha}{2}}$$

или

$$(\sup\varphi)^{2-\alpha}q^2-\left[2(\sup\varphi)^{2-\alpha}+\frac{9}{16}A_1^2\right]q+(\sup\varphi)^{2-\alpha}\le 0.$$

Решая это квадратное неравенство, получаем оценку снизу для q, удовлетворяющего уравнению (13):

$$q\ge 1-\frac{9A_1^2}{32(\sup\varphi)^{2-\alpha}}\left(\sqrt{1+\frac{64}{9A_1^2}(\sup\varphi)^{2-\alpha}}-1\right)=\bar{q}.$$

А поскольку $\left(\frac{1}{q}-1\right)$ — убывающая по q функция, то

$$\left(\frac{1}{q}-1\right)\sup\varphi\le\left(\frac{1}{\bar{q}}-1\right)\sup\varphi=$$

$$=\frac{9A_1^2}{32}\left[1+\sqrt{1+\frac{64}{9A_1^2}(\sup\varphi)^{2-\alpha}}\right](\sup\varphi)^{\alpha-1}.$$

Сравнивая это неравенство с условием (11), видим, что для φ выполняется неравенство (12), что и требовалось доказать.

В качестве примера рассмотрим функцию $f=\left(\frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}\right)^{\alpha}$, т.е. равную $H^{-\alpha}$, где H — средняя кривизна поверхности. Для такой функции при $0<\alpha\le 1$ выполняются условия (9) и (10) теоремы 1 с $A_1=1$ и $A_2=\alpha(\alpha-1)$. Поэтому, если

$$\inf\varphi>\frac{9}{32}\left[1+\sqrt{1+\frac{64}{9}(\sup\varphi)^{2-\alpha}}\right](\sup\varphi)^{\alpha-1},$$

то из этой теоремы следует существование решения для уравнения К. Миранда вида

$$R_1R_2+\left(\frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}\right)^{\alpha}+\mathrm{cn}=\varphi(\mathrm{n}).$$

З а м е ч а н и е 1. Из условия (11) следует, что $(\sup\varphi)^{2-\alpha}\ge\frac{9}{8}A_1^2$. Так что это условие можно упростить, заменив несколько более сильным:

$$\inf\varphi\ge\frac{\sup\varphi}{2}+\frac{3A_1}{4}(\sup\varphi)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

З а м е ч а н и е 2. Не изменяя доказательства, условие на f'' можно ослабить, заменив его, например, таким:

$$\sum_{j=0}^{4}\bar{A}_j\eta^{\alpha-j}\le f''\le 0,$$

где $\bar{A}_j\le 0$ — постоянные.

Положим $\frac{\sqrt{2R_1R_2}}{R_1+R_2}=u$, $R_1R_2=v$. Тогда $\frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}=2u^2v$. Пусть, как и прежде, функция f и ее производные удовлетворяют условиям теоремы 1 и $\alpha_2<\alpha_1<\alpha$. Рассмотрим теперь уравнение К. Миранда другого специального вида

$$R_1R_2+\int_0^v \frac{f(2u^2t)}{(\alpha_1-\alpha_2)t}\left[\left(\frac{v}{t}\right)^{\alpha_1}-\left(\frac{v}{t}\right)^{\alpha_2}\right]dt+c\mathrm{n}=\varphi(\mathrm{n}). \tag{14}$$

Теорема 2. *Уравнение* (14) *допускает одно и только одно решение* (S, c) *класса* $C^{m+2,\lambda}$, *если для функции* f *выполняются условия теоремы 1, а для* $\varphi(\mathrm{n})$, *кроме условия замкнутости, справедливо неравенство*

$$\inf\varphi>\frac{9A_1^2(\sup\varphi)^{\alpha-1}}{32(\alpha-\alpha_1)^2(\alpha-\alpha_2)^2}\left[1+\sqrt{1+\frac{64(\alpha-\alpha_1)^2(\alpha-\alpha_2)^2}{9A_1^2}(\sup\varphi)^{2-\alpha}}\right].$$

