Математическая физика, анализ, геометрия
1996, т. 3, № 3/4, с. 261-266

Устойчивость решения изопериметрической задачи в геометрии Минковского

В. И. Дискант

Черкасский инженерно-технологический институт, Украина, 257006, г. Черкассы, ул. Шевченко, 60

Статья поступила в редакцию 23 февраля 1994 года

Пусть X — выпуклое тело в n-мерном пространстве Минковского M^n ($n \geq 2$) с симметричной метрикой, B — нормирующее тело M^n, I — изопериметрикс M^n, $F_B(X)$ — площадь поверхности, $V_B(X)$ — объем тела X в M^n. Доказана теорема: найдутся такие величины $\varepsilon_0 > 0$, $C > 0$, зависящие от n, r_I, R_I, что из выполнения условий $F_B^n(X) - n^n V_B(I) V_B^{n-1}(X) < \varepsilon, 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0, V_B(X) = V_B(I)$ следует $\delta_B(X, I) < C\varepsilon^{1/n}$, где $\delta_B(X, I)$ — отклонение X и I в M^n, r_I — коэффициент вместимости B в I, R_I — коэффициент охвата тела I телом B.

Изопериметрическое неравенство в n-мерном пространстве Минсковского M^n ($n \geq 2$) с симметричной метрикой [1] имеет вид

$$\Delta_B(A) = F_B^n(A) - n^n V_B(I) V_B^{n-1}(A) \geq 0, \tag{1}$$

в котором B — нормирующее тело пространства M^n, I — изопериметрикс пространства M^n [1], A — выпуклое тело в M^n, $F_B(A)$ — площадь поверхности тела A в M^n, $V_B(A)$, $V_B(I)$ — объемы тел A и I в M^n. Равенство в (1) для собственного выпуклого тела A имеет место тогда и только тогда, когда A и I положительно гомотетичны. Под выпуклым телом в M^n будем понимать выпуклый компакт пространства M^n, под собственным выпуклым телом — выпуклое тело, имеющее внутренние точки.

Изопериметрическая задача в M^n состоит в следующем: среди выпуклых тел в M^n, имеющих заданную площадь поверхности $F_0 > 0$, определить те тела, которые имеют наибольший объем. Изопериметрическая задача в M^n равносильна задаче: среди выпуклых тел в M^n, имеющих заданный объем $V_0 > 0$, определить те тела, которые имеют наименьшую площадь поверхности. Решение этой задачи равносильно решению уравнения $\Delta_B(X) = 0$ при $V_B(X) = V_0 > 0$. Как следует из условия равенства в (1), решение уравнения $\Delta_B(X) = 0$ при $V_B(X) = V_0 > 0$ существует и единственно. Им является тело I_0, положительно гомотетичное изопериметриксу, для которого $V(I_0) = V_0$. Это решение является и решением изопериметрической задачи в M^n. В случае, если $V_0 = V_B(I)$, решением изопериметрической задачи будет изопериметрикс I пространства M^n.

Единственность решения изопериметрической задачи в M^n, т.е. единственность решения уравнения $\Delta_B(X) = 0$ при $V_B(X) = V_0$, порождает вопрос об устойчивости этого решения. При этом под устойчивостью решения задачи будем понимать наличие такой оценки изменения ее решения, которая является бесконечно малой, если условия задачи изменяются бесконечно мало.

Для формулировки теоремы устойчивости решения изопериметрической задачи в M^n определим расстояние между выпуклыми телами и отклонение выпуклых тел в M^n по аналогии с понятиями для этих величин в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$.

Расстоянием по Хаусдорфу $\rho_B(A_1, A_2)$ между выпуклыми телами A_1 и A_2 в M^n $(n \geq 1)$ с симметричной метрикой называют величину

$$\rho_B(A_1, A_2) := \max \{ \sup_{\bar{a}_1 \in A_1} \inf_{\bar{a}_2 \in A_2} \rho_B(\bar{a}_1, \bar{a}_2), \sup_{\bar{a}_2 \in A_2} \inf_{\bar{a}_1 \in A_1} \rho_B(\bar{a}_1, \bar{a}_2) \},$$

где $\rho_B(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ — расстояние между точками $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ в M^n.

Под отклонением $\delta_B(A_1, A_2)$ выпуклых тел A_1 и A_2 в M^n $(n \geq 1)$ с симметричной метрикой будем понимать величину, определенную равенством

$$\delta_B(A_1, A_2) = \inf_{\tilde{A}_2 \in \{A_2\}} \rho_B(A_1, \tilde{A}_2),$$

где $\{A_2\}$ — множество выпуклых тел, которые получаются из A_2 параллельным переносом в M^n.

Содержание настоящей работы составляет следующая теорема устойчивости решения изопериметрической задачи в M^n.

