Математическая физика, анализ, геометрия
1996, т. 3, № 3/4, с. 219-230

Многочленные асимптотические представления субгармонических функций с массами на конечной системе лучей

П.З. Агранович

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 29 мая 1995 года

Полностью исследована возможность получения многочленной асимптотики меры Рисса субгармонической функции с массами на конечной системе лучей.

Пусть $u(z)$ субгармоническая во всей плоскости C функция, μ — ее мера Рисса*.

Известная теорема Валирона [3] утверждает, что если целая функция $f(z)$ нецелого порядка ρ с положительными нулями имеет следующего вида одночленное асимптотическое представление

$$\ln|f(-r)| = \frac{\pi\Delta r^{\rho}}{\sin\pi\rho} + o(r^{\rho}), \quad r \to \infty,$$

то для считающей нули функции $n(t)$ справедливо соотношение

$$n(t) = \Delta t^{\rho} + o(t^{\rho}), \quad t \to \infty.$$

Естественно возникает задача об обобщении теоремы Валирона на случай многочленных асимптотик. Как показано в [4–6], ситуация в этом случае резко меняется. Во-первых, асимптотика функции $u(z)$ должна быть обязательно задана на луче с массами, во-вторых, при этом появляются некоторые необходимые дополнительные условия на порядки, а именно, справедлива следующая

* В работе используются стандартные обозначения и понятия теории целых [1] и субгармонических [2] функций.

Теорема А [6]. *Пусть $u(z)$ субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция нецелого порядка ρ_1, $p < \rho_1 < p+1$, где p — показатель сходимости ассоциированной по Риссу функции $u(z)$ меры μ, и пусть носитель этой меры сосредоточен на луче $\{ z : \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z = 0 \}$. Пусть, далее,*

$$u(x) = \sum_{j=1}^{2} \pi\Delta_j x^{\rho_j} \operatorname{ctg} \pi\rho_j + \psi(x), \quad x > 0^{*},$$

где числа ρ_1 и ρ_2 удовлетворяют одному из следующих условий :

a) $p < \rho_2 < \rho_1 < p + 1/2$, b) $p + 1/2 < \rho_2 < \rho_1$**,

а для функции $\psi(x)$ при некотором $q \geq 1$ имеет место асимптотическая оценка

$$\int_T^{2T} | \psi(x) |^q \, dx = o(T^{\rho_2 q + 1}), \quad T \to \infty.$$

Тогда для функции $\mu(t) = \mu(\{ z : | z | < t \})$ справедливо следующее представление :

$$\mu(t) = \Delta_1 t^{\rho_1} + \Delta_2 t^{\rho_2} + \varphi(t),$$

*в котором $\varphi(t) = o(t^{\rho_2})$, $t \to \infty$, вне исключительного множества нулевой относительной меры****.

Если $q > 1$, то, кроме того,

$$\int_T^{2T} | \varphi(t) |^q \, dt = o(T^{\rho_2 q + 1}), \quad T \to \infty.$$

Для любой пары чисел ρ_1 и ρ_2, для которых $p < \rho_2 < p + 1/2 < \rho_1 < p + 1$, найдется субгармоническая функция $u(z)$, для которой выполнены условия теоремы, а функция $\mu(t)$ не имеет соответствующей асимптотики.

---

* Случай двучленной асимптотики приведен здесь лишь для простоты. Соответствующий результат верен для многочленных асимптотик.

** Условия a) и b) эквивалентны условию $2\rho_2 > [2\rho_1]$.

*** Множество E называется множеством нулевой относительной меры, если $\lim_{R \to \infty} \frac{1}{R} \operatorname{mes}(E \cap (0, R)) = 0$, где $\operatorname{mes}(\ :\ )$ — мера Лебега.

