Математическая физика, анализ, геометрия
1996, т. 3, № 3/4, с. 267-273

Экстремальные задачи для поверхностей ограниченной абсолютной средней интегральной кривизны в n-мерном пространстве

В. А. Долженков

Курский педагогический институт, Россия, 305416, г. Курск, ул. Радищева, 33

Статья поступила в редакцию 9 июня 1994 года

Доказан ряд неравенств, связывающих абсолютную среднюю интегральную кривизну гиперповерхности в n-мерном евклидовом пространстве с объемом и диаметром n-мерного тела. Центральную роль играет лемма о минимальности меры множества $(n-1)$-мерных плоскостей, которой обладает гиперсфера в множестве замкнутых гиперповерхностей, ограничивающих тела фиксированного объема.

В работе будут использованы следующие постоянные обозначения: σ_k — k-мерная плоскость в n-мерном евклидовом пространстве E^n; $dm(\sigma_k)$ — плотность множества плоскостей размерности k, $M_k(f, Q)$ — k-я абсолютная средняя интегральная кривизна гиперповерхности (f, Q) (см. [1]); O_k — площадь единичной k-мерной сферы.

Рассмотрим в E^n выпуклые гиперповерхности, ограничивающие тела фиксированного объема I_0. Из всего множества таких гиперповерхностей выделим те, которые не имеют большой меры множества пересекающих их гиперплоскостей. Для этого выберем достаточно большое число d и достаточно малое r и рассмотрим только те гиперповерхности, которые лежат внутри $(n-1)$-мерной сферы радиуса d и содержат сферу радиуса r. Множество выделенных выпуклых гиперповерхностей, ограничивающих тела с объемом I_0, обозначим через $\{F\}$. Остальные гиперповерхности имеют большую меру множества пересекающих их гиперповерхностей, и мы их не рассматриваем.

Множество $\{F\}$ и множество соответствующих им мер $\{m_F(\sigma_{n-1})\}$ равномерно ограничены, и поэтому в $\{m_F(\sigma_{n-1})\}$ существует точная нижняя грань

$m_0(\sigma_{n-1})$, а в $\{F\}$ — соответствующая гиперповерхность F_0 с минимальной мерой $m_0(\sigma_{n-1})$. Покажем, что F_0 — гиперсфера.

Лемма 1. *Мера множества $(n-1)$-мерных плоскостей, пересекающих n-мерное тело с заданным объемом, достигает минимума на n-мерном шаре с тем же объемом в пространстве E^n.*

Доказательство.

1. Для любого невыпуклого тела F существует выпуклое тело F^* с тем же объемом, но с меньшей мерой множества пересекающих его гиперплоскостей. Действительно, если F_0 — выпуклая оболочка F, то получим

$$I(F) < I(F_0),\quad m_F(\sigma_{n-1}) = m_{F_0}(\sigma_{n-1}).$$

Внутри F_0 возьмем выпуклое тело F^*, для которого

$$I(F^*) = I(F).$$

Очевидно, что $m_{F^*}(\sigma_{n-1}) < m_F(\sigma_{n-1})$. Таким образом, в дальнейшем можно рассматривать только выпуклые тела с данным объемом.

2. Пусть F_0 — выпуклое n-мерное тело с данным n-мерным объемом I_0 в E^n, для которого имеется минимум меры множества $(n-1)$-мерных плоскостей $m_0(\sigma_{n-1})$. Пусть произвольная плоскость σ_{n-1} рассекает F на две части F_1 и F_2 с равными объемами, т.е.

$$I(F_1) = I(F_2).$$

В этом случае

$$m_{F_1}(\sigma_{n-1}) = m_{F_2}(\sigma_{n-1}).$$

Действительно, предположим, что

$$m_{F_1}(\sigma_{n-1}) > m_{F_2}(\sigma_{n-1}). \tag{1}$$

Пусть $\overline{m}_i(\sigma_{n-1})$ — мера множества $(n-1)$-мерных плоскостей, пересекающих F_i и не пересекающих другую часть F_j, $i \neq j$, $i = 1,2$, $j = 1,2$; $m_{12}(\sigma_{n-1})$ — мера множества $(n-1)$-мерных плоскостей, пересекающих одновременно F_1 и F_2. Тогда

$$\overline{m}_1(\sigma_{n-1}) + m_{12}(\sigma_{n-1}) = m_{F_1}(\sigma_{n-1});$$

$$\overline{m}_2(\sigma_{n-1}) + m_{12}(\sigma_{n-1}) = m_{F_2}(\sigma_{n-1}).$$

Из (1) следует

$$\overline{m}_1(\sigma_{n-1}) > \overline{m}_2(\sigma_{n-1}). \tag{2}$$

Очевидно, что

$$m_F(\sigma_{n-1}) = \overline{m}_1(\sigma_{n-1}) + \overline{m}_2(\sigma_{n-1}) + m_{12}(\sigma_{n-1}). \tag{3}$$

Отобразим F_2 симметрично относительно σ_{n-1}. Получим тело $F^* = F_2 \bigcup F_2^*$, где F_2^* — образ F_2. Для F^* $I(F^*) = I(F)$ и

$$m_{F^*}(\sigma_{n-1}) \le 2\,\overline{m}_2(\sigma_{n-1}) + m_{12}(\sigma_{n-1}), \tag{4}$$

где знак равенства имеет место лишь в том случае, когда F^* — выпуклое тело.