Теорема. *Пусть X — выпуклое тело в M^n ($n \geq 2$) с симметричной метрикой ρ_B. Найдутся такие величины $\varepsilon_0 > 0$, $C > 0$, зависящие от n, r_I, R_I, что из выполнения условий*

$$F_B^n(X) - n^n V_B(I) V_B^{n-1}(X) < \varepsilon, \quad 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0, \quad V_B(X) = V_B(I)$$

следует

$$\delta_B(X, I) < C\varepsilon^{1/n}.$$

В этой теореме величина $r_I = q(I, B)$ — коэффициент вместимости нормирующего тела B в изопериметрикс I пространства M^n, т.е. наибольшее из чисел α, для которых тело αB параллельным сдвигом помещается в I; величина $R_I = Q(I, B)$ — коэффициент охвата тела I телом B, т.е. наименьшее из чисел β, для которых тело I параллельным сдвигом помещается в тело βB [2].

Доказательство теоремы. В [3] для собственного выпуклого тела A в M^n были получены следующие уточнения изопериметрического неравенства (1):

$$F_B^{n/(n-1)}(A) - (n^n V_B(I))^{1/(n-1)} V_B(A) \geq$$

$$\geq \left(F_B^{1/(n-1)}(A) - (n V_B(I))^{1/(n-1)} q(A, I)\right)^n, \tag{2}$$

$$F_B^n(A) - n^n V_B(I) V_B^{n-1}(A) \geq \left(F_B(A) - n V_B(A)/Q(A, I)\right)^n; \tag{3}$$

здесь $q(A, I)$ — коэффициент вместимости I в A, а $Q(A, I)$ — коэффициент охвата тела A телом I.

Полагая в (2) $A = X$, получим следующую оценку для величины $q(X, I)$ снизу:

$$q(X, I) \geq \left(\frac{F_B(X)}{n V_B(I)}\right)^{1/(n-1)} - \frac{(F_B^{n/(n-1)}(X) - (n^n V_B(I))^{1/(n-1)} V_B(X))^{1/n}}{(n V_B(I))^{1/(n-1)}}. \tag{4}$$

Из неравенства (1) и условия $V_B(X) = V_B(I)$ теоремы имеем

$$F_B(X) \geq n V_B(I).$$

Поэтому в правой части (4) первый член — не меньше единицы, а для второго члена имеет место оценка

$$\frac{(F_B^{n/(n-1)}(X) - (n^n V_B(I))^{1/(n-1)} V_B(X))^{1/n}}{(nV_B(I))^{1/(n-1)}} \le$$

$$\le \frac{(F_B^n(X) - n^n V_B(I) V_B^{n-1}(X))^{1/n}}{nV_B(I)} \le \frac{\varepsilon^{1/n}}{nV_B(I)},$$

которая может быть получена следующим образом. Положим $F_B^{n/(n-1)}(X) = a$, $(n^n V_B(I))^{1/(n-1)} V_B(X) = b$. Тогда второй член в правой части (4) примет вид $(a-b)^{1/n}/(nV_B(I))^{1/(n-1)}$. Из (1) имеем $a \ge b$. Отсюда и из условий теоремы получаем

$$\frac{(a-b)^{1/n}}{(nV_B(I))^{1/(n-1)}} \le \frac{(a^{n-1} - a^{n-2} b)^{1/n}}{a^{(n-2)/n} (nV_B(I))^{1/(n-1)}} \le$$

$$\le \frac{(a^{n-1} - b^{n-1})^{1/n}}{F_B^{(n-2)/(n-1)}(X)\,(nV_B(I))^{1/(n-1)}} \le$$

$$\le \frac{(F_B^n(X) - n^n V_B(I) V_B^{n-1}(X))^{1/n}}{(nV_B(I))^{(n-2)/(n-1)} (nV_B(I))^{1/(n-1)})} \le \frac{\varepsilon^{1/n}}{nV_B(I)}.$$

Следовательно,

$$q(X, I) \ge 1 - \frac{\varepsilon^{1/n}}{nV_B(I)}.$$

По условию нормировки объема в M^n объем $V_B(B) = v_n$, где v_n — объем единичного шара в $\mathbf{R}^n$ [1]. Поэтому из $r_I B \subset I$ вытекает, что

$$V_B(I) \ge V_B(r_I B) = r_I^n v_n, \quad q(X, I) \ge 1 - C_1 \varepsilon^{1/n}, \tag{5}$$

где $C_1 = \dfrac{1}{nr_I^n v_n}$ зависит от n и r_I.