Далее будет показано, что если задать многочленную асимптотику функции $u(z)$ еще на некотором дополнительном луче, то утверждение теоремы А остается справедливым и в случае, когда $2\rho_2 < [2\rho_1]$. Точнее имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть $u(z)$ субгармоническая во всей плоскости функция нецелого порядка ρ_1, и пусть носитель ее меры Рисса сосредоточен на луче $\{ z : \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z = 0 \}$. Предположим далее, что справедливы следующие соотношения:*

$$u(x) = \pi\Delta_1 x^{\rho_1} \operatorname{ctg} \pi\rho_1 + \pi\Delta_2 x^{\rho_2} \operatorname{ctg} \pi\rho_2 + \psi_1(x), \quad x > 0, \tag{1}$$

и

$$u(re^{i\theta_0}) = \frac{\pi r^{\rho_1}}{\sin \pi\rho_1} \Delta_1 \cos \rho_1 (\theta_0 - \pi) + Cr^{\gamma} + \psi_0(r), \tag{2}$$

где θ_0 — фиксированное число интервала $(0, 2\pi)$; $[\rho_1] = p < \rho_2 < \rho_1$, $2\rho_2 < [2\rho_1]$, $\rho_2 \le \gamma < \frac{1}{2}[2\rho_1]$ и при некотором $q \ge 1$ имеет место следующая оценка:

$$\int_T^{2T} |\max \{ \psi_0(r), \psi_1(r) \}|^q \, dr = o(T^{\rho_2 q + 1}), \quad T \to \infty. \tag{3}$$

Тогда функция $\mu(t)$ имеет вид

$$\mu(t) = \Delta_1 t^{\rho_1} + \Delta_2 t^{\rho_2} + \varphi(t), \tag{4}$$

причем $\varphi(t) = o(t^{\rho_2})$, $t \to \infty$, вне исключительного множества нулевой относительной меры.

Если $q > 1$, то

$$\int_T^{2T} |\varphi(t)|^q \, dt = o(T^{\rho_2 q + 1}), \quad T \to \infty. \tag{5}$$

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что для некоторого фиксированного $t_0 > 0$ функция $\mu(t) \equiv 0$ при $t \le t_0$.

Рассмотрим функцию $\upsilon(z) = u(z^2)$. Очевидно, что $\upsilon(z)$ — гармоническая в верхней полуплоскости функция, причем при $t \in \mathbf{R}$

$$\upsilon(t) = \upsilon(-t) = u(t^2) = \pi\Delta_1 x^{2\rho_1} \operatorname{ctg} \pi\rho_1 + \pi\Delta_2 t^{2\rho_2} \operatorname{ctg} \pi\rho_2 + \psi_1(t^2). \tag{6}$$

Положим $\overline{\psi}_1(t) = \psi_1(t^2)$, тогда ввиду (3)

$$\int_T^{2T} |\overline{\psi}_1(t)|^q\, dt = \int_T^{2T} |\psi_1(t^2)|^q\, dt = 1/2 \int_{T^2}^{4T^2} |\psi_1(s)|^q \frac{ds}{\sqrt{s}} = o(T^{2\rho_2 q+1}), \quad T \to \infty. \tag{7}$$

В силу формулы Неванлинны [7]

$$\upsilon(z) = \sum_{k=1}^{s} a_k r^k \sin k\theta + 1/\pi \int_{|t|>1} \upsilon(t) \operatorname{Im}\left\{\frac{z^{s+1}}{t^{s+1}(t-z)}\right\} dt + o(1),$$

где $s = [2\rho_1]$. Подставляя в правую часть этого равенства асимптотику (5) и выполняя интегрирование с помощью вычетов, получим, что

$$\upsilon(z) = \sum_{k=1}^{s} a_k r^k \sin k\theta + \frac{\pi\Delta_1}{\sin \pi\rho_1} \operatorname{Re}\left\{ z^{2\rho_1} e^{-i\pi\rho_1} \right\} +$$

$$+ \frac{\pi\Delta_2}{\sin \pi\rho_2} \operatorname{Re}\left\{ z^{2\rho_2} e^{-i\pi\rho_2} \right\} + J + o(1), \; z = re^{i\theta}, \;\; z \to \infty,$$