Из (2)-(4) получим $m_{F^*}(\sigma_{n-1}) < m_0(\sigma_{n-1})$, что противоречит условию. Итак,

$$m_{F_1}(\sigma_{n-1}) = m_{F_2}(\sigma_{n-1}).$$

3. Все точки поверхности ∂F_0 — гладкие. Предположим, что в некоторой точке A нарушается условие гладкости. Тогда можно выбрать достаточно близкую к A точку B и через нее провести плоскость σ'_{n-1}, не проходящую через A, но разбивающую F_0 на две части F_1 и F_2 так, что

$$m_{F_1}(\sigma_{n-1}) = m_{F_2}(\sigma_{n-1}),\ I(F_1) = I(F_2).$$

Но симметричное отображение одной из частей F_1 или F_2 относительно σ'_{n-1} даст невыпуклое тело с тем же объемом и с меньшей величиной меры $m(\sigma_{n-1})$. Однако, согласно первому случаю, на F_0 тогда не достигается минимум меры $m(\sigma_{n-1})$, что противоречит условию. Таким образом, все точки поверхности F_0 — гладкие.

4. Пусть σ'_{n-1} разбивает F_0 на F'_1 и F'_2 так, что

$$I(F'_1) = I(F'_2),\ m_{F'_1}(\sigma_{n-1}) = m_{F'_2}(\sigma_{n-1}).$$

При этом σ'_{n-1} перпендикулярна всем касательным гиперплоскостям в точках сечения $F_0 \cap \sigma'_{n-1}$. Действительно, в противном случае симметричное отображение относительно σ'_{n-1} одной из частей F'_1 или F'_2 даст невыпуклое тело. Но тогда, согласно первому пункту, на F_0 не достигается минимум меры $m(\sigma_{n-1})$.

Пусть $\sigma^2_{n-1}, \dots, \sigma^n_{n-1}$ — плоскости, разбивающие F_0 на части F^i_1 и F^i_2 так, что

$$I(F^i_1) = I(F^i_2),\ m_{F^i_1}(\sigma_{n-1}) = m_{F^i_2}(\sigma_{n-1}), \sigma^i_{n-1} \perp \sigma^j_{n-1}, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, имеем n взаимно перпендикулярных плоскостей с общей точкой O.

Покажем, что сечение $\sigma^i_{n-1} \cap \partial F_0$ — сфера размерности $n-2$ с центром в точке O. Рассмотрим сечение $\sigma^1_{n-1} \cap \partial F_0$. Пересечение оставшихся плоскостей σ^i_{n-1}, $i = 2, 3, \dots, n$, определяет одномерный диаметр $[BD]$ (B, $D \in \partial F_0$), перпендикулярный σ^1_{n-1}. При вращении каждой из плоскостей σ^i_{n-1}, $i = 2, 3, \dots, n$, вокруг (BD) будем иметь $\sigma^i_{n-1} \perp \sigma^1_{n-1}$, σ^i_{n-1} перпендикулярна к касательной гиперплоскости σ^B_{n-1} в точке B. При этом и в любом новом положении плоскость σ^i_{n-1} будет делить F_0 на две части с равными объемами (в противном случае гиперплоскость, проходящая через B и делящая F_0 на две части с равными объемами, не будет перпендикулярна к касательной гиперплоскости σ^B_{n-1}).

На плоскости σ'_{n-1} тогда получим связку $(n-2)$-мерных плоскостей с общей точкой O от пересечения σ^1_{n-1} и σ^i_{n-1}. При этом $\partial F_0 \cap \sigma^1_{n-1}$ встречает эту связку под прямым углом, а следовательно, $\partial F_0 \cap \sigma^1_{n-1}$ — сфера размерности $n-2$ с центром в точке O, а тогда $F_0 \cap \sigma^1_{n-1}$ — $(n-1)$-мерный шар.

Аналогично, $\sigma^i_{n-1} \cap F_0$, $i = 2, 3, \dots, n$, — $(n-1)$-мерные шары с центром в точке O. Но тогда F_0 можно получить вращением $(n-1)$-мерного шара в плоскости σ^i_{n-1}, $i = 2, 3, \dots, n$, вокруг диаметра $[BD]$, а следовательно, F_0 — n-мерный шар с центром в точке O. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\{F\}$ — семейство замкнутых гиперповерхностей, ограничивающих в пространстве E^n тела данного объема I_0. Тогда гиперсфера с тем* *же объемом имеет наименьшую* $(n-2)$ *абсолютную среднюю интегральную кривизну* M_{n-2} *в данном семействе* $\{F\}$.

