Математическая физика, анализ, геометрия
1996, т. 3, № 3/4, с. 274-289

Классификация пуассоновых однородных пространств компактной группы Пуассона-Ли

Е. А. Каролинский

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 24 сентября 1996 года

Дана классификация пуассоновых однородных пространств со связными стационарными подгруппами компактной группы Пуассона–Ли K (со стандартной r-матричной пуассоновой структурой). Перечислены связные замкнутые подгруппы $H \subset K$ такие, что на K/H существует пуассонова структура, согласованная с действием K. Дана геометрическая интерпретация некоторых пуассоновых однородных K-пространств.

Введение

Пусть K – группа Пуассона-Ли, $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}\, K$. В работе В. Г. Дринфельда [1] установлена естественная биекция между классами изоморфизма пуассоновых однородных K-пространств со связными стационарными подгруппами и классами K-сопряженности лагранжевых (т.е. являющихся максимальными изотропными относительно естественного скалярного произведения подпространствами) подалгебр $\mathfrak{l}$ дубля $D(\mathfrak{k})$ таких, что связная подгруппа $H \subset K$, соответствующая подалгебре Ли $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{k} \subset \mathfrak{k}$, замкнута.

Пусть теперь K – связная компактная группа Ли, наделенная стандартной r-матричной структурой группы Пуассона-Ли. В настоящей работе лагранжевы подалгебры в $D(\mathfrak{k})$ полностью классифицированы с точностью до присоединенного действия группы K. Тем самым получена классификация пуассоновых однородных K-пространств со связными стационарными подгруппами с точностью до изоморфизма.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \otimes_R C$ ($\mathfrak{g}$ – комплексная редуктивная алгебра Ли), τ – антилинейная инволюция в $\mathfrak{g}$ такая, что $\mathfrak{g}^\tau = \mathfrak{k}$, $\langle \cdot , \cdot \rangle$ – невырожденная симметрическая инвариантная билинейная форма на $\mathfrak{g}$, положительно определенная на $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$.

Работа выполнена при поддержке INTAS (грант 94-4720).

В разд. 1 настоящей работы описана структура группы Пуассона-Ли на K. В разд. 2 установлено взаимно однозначное соответствие между лагранжевыми подалгебрами в $D(\mathfrak{k})$ и парами $(\mathfrak{c}, \varphi)$, где $\mathfrak{c}$ – коизотропная относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$ подалгебра в $\mathfrak{g}$, а $\varphi : \mathfrak{c}/\mathfrak{c}^{\perp} \to \mathfrak{c}/\mathfrak{c}^{\perp}$ – антилинейный автоморфизм алгебр Ли такой, что $\varphi^2 = 1$, $\langle\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\rangle = \overline{\langle\alpha, \beta\rangle}$ при $\alpha, \beta \in \mathfrak{c}/\mathfrak{c}^{\perp}$. В разд. 3 классифицированы с точностью до K-сопряжения коизотропные подалгебры в $\mathfrak{g}$. В разд. 4 описание лагранжевых подалгебр, соответствующих паре $(\mathfrak{c}, \varphi)$ с фиксированной подалгеброй $\mathfrak{c}$, сведено к описанию самосопряженных относительно эрмитовой формы $(a, b)_{\tau} := \langle a, \tau(b)\rangle$ автоморфизмов полупростых алгебр Ли. Раздел 5 посвящен классификации таких автоморфизмов, тем самым получается классификация лагранжевых подалгебр в $D(\mathfrak{k})$. Кроме того, в разд. 6 перечислены связные замкнутые подгруппы $H \subset K$, для которых на K/H существует скобка Пуассона такая, что действие K на K/H пуассоново. В разд. 7 дана геометрическая интерпретация некоторых пуассоновых однородных K-пространств. А именно, построено пуассоново многообразие Θ вместе с пуассоновым действием группы K такое, что орбиты этого действия – пуассоновы однородные K-пространства, причем разные орбиты не изоморфны между собой (в случае, когда группа K наделена нулевой скобкой Пуассона, аналогом Θ является двойственное пространство $\mathfrak{k}^*$ со скобкой Кириллова, снабженное коприсоединенным действием K).