Для доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что для функционала $\Phi(R_1+R_2, R_1R_2)$ из уравнения (14) имеют место следующие соотношения:

$$0<\Phi\le\frac{A_1}{(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)}\left(\frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}\right)^{\alpha};$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial R_1}=\frac{2R_2^2}{R_1+R_2}\int_0^v\frac{f'}{(\alpha_1-\alpha_2)v^2}\left[\left(\frac{v}{t}\right)^{\alpha_1}-\left(\frac{v}{t}\right)^{\alpha_2}\right]dt\ge 0;$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial R_2}=\frac{2R_1^2}{R_1+R_2}\int_0^v\frac{f'}{(\alpha_1-\alpha_2)v^2}\left[\left(\frac{v}{t}\right)^{\alpha_1}-\left(\frac{v}{t}\right)^{\alpha_2}\right]dt\ge 0;$$

$$\frac{\bar{A}_2}{(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)^2}\left(\frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}\right)^{\alpha-2}\le\Phi_{22}\le 0,$$

которые проверяются непосредственно, если воспользоваться представлениями для Φ_1, Φ_2 и Φ_{22} из работы [3]

$$\Phi_1=\int_0^v\frac{f_1}{(\alpha_1-\alpha_2)v}\left[\left(\frac{v}{t}\right)^{\alpha_1}-\left(\frac{v}{t}\right)^{\alpha_2}\right]dt;$$

$$\Phi_2=\int_0^v\frac{tf_2}{(\alpha_1-\alpha_2)v^2}\left[\left(\frac{v}{t}\right)^{\alpha_1}-\left(\frac{v}{t}\right)^{\alpha_2}\right]dt;$$

$$\Phi_{22}=\int_0^v\frac{t^3f_{22}}{(\alpha_1-\alpha_2)v^4}\left[\left(\frac{v}{t}\right)^{\alpha_1}-\left(\frac{v}{t}\right)^{\alpha_2}\right]dt,$$

где f_1 — производная f по $R_1 + R_2$, а f_2 и f_{22} — по $R_1 R_2$.

Учитывая Замечание 2 работы [3], можно сделать вывод о справедливости теоремы 2 и при $\alpha_1 = \alpha_2 = \overline{\alpha}$, если уравнение (14) имеет вид

$$R_1 R_2 + \int_0^v \frac{f(2u^2 t)}{t} \left(\frac{v}{t}\right)^{\overline{\alpha}} \ln \frac{v}{t}\, dt + \mathrm{cn} = \varphi(\mathrm{n}).$$

Список литературы

1. *А.И. Медяник*, Теоремы существования для регулярных замкнутых выпуклых поверхностей.— Укр. геометр. сб. (1991), вып. 34, с. 69—80.
2. *C. Miranda*, Aggiunde ed errata corrige alla menoria: Su un problema digeometria differentiale in grande per gli ovaloidi.— Ann. Mat. Pura ed Appl. (1971), v. 88, pp. 349–355.
3. *А.И. Медяник*, О разрешимости одного уравнения для замкнутых выпуклых поверхностей.— Укр. геометр. сб. (1989), вып. 32, с. 88–92.

Closed convex surfaces in E^3 with given functions of curvatures

A.Г. Medianik

It is proved that there are a regular closed convex surface S and a constant vector c for which the equality

$$K^{-1} + H^{-\alpha} + \mathrm{cn} = \varphi(\mathrm{n})$$

is realized at a point with external normal n. Here K and H are the Gauss and mean curvatures of S at the point with normal n, $\varphi(\mathrm{n})$ is a given regular function on sphere, which satisfies the closeness condition and the inequality

$$\inf > \frac{9}{32}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{64}{9}(\sup\varphi)^{2-\alpha}}\right](\sup\varphi)^{\alpha - 1},$$

$\alpha \in (0, 1]$. The solution (S, c) is unique with a translation.

Замкнені опуклі поверхні в E^3 з заданими функціями кривин

А.Г. Медяник

Доведено, що існує регулярна замкнена опукла поверхня S та постійний вектор c такі, що в точці з зовнішньою нормаллю n виконується співвідношення

$$K^{-1} + H^{-\alpha} + \mathrm{cn} = \varphi(\mathrm{n}),$$

де K та H — гауссова і середня кривина S в точці з нормаллю n, $\varphi(\mathrm{n})$ — задана на сфері регулярна функція, що задовольняє умову замкненості та нерівності

$$\inf > \frac{9}{32}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{64}{9}(\sup\varphi)^{2-\alpha}}\right](\sup\varphi)^{\alpha - 1},$$

$\alpha \in (0, 1]$. З точністю до паралельного переносу розв'язок (S, c) — єдиний.