где

$$J = 1/\pi \int_{|t|>1} \overline{\psi}_1(t) \operatorname{Im}\left\{\frac{z^{s+1}}{t^{s+1}(t-z)}\right\} dt.$$

Перепишем теперь последнее равенство следующим образом:

$$J = 1/\pi \left(\int_{1 \le |t| \le |z|/2} + \int_{|z|/2 \le |t| \le 2|z|} + \int_{2|z| \le |t|} \right) = J_1 + J_2 + J_3 .$$

Для оценки J_2 воспользуемся теоремой об оценке интеграла типа Коши из работы [6]. Из этой теоремы в силу условия (7) следует, что

$$\int_T^{2T} \sup_{0 \le \theta \le \pi} |J_2(re^{i\theta})|^q\, dr = o(T^{\rho_2 q+1}), \quad T \to \infty. \tag{8}$$

В самом деле, так как $\overline{\psi}_1(t)$ вещественная функция, то

$$J_2 = 1/\pi \, \mathrm{Im}\left\{ z^{s+1} \int\limits_{|z|/2 \le |t| \le 2|z|} \frac{\overline{\psi}_1(t)}{t^{s+1}(t-z)}\, dt \right\}.$$

Ввиду (7) справедлива оценка:

$$\int\limits_{|z|/2 \le |t| \le 2|z|} \left| \frac{\overline{\psi}_1(t)}{t^{s+1}} \right|^q dt = C|z|^{-(s+1)q} \, o\left(|z|^{2\rho_2 q+1}\right) =$$

$$= o\left(|z|^{(2\rho_2 - s - 1)q + 1}\right), \quad |z| \to \infty.$$

Значит, как вытекает из упомянутой выше теоремы,

$$\int\limits_T^{2T} \left\{ \sup_{\{z : |\mathrm{Im}\, z| \ge -|\mathrm{Re}\, z| + s\}} |J_2(z)| \right\}^q ds = o(T^{2\rho_2 q + 1}), \quad T \to \infty.$$

Отсюда непосредственно следует оценка (8).

Оценим теперь J_3.

$$|J_3| \le C|z|^{s+1} \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{2^j|z|}^{2^{j+1}|z|} \left| \frac{\overline{\psi}_1(t)}{t^{s+1}(t-z)} \right| dt \le$$

$$\le C|z|^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-(s+2)} \left(\int\limits_{2^j|z|}^{2^{j+1}|z|} |\overline{\psi}_1(t)|^q dt \right)^{1/q} (2^j|z|)^{1/q'} =$$

$$= C|z|^{2\rho_2} \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j(z)\, 2^{j(2\rho_2 - s - 1)}.$$

(Здесь и в дальнейшем $\varepsilon(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$). Отсюда, поскольку $2\rho_2 < s+1$, заключаем, что

$$J_3 = o(|z|^{2\rho_2}), \quad |z| \to \infty. \tag{9}$$

Перейдем теперь к оценке J_1. Так как

$$1/(t-z) = -1/z(1 + t/z + o(|t/z|^2)), \quad |t/z| \le 1/2,$$

то

$$J_1 = -1/\pi \,\mathrm{Im}\left\{ z^s \int\limits_{1 \le |t| \le |z|/2} \frac{\overline{\psi}_1(t)}{t^{s+1}}\, dt + O(|z|^{s-1}) \int\limits_{1 \le |t| \le |z|/2} \frac{\overline{\psi}_1(t)}{t^s}\, dt \right\} =$$

$$= \overline{J}_{1,1} + \overline{J}_{1,2}, \quad |z| \to \infty.$$

Представим $\overline{J}_{1,1}$ в виде

$$\overline{J}_{1,1} = -1/\pi \,\mathrm{Im}\left\{ z^s \int\limits_1^\infty \frac{\overline{\psi}_1(t)}{t^{s+1}}\, dt - z^s \int\limits_{|z|/2}^\infty \frac{\overline{\psi}_1(t)}{t^{s+1}}\, dt \right\}.$$