Формулировки основных результатов содержатся в краткой заметке автора [2].

Автор глубоко благодарен В. Г. Дринфельду за постановку задачи и руководство работой, а также Л. Л. Ваксману за внимание к работе.

1. Напомним описание "стандартной" пуассоновой структуры на группе K. Зафиксируем максимальную коммутативную подалгебру $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$. Пусть $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} + i\mathfrak{t}$ ($\mathfrak{h}$ – картановская подалгебра в $\mathfrak{g}$), R – система корней $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$, R_+ – множество положительных корней относительно некоторой системы простых корней $\Gamma \subset R$, $\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \in R_-} \mathfrak{g}_{\alpha}$, $\mathfrak{n}_- = \bigoplus_{\alpha \in R_+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$.

Положим $r = i\left(\frac{1}{2} t_0 + t_1\right)$, где тензор $t = t_0 + t_1 + t_2 \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ соответствует билинейной форме $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $t_0 \in \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$, $t_1 \in \mathfrak{n}_+ \otimes \mathfrak{n}_-$, $t_2 \in \mathfrak{n}_- \otimes \mathfrak{n}_+$. Пусть $r = r_{\mathrm{sym}} + r_{\mathrm{alt}}$, где r_{sym} симметричен, а r_{alt} кососимметричен. Так как r удовлетворяет классическому уравнению Янга-Бакстера (см. [3, §4]), а $r_{\mathrm{alt}} \in \mathfrak{k} \otimes \mathfrak{k}$, то формула Склянина

$$\{\varphi, \psi\} = r^{\mu\nu}(\partial'_{\mu}\varphi \cdot \partial'_{\nu}\psi - \partial_{\mu}\varphi \cdot \partial_{\nu}\psi), \tag{1}$$

где φ, $\psi \in C^\infty(K)$, $r^{\mu\nu}$ – компоненты r в базисе $\{ e_\mu \}$ алгебры $\mathfrak{k}$, а ∂_μ (соответственно ∂'_μ) – дифференцирование вдоль правоинвариантного (соответственно левоинвариантного) векторного поля на K, значение которого в единице равно e_μ, определяет на K структуру группы Пуассона-Ли. Соответствующая структура биалгебры Ли на $\mathfrak{k}$ определяется тройкой Манина $(\mathfrak{g}_R, \mathfrak{k}, i\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}_+)$, где $\mathfrak{g}_R$ – это $\mathfrak{g}$, рассматриваемая как вещественная алгебра Ли, относительно скалярного произведения $(\cdot, \cdot) = -2\,\mathrm{Im}\langle \cdot, \cdot \rangle$ (см. [4, §4]). В частности, $D(\mathfrak{k}) = \mathfrak{g}_R$, где $D(\mathfrak{k})$ – дубль биалгебры Ли $\mathfrak{k}$.

2. Пусть $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}_R$ – лагранжева подалгебра. Положим $\mathfrak{c} = \mathfrak{l} + i\mathfrak{l}$. Тогда $\mathfrak{c}$ – подалгебра в $\mathfrak{g}$. Обозначим через $\mathfrak{c}^\perp$ ортогональное дополнение к $\mathfrak{c}$ в $\mathfrak{g}$ относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Предложение 2.1. $\mathfrak{c}^\perp \subset \mathfrak{c}$, *т.е.* $\mathfrak{c}$ *– коизотропная подалгебра в* $\mathfrak{g}$.

Доказательство. Пусть $a \in \mathfrak{c}^\perp$. Тогда $\langle a, b \rangle = 0$ для всех $b \in \mathfrak{c}$. В частности, для любого $b \in \mathfrak{l}$ $(a, b) = -2\,\mathrm{Im}\langle a, b \rangle = 0$, а значит, $a \in \mathfrak{l} \subset \mathfrak{c}$. ■