Полагая в (3) $A = X$, получим следующую оценку величины $1/Q(X, I)$ снизу:

$$1/Q(X,I) \geq \frac{F_B(X)}{nV_B(X)} - \frac{(F_B(X) - n^n V_B(I) V_B^{n-1}(X))^{1/n}}{nV_B(X)}. \tag{6}$$

Так же как и в (4), первый член в правой части (6) не меньше единицы. С учетом условий теоремы тогда получим

$$\frac{1}{Q(X,I)} \geq 1 - \frac{\varepsilon^{1/n}}{nV_B(I)} \geq 1 - C_1\varepsilon^{1/n}.$$

Из последнего неравенства при условии

$$C_1\varepsilon^{1/n} < \frac{1}{2} \tag{7}$$

имеем

$$Q(X,I) < 1 + 2C_1\varepsilon^{1/n}. \tag{8}$$

Из оценок (5) и (8) следует

$$Q(X,I) - q(X,I) < 3C_1\varepsilon^{1/n}. \tag{9}$$

По определению величины $q(X,I)$ тело qI можно параллельным сдвигом перевести в тело $(qI)'$ такое, что $(qI)' \subset X$. По определению величины $Q = Q(X,I)$ тело QI можно параллельным сдвигом перевести в тело $(QI)'$ такое, что $(QI)' \supset X$. В результате получим цепочку включений $(qI)' \subset X \subset (QI)'$, из которой и из равенства $V_B(I) = V_B(X)$ следует, что $q \leq 1$, $Q \geq 1$. Тела $(qI)'$ и $(QI)'$ положительно гомотетичны телу I, а поэтому и сами положительно гомотетичны. Так как $(qI)' \subset (QI)'$, то центр гомотетии — точка O' тел $(qI)'$ и $(QI)'$ лежит в $(qI)'$. Возьмем O' за начало координат. Рассмотрим тело $I_1 = (1/q)(qI)'$. Тело I_1 содержит начало координат O'. Кроме того, $qI_1 = (qI)'$, $QI_1 = (Q/q)(qI_1) = (QI)'$, и тело I_1 получается из I с помощью параллельного сдвига. Поэтому, не умаляя общности, можем считать, что для тел X и I выполняются условия

$$qI \subset I \subset QI, \quad qI \subset X \subset QI, \tag{10}$$

и начало координат принадлежит телу I. Отсюда

$$\delta_B(X,I) \leq \rho_B(X,I) \leq \rho_B(qI,QI) \leq (Q-q)D_B(I),$$

где $D_B(I)$ — диаметр I, в M^n. При этом неравенство $\rho_B(X, I) \le \rho_B(qI, QI)$ является следствием (10) и определения расстояния между выпуклыми телами в M^n. Тогда из (9) и неравенства $D_B(I) \le 2R_I$ получаем

$$\delta_B(X, I) < 3C_1\varepsilon^{1/n}2R_I = C\varepsilon^{1/n},$$

где C зависит от n, r_I, R_I, а ε удовлетворяет неравенству (7).

Список литературы

1. *К. Лейхтвейс*, Выпуклые множества. Наука, Москва (1985), 336 с.
2. *В.И. Дискант*, Обобщение неравенств Боннезена.— Докл. АН СССР (1973), т. 213, № 3, с. 519–521.
3. *В.И. Дискант*, Обобщение неравенств Боннезена в геометрии Минковского.— Мат. физика, анализ, геометрия (1994), т. 1, № 3/4, с. 450–453.

Stability of solution of isoperimeter problem in Minkovsky's geometry

V.I. Diskant

Let X is a convex body in the n-dimensional Minkovsky's space M^n $(n \ge 2)$ with a symmetrical metric, B — normed body of M^n, I — isoperimetrix of M^n, $F_B(X)$ — area of the surface, $V_B(X)$ — volume of body X in M^n. The theorem was proved: there exist such values of $\varepsilon_0 > 0$, $C > 0$, depending on n, r_I, R_I, that if $F_B^n(X) - n^n V_B(I) V_B^{n-1}(X) < \varepsilon$, $0 \le \varepsilon < \varepsilon_0$, $V_B(X) = V_B(I)$ it follows that $\delta_B(X, I) < C\varepsilon^{1/n}$, where $\delta_B(X, I)$ is deviation of X and I in M^n, r_I — a capacity coefficient of B in I, R_I — scope coefficient of body I by body B.

Стабільність рішення ізопериметричної задачі Мінковського

В.І. Діскант

Нехай X — опукле тіло в n-вимірному просторі Мінковського M^n $(n \ge 2)$ з симетричною метрикою, B — нормувальне тіло M^n, I — ізопериметрикс M^n, $F_B(X)$ — площа поверхні, $V_B(X)$ — об'єм тіла X в M^n. Доведена теорема: знайдуться такі величини $\varepsilon_0 > 0$, $C > 0$, які залежать від n, r_I, R_I, що із здійснення умов $F_B^n(X) - n^n V_B(I) V_B^{n-1}(X) < \varepsilon$, $0 \le \varepsilon < \varepsilon_0$, $V_B(X) = V_B(I)$ випливає $\delta_B(X, I) < C\varepsilon^{1/n}$, де $\delta_B(X, I)$ — відхилення X та I в M^n, r_I — коефіцієнт місткості B в I, R_I — коефіцієнт охоплення тіла I тілом B.