Повторяя рассуждения, проведенные при оценке J_3, получаем, что

$$z^s \int\limits_{|z|/2}^\infty \frac{|\overline{\psi}_1(t)|}{t^{s+1}}\, dt = o(|z|^{2\rho_2}), \quad |z| \to \infty.$$

Далее, в силу соотношений на порядки, приведенных в условии теоремы 1 и оценки (7), имеем

$$\int\limits_1^\infty \frac{|\overline{\psi}_1(t)|}{t^{s+1}}\, dt \le \sum_{j=0}^\infty \left(\int\limits_{2^j}^{2^{j+1}} \left(\frac{|\overline{\psi}_1(t)|}{t^{s+1}} \right)^q dt \right)^{1/q} (2^j)^{1/q'} =$$

$$= \sum_{j=0}^\infty \varepsilon_j \, 2^{j(2\rho_2 + 1/q - s - 1 + 1/q')} < \infty.$$

Таким образом,

$$\overline{J}_{1,1} = Cr^s \sin s\theta + o(|z|^{2\rho_2}), \quad |z| \to \infty, \quad z = re^{i\theta}. \tag{10}$$

Покажем теперь, что

$$\overline{J}_{1,2} = o(|z|^{2\rho_2}), \quad |z| \to \infty. \tag{11}$$

Эта оценка непосредственно вытекает из следующей леммы.

Лемма. *Если*

$$\int_1^r g(t)dt = C + o(r^{\alpha}), \quad -1 < \alpha \le 0, \quad r \to \infty, \tag{12}$$

где C некоторая константа, то

$$\int_1^r tg(t)dt = o(r^{\alpha+1}), \quad r \to \infty.$$

Доказательство. Имеем

$$\int_1^r tg(t)dt = \left(t \int_1^t g(s)ds \right) \Big|_1^r - \int_1^r dt \int_1^t g(s)ds.$$

Отсюда и из (12) следует, что

$$\int_1^r tg(t)dt = r\,(C + o(r^{\alpha})) - \int_1^r (C + o(t^{\alpha}))\, dt =$$

$$= Cr + o(r^{\alpha+1}) - Cr + C + \int_1^{r_0} o(t^{\alpha})\, dt + \int_{r_0}^r o(t^{\alpha})\, dt = o(r^{\alpha+1}), \quad r \to \infty.$$

Лемма доказана.

В силу этой леммы и из того, что $-1 < 2\rho_2 - s < 0$, убеждаемся в справедливости оценки (11).

Из (10) и (11) следует, что

$$J_1 = Cr^s \sin s\theta + o(|z|^{2\rho_2}), \quad |z| \to \infty. \tag{13}$$

Подытоживая теперь (8), (9) и (13), получаем, что

$$J = Cr^s \sin s\theta + \kappa\,(re^{i\theta}),$$

где

$$\int_T^{2T} \sup_{0 \le \theta \le \pi} |\kappa\,(re^{i\theta})|^q\, dr = o(T^{2\rho_2 q + 1}), \quad T \to \infty, \ j = 1, 2.$$

Таким образом,

$$\upsilon(re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a}_k r^k \sin k\theta + \frac{\pi\Delta_1}{\sin \pi\rho_1} \operatorname{Re}\{ z^{2\rho_1} e^{-i\pi\rho_1} \} +$$

$$+ \frac{\pi\Delta_2}{\sin \pi\rho_2} \operatorname{Re}\{ z^{2\rho_2} e^{-i\pi\rho_2} \} + \hat{\psi}(re^{i\theta}),$$

где

$$\int_T^{2T} \left\{ \sup_{0 \le \theta \le \pi} |\hat{\psi}(re^{i\theta})|^q \right\} dr = o(T^{2\rho_2 q + 1}), \quad T \to \infty.$$

Заметим, что если $2\rho_2 > s$, то можно считать, что коэффициенты $\overline{a}_k = 0$.