Следствие. $\mathfrak{c}^\perp$ *– идеал в* $\mathfrak{c}$. ■

Определим антилинейное отображение $\varphi: \mathfrak{c}/\mathfrak{c}^\perp \to \mathfrak{c}/\mathfrak{c}^\perp$ формулой $\varphi([a + ib]) = [a - ib]$, где a, $b \in \mathfrak{l}$, $[a + ib]$ (соответственно $[a - ib]$) – это образ $a + ib$ (соответственно $a - ib$) в $\mathfrak{c}/\mathfrak{c}^\perp$. Заметим, что φ определен корректно: если $a + ib \in \mathfrak{c}^\perp$, то для любых c, $d \in \mathfrak{l}$ $\langle a + ib, c + id \rangle = \langle a, c \rangle - \langle b, d \rangle + i\langle b, c \rangle + i\langle a, d \rangle = 0$. Но так как $a, b, c, d \in \mathfrak{l}$, то $\langle a, c \rangle$, $\langle b, d \rangle$, $\langle b, c \rangle$, $\langle a, d \rangle \in \mathbb{R}$. А значит, $\langle a - ib, c - id \rangle = \langle a, c \rangle - \langle b, d \rangle - i\langle b, c \rangle - i\langle a, d \rangle = \overline{\langle a + ib, c + id \rangle} = 0$, т.е. $a - ib \in \mathfrak{c}^\perp$.

Предложение 2.2. φ *– антилинейный автоморфизм алгебр Ли такой, что* $\varphi^2 = 1$ *и* $\langle \varphi(\alpha), \varphi(\beta) \rangle = \overline{\langle \alpha, \beta \rangle}$, *где* α, $\beta \in \mathfrak{c}/\mathfrak{c}^\perp$, *а* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *индуцирована в* $\mathfrak{c}/\mathfrak{c}^\perp$ *с алгебры Ли* $\mathfrak{c}$.

Доказательство. То, что φ – гомоморфизм алгебр Ли и $\varphi^2 = 1$, очевидно. Далее, пусть α, $\beta \in \mathfrak{c}/\mathfrak{c}^\perp$, $\alpha = [a + ib]$, $\beta = [c + id]$, где $a, b, c, d \in \mathfrak{l}$. Тогда $\langle \varphi(\alpha), \varphi(\beta) \rangle = \langle a - ib, c - id \rangle = \overline{\langle a + ib, c + id \rangle} = \overline{\langle \alpha, \beta \rangle}$. ■

Пусть теперь $\mathfrak{c}$ – коизотропная подалгебра в $\mathfrak{g}$, а $\varphi : \mathfrak{c}/\mathfrak{c}^{\perp} \to \mathfrak{c}/\mathfrak{c}^{\perp}$ таков, как в предложении 2.2. Положим $\mathfrak{l}(\mathfrak{c}, \varphi) = \{ a \in \mathfrak{c} \mid \varphi([a]) = [a] \}$.

Предложение 2.3. $\mathfrak{l}(\mathfrak{c}, \varphi)$ *– лагранжева подалгебра в* $\mathfrak{g}_R$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}(\mathfrak{c}, \varphi)$. Так как $\mathfrak{c}$ – подалгебра в $\mathfrak{g}$, а φ – гомоморфизм алгебр Ли, то $\mathfrak{l}$ – подалгебра в $\mathfrak{g}_R$.

Покажем, что $\mathfrak{l}$ – лагранжева подалгебра. Пусть $a, b \in \mathfrak{l}$. Тогда $\langle a, b\rangle = \langle [a], [b]\rangle = \langle \varphi([a]), \varphi([b])\rangle = \overline{\langle a, b\rangle}$, т.е. $(a, b) = -2\,\mathrm{Im}\langle a, b\rangle = 0$. Вычислим теперь размерность $\mathfrak{l}$: $\dim_R \mathfrak{l} = 2\dim_C \mathfrak{c}^{\perp} + \dim_C(\mathfrak{c}/\mathfrak{c}^{\perp}) = \dim_C \mathfrak{c}^{\perp} + \dim_C \mathfrak{c} = \dim_C \mathfrak{g} = \frac{1}{2}\dim_R \mathfrak{g}_R$. Итак, $\mathfrak{l}$ – лагранжева подалгебра. ■