Доказательство. Так как (см. [1])

$$M_{n-2}(F) \geq \frac{O_0 O_1 O_{n-2}}{O_2} m_F(\sigma_{n-1}),$$

где знак равенства имеет место только в случае выпуклой гиперповерхности, то в $\{F\}$ можно рассматривать только выпуклые гиперповерхности. Согласно лемме 1, на гиперсфере из множества $\{F\}$ достигается минимум кривизны M_{n-2}, что требовалось доказать.

Теорема 1. *Пусть* F — *n-мерное тело,* ∂F — *его гиперповерхность в* E^n, $I(F)$ — *n-мерный объем тела* F, d — *внешний диаметр* F, $M_{n-2}(\partial F)$ — $(n-2)$ *абсолютная средняя интегральная кривизна. Тогда*

$$I(F) \leq \frac{1}{n\,2^{n-1}} M_{n-2}(\partial F) d^{n-1},$$

где знак равенства имеет место только в случае шара.

Доказательство. Рассмотрим множество $\{F\}$ n-мерных тел в E^n, каждое из которых имеет объем $I(F) = \mathrm{const}$. Обозначим n-мерный шар из этого множества через U. Тогда, в силу леммы 2,

$$M_{n-2}(\partial F) > M_{n-2}(\partial U). \tag{1}$$

Как известно (см. [2]),

$$d(F) > d(U). \tag{2}$$

Так как

$$I(U) = \frac{1}{n\,2^{n-1}} M_{n-2}(\partial U),$$

то, учитывая (1) и (2), получим

$$I(F) \leq \frac{1}{n\,2^{n-1}} M_{n-2}(\partial F) d^{n-1},$$

где знак равенства имеет место только для шара.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В теореме 1 можно увеличить число неравенств. Если $0 \le \tau \le n$, то

$$I(F) \le \frac{1}{n\,2^{n-\tau} O^{\tau-1}_{n-1}} M^{\tau}_{n-2}(\partial F)\, d^{\,n-\tau},$$

где равенство достигается только для шара.

Теорема 2. *Пусть F — n-мерное тело, ∂F — его гиперповерхность в E^n, $I(F)$ — объем, d — внешний диаметр F. Тогда*

$$I(F) \le \frac{1}{r\,2^{r-1}} \frac{O_{r-1} O_{n-r+2}}{O_{n-1} O_2} M_{r-2}(\partial F)\, d^{\,r-1},$$

где знак равенства имеет место только для шара, $r = 3, 4, \ldots, n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 1, для r-мерного сечения $F \cap \sigma_r$

$$I_r(F \cap \sigma_r) \le \frac{1}{r\,2^{r-1}} M^{r}_{r-2}(\partial F \cap \sigma_r)\, d^{\,r-1}(F \cap \sigma_r).$$

Интегрируя обе части неравенства по всем r-мерным плоскостям σ_r, пересекающим F, и учитывая равенства (см. [1,3]), имеем

$$\int\limits_{\partial F \cap \sigma_r \ne \emptyset} M^{r}_{r-2}(\partial F \cap \sigma_r)\, dm(\sigma_r) = \frac{O_{n-2} \cdots O_{n-r} O_{n-r+2}}{O_{r-2} \cdots O_0 O_2} M_{r-2}(\partial F),$$

$$\int\limits_{F \cap \sigma_r \ne \emptyset} I_r(F \cap \sigma_r)\, dm(\sigma_r) = \frac{O_{n-1} \cdots O_{n-r}}{O_{r-1} \cdots O_0} I(F)$$

и получаем требуемое неравенство. Теорема доказана.

Список литературы

1. *В. А. Долженков*, О средней кривизне поверхности в n-мерном пространстве. 3. Деп. в ВИНИТИ, № 4158-В91 (1991), 22 с.
2. *Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер*, Геометрические неравенства, Ленинград (1980), 288 с.
3. *Л. Сантало*, Интегральная геометрия и геометрические вероятности, Москва (1983), 358 с.

Extremal problems for surfaces with bounded absolute (total) mean integral curvature in n-dimensional space

V. A. Dolzhenkov

Some inequalities are proved which relate the absolute mean integral curvature of hypersurface in n-dimensional Euclidean space with the volume and diameter of n-dimensional body are proved. Lemma of minimality of measure of $(n-1)$-dimensional planes set is the focus of attention: hypersphere as the element of set of closed hypersurfaces, bounding the body of fixed volume, has this property.

Екстремальні задачі для поверхонь обмеженої абсолютної середньої інтегральної кривини у n-вимірному просторі

В. А. Долженков

Доведено ряд нерівностей, зв'язуючих абсолютну середню інтегральну кривину гіперповерхні у n-вимірному евклідовому просторі з об'ємом і діаметром n-вимірного тіла. Центральну роль відіграє лема про мінімальність міри множини $(n-1)$-вимірних площин, яку має гіперсфера в множині замкнених гіперповерхонь, що обмежують тіла фіксованого об'єму.