Вернемся теперь к функции $u(z)$. Легко видеть, что

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a}_k r^{k/2} \sin\frac{k}{2}\theta + \sum_{k=1}^{2} \frac{\pi\Delta_k r^{\rho_k}}{\sin \pi\rho_k} \cos \rho_k(\theta - \pi) + \psi(re^{i\theta}), \tag{14}$$

причем функция ψ удовлетворяет следующей оценке:

$$\int_T^{2T} \left\{ \sup_{[0, 2\pi]} |\psi(re^{i\theta})|^q \right\} dr = o(T^{\rho_2 q + 1}), \quad T \to \infty. \tag{15}$$

Кроме того, так как $2\rho_2 > s - 1$, то в первой из сумм в (14) можно без нарушения асимптотики оставить лишь одно слагаемое с $k = s$, а остальные присоединить к остаточному члену ψ.

Теперь, используя схему доказательства теоремы 6 из [6] для функции $u(re^{i\theta})$ с асимптотикой (14), получим, что

$$\mu(t) = \Delta_1 t^{\rho_1} + \Delta_2 t^{\rho_2} + b_s t^{s/2}(1 - \cos s\pi) + \varphi(t),$$

где b_s — некоторая константа, а для функции $\varphi(t)$ имеет место оценка (5).

Отметим, что изменение доказательства теоремы 6 из [6] свелось к подсчету лапласиана слагаемого $\overline{a}_s r^{s/2} \sin\frac{s}{2}\theta$.

Далее, применяя теорему 1 из [6] (при этом, конечно, учитываем то, что в рассматриваемом случае есть дополнительное слагаемое), заключаем, что

$$u(re^{i\theta}) = Ar^{s/2}\cos\frac{s}{2}(\theta-\pi) + \sum_{k=1}^{2}\frac{\pi\Delta_k r^{\rho_k}}{\sin\pi\rho_k}\cos\rho_k(\theta-\pi) + \psi(re^{i\theta}),$$

а функция $\psi(re^{i\theta})$ удовлетворяет оценке (15). Вследствие (2) получаем равенство

$$Ar^{s/2}\cos\frac{s}{2}(\theta_0-\pi) + \frac{\pi\Delta_2 r^{\rho_2}}{\sin\pi\rho_2}\cos\rho_2(\theta_0-\pi) - Cr^{\gamma} = \kappa(re^{i\theta_0})$$

с функцией κ, удовлетворяющей оценке

$$\int_T^{2T} |\kappa(re^{i\theta_0})|^q\, dr = o(T^{\rho_2 q+1}), \quad T\to\infty.$$

Отсюда следует, что $A = 0$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Как следует из теоремы 1 работы [6], асимптотика (4) функции $\mu(t)$ индуцирует двучленную асимптотику функции $u(z)$ следующего вида:

$$u(re^{i\theta_0}) = \sum_{k=1}^{2}\frac{\pi r^{\rho_k}}{\sin\pi\rho_k}\Delta_k\cos\rho_k(\theta_0-\pi) + \psi_0(r),$$

т.е. в выражении (2)

$$C = \frac{\pi}{\sin\pi\rho_2}\Delta_2\cos\rho_2(\theta_0-\pi)$$

и $\gamma = \rho_2$.

З а м е ч а н и е 2. Если $2\rho_2 = [2\rho_1]$, то приведенный в работе [6] пример показывает, что в этом случае существует субгармоническая функция $u(z)$, для которой выполнены условия теоремы 1, однако требуемого вида асимптотика для функции $\mu(t)$ не имеет места.

Итак, показано, что в случае, когда риссовские массы субгармонической функции $u(z)$ расположены лишь на одном луче, то наличие многочленной асимптотики $u(z)$ на этом луче и еще лишь на одном дополнительном (но уже без масс) гарантирует требуемого вида асимптотику для функции $\mu(t)$ при отсутствии каких-либо условий на порядки ρ_1, ρ_2, кроме случая $2\rho_2 = [2\rho_1]$.

Естественно теперь рассмотреть соответствующую задачу для случая, когда риссовские массы субгармонической функции $u(z)$ расположены на конечной системе лучей. В работе [6] получены условия, связывающие порядки функции $u(z)$ и растворы углов между лучами с массами, гарантирующие искомого вида асимптотику функции $\mu(t)$ на лучах с массами. Для того чтобы сформулировать полученный в [6] результат, введем следующие обозначения.

Пусть риссовские массы субгармонической функции $u(z)$ нецелого порядка ρ_1 расположены на конечной системе лучей $\{\theta_j\}_{j=1}^{n}$; $0 \le \theta_1 < \ldots < \theta_n < 2\pi$. Положим

$$\alpha_j = \left[\rho_1 \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{\pi}\right] \frac{\pi}{\theta_{j+1} - \theta_j}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\theta_{n+1} = \theta_1 + 2\pi,$$

$$\alpha_{n+j} = \left(\left[\rho_1 \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{\pi}\right] - 1\right) \frac{\pi}{\theta_{j+1} - \theta_j}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Упорядочим множество $\{\alpha_j\}_1^{2n}$ по убыванию: $\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \ldots \ge \alpha_{k_{2n}}$. Предположим далее, что $\alpha_{k_1} = \alpha_{k_2} = \ldots = \alpha_{k_{p1}} = \overline{\alpha}_1, \ldots, \alpha_{k_{p_{m-1}}+1} = \ldots = \alpha_{k_{pm}} = \overline{\alpha}_m$.

Обозначим через $\Omega_j(\theta)$, $j = 1, \ldots, m$, матрицы вида

$$\Omega_j(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\overline{\alpha}_j(\theta_1 - \theta_{p_{j-1}+1} - \pi) & \ldots & \cos\overline{\alpha}_j(\theta_1 - \theta_{p_j} - \pi) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos\overline{\alpha}_j(\theta_s - \theta_{p_{j-1}+1} - \pi) & \ldots & \cos\overline{\alpha}_j(\theta_s - \theta_{p_j} - \pi) \end{pmatrix},$$

где $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_s)$, а s — некоторое целое число ≥ 1.

Теорема В [6]. *Пусть $u(z)$ — субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция нецелого порядка ρ_1, носитель меры Рисса которой сосредоточен на конечной системе лучей* $\arg z = \theta_j$, $j = 1, \ldots, n$. *Пусть, далее, для функции $u(z)$ имеют место соотношения*

$$u(re^{i\theta}) = \pi \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{r^{\rho_i}}{\sin \pi\rho_i} \Delta_k^{(i)} \cos \rho_i(\theta_j - \theta_k - \pi) + \psi_j(r), \quad j = 1, \ldots, n, \qquad (15)$$

где $p < \rho_2 < \rho_1$, $\dfrac{\theta_{j+1} - \theta_j}{\pi}\rho_2$ — *нецелые при любом* $j = 1, \ldots, n$, *и функции* $\psi_j(z)$ *удовлетворяют следующей оценке* :

$$\int\limits_T^{2T} \{ \sup_j | \psi_j(r) | \}^q \, dr = o(T^{\rho_2 q + 1}), \quad T \to \infty, \quad q > 1.$$

Предположим, кроме того, что выполнено хотя бы одно из условий:

a) *существует номер* j_0, $1 \le j_0 \le n$, *такой, что* $\rho_2 > \alpha_{j_0}$;

b) *если* $\rho_2 < \overline{\alpha}_j$, *то ранг матриц* $\Omega_j(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ *максимален для любого* $j = 1, \ldots, m$.

Тогда функции $\mu_j(t) = \mu(\{ z : 0 < |z| < t, \ \arg z = \theta_j \})$, $j = 1, \ldots, n$, *имеют вид*

$$\mu_j(t) = \Delta_j^{(1)} t^{\rho_1} + \Delta_j^{(2)} t^{\rho_2} + \varphi_j(t), \tag{16}$$

где

$$\int\limits_T^{2T} | \varphi_j(t) |^q \, dt = o(T^{\rho_2 q + 1}), \quad T \to \infty, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Анализ доказательства теоремы 1 и использование схемы доказательства теоремы B позволяют получить асимптотику функций $\mu_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, вида (16) не только при выполнении условий a) и b) теоремы B, но и в некоторых других случаях. А именно, имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть функция* $u(z)$ *та же, что и в теореме B с асимптотикой вида (15) на системе лучей* $\arg z = \theta_j$, $j = 1, \ldots, s$, *где* $s > n$ *таково, что матрицы* $\Omega_k(\theta_1, \ldots, \theta_s)$, $k = 1, \ldots, n$, *имеют максимальный ранг. Тогда для функций* $\mu_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, *справедливы асимптотические равенства* (16).

Доказательство этой теоремы достаточно громоздко, поэтому мы опускаем его, ограничившись сделанным выше указанием на связь его с доказательствами теорем B и 1.

Замечание 3. Легко видеть, что теорема 1 является частным случаем теоремы 2. В самом деле, предположим, что носитель меры Рисса субгармонической функции $u(z)$ сосредоточен только на одном луче $\theta_1 = 0$. Тогда в обозначениях теоремы 2 имеем

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\,[2\rho_1];\ \alpha_2 = \frac{1}{2}\,([2\rho_1] - 1).$$

Очевидно, что $\alpha_1 > \alpha_2$ и матрица $\Omega_1(\theta_1) = (\cos\alpha_1\pi)$. Если ранг матрицы $\Omega_1(\theta_1)$ равен нулю, т.е., α_1 является полуцелым, то добавление лишь одного луча с заданной асимптотикой функции $u(z)$ (при этом ранг матрицы $\Omega(\theta)$ становится равным 1) в силу теоремы 2 гарантирует существование требуемого вида асимптотики для функции $\mu(t)$.

Приношу свою глубокую благодарность профессору Л.И. Ронкину за внимание к работе.

Список литературы

1. *Б.Я. Левин*, Распределение корней целых функций. Гостехиздат, Москва (1956), 632 с.
2. *Л.И. Ронкин*, Введение в теорию целых функций многих переменных. Наука, Москва (1971), 430 с.
3. *G. Valiron*, Sur les fonctions entieres d'ordre nul.— Ann. Fac. Sci. Univer.Toulouse (1913), v.5, p. 117–257.
4. *J.M. Anderson*, Integral functions and tauberian theorem.— Duke Math. J. (1965), v. 32, No 4, p. 83–90.
5. *М.М. Тян*, Об одном приложении тауберовой теоремы Карлемана–Субханкулова.— Изв. АН УзССР. Сер.физ.-мат. (1963), № 3, с. 18–20.
6. *П.З. Агранович, В.Н. Логвиненко*, Аналог теоремы Валирона–Титчмарша для двучленных асимптотик субгармонической функции с массами на конечной системе лучей.— Сиб. мат. журн. (1985), т. 24, № 5, с. 3–19.
7. *R. Nevanlinna*, Uber die Rigenschaften meromorpher Funktionen in einem Winkebraum.— Acta Soc.Sci.Fenn. (1925), v. 50, No 12, p. 1–45.

Polynomial asymptotic representations for subharmonic functions with masses supported by finite system of rays

P. Z. Agranovich

The possibility of polynomial asymptotic representations of the Riesz measure for subharmonic function with masses supported by finite system of rays is completely investigated.

Многочленні асимптотичні зображення субгармонічних функцій з масами на скінченній системі променів

П. З. Агранович

Повністю вивчено можливість здобуття многочленної асимптотики міри Рісса субгармонічної функції з масами на скінченній системі променів.