Следствие. *Имеется биекция между множеством лагранжевых подалгебр в* $\mathfrak{g}_R$ *и множеством пар* $(\mathfrak{c}, \varphi)$, *где* $\mathfrak{c}$ *– коизотропная относительно* $\langle\cdot, \cdot\rangle$ *подалгебра в* $\mathfrak{g}$, $\varphi : \mathfrak{c}/\mathfrak{c}^{\perp} \to \mathfrak{c}/\mathfrak{c}^{\perp}$ *– антилинейный автоморфизм алгебр Ли с условиями* $\varphi^2 = 1$, $\langle\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\rangle = \overline{\langle\alpha, \beta\rangle}$ *при* $\alpha, \beta \in \mathfrak{c}/\mathfrak{c}^{\perp}$. *При этой биекции паре* $(\mathfrak{c}, \varphi)$ *соответствует лагранжева подалгебра* $\mathfrak{l}(\mathfrak{c}, \varphi)$. *Эта биекция K-эквивариантна относительно действия K сопряжениями.* ■

Замечание. Пусть E – конечномерное комплексное линейное пространство, наделенное невырожденной симметрической билинейной формой $\langle\cdot, \cdot\rangle$. Наделим овеществление E_R билинейной формой $(\cdot, \cdot) = -2\,\mathrm{Im}\langle\cdot, \cdot\rangle$. Совершенно аналогично устанавливается биекция между множеством лагранжевых подпространств в E_R и множеством пар $(\mathfrak{c}, \varphi)$, где $\mathfrak{c}$ – коизотропное подпространство в E, $\varphi : \mathfrak{c}/\mathfrak{c}^{\perp} \to \mathfrak{c}/\mathfrak{c}^{\perp}$ – антилинейно, $\varphi^2 = 1$, $\langle\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\rangle = \overline{\langle\alpha, \beta\rangle}$ при $\alpha, \beta \in \mathfrak{c}/\mathfrak{c}^{\perp}$.

3. Опишем классы K-сопряженности коизотропных подалгебр в $\mathfrak{g}$. Нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты.

Теорема 3.1. (Карпелевич [5], см. также [6, гл. 6, теорема 1.8]). *Максимальная собственная подалгебра полупростой комплексной алгебры Ли либо полупроста, либо параболична.* ■

Следствие. *Пусть* $\mathfrak{a}$ *– комплексная полупростая алгебра Ли, наделенная невырожденной инвариантной симметрической билинейной формой* b, *положительно определенной на максимальной компактной подалгебре* $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{a}$. *Пусть* $\mathfrak{c}$ *– коизо-*

тропная относительно b подалгебра в $\mathfrak{a}$, не содержащаяся ни в какой собственной параболической подалгебре в $\mathfrak{a}$. Тогда $\mathfrak{c}=\mathfrak{a}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{c}\neq\mathfrak{a}$. Тогда найдется полупростая подалгебра $\mathfrak{a}'\subset\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'\neq\mathfrak{a}$ такая, что $\mathfrak{c}\subset\mathfrak{a}'$. Подалгебра $\mathfrak{a}'$ также коизотропна. С другой стороны, сопрягая $\mathfrak{a}'$ элементом группы $\operatorname{Int}\mathfrak{k}$, можно добиться того, чтобы $\mathfrak{a}'\cap\mathfrak{k}\neq 0$, и в силу того, что форма b положительно определена на $\mathfrak{k}$, $(\mathfrak{a}'\cap\mathfrak{k})^{\perp}$ не содержится в $\mathfrak{a}'$, что невозможно. Итак, $\mathfrak{c}=\mathfrak{a}$. ■

Пусть $\Delta\subset\Gamma$, $[\Delta]:=\{\alpha\in R\mid$ в разложение α по Γ входят только корни из $\Delta\}$, $\mathfrak{h}_\Delta:=\bigoplus_{\alpha\in\Delta}[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]$, $\mathfrak{n}_\Delta:=\bigoplus_{\alpha\in R_+\setminus[\Delta]}\mathfrak{g}_\alpha$, $\mathfrak{a}_\Delta:=\mathfrak{h}_\Delta\oplus(\bigoplus_{\alpha\in[\Delta]}\mathfrak{g}_\alpha)$, $\mathfrak{z}_\Delta$ – ортогональное дополнение к $\mathfrak{h}_\Delta$ в $\mathfrak{h}$ относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Тогда $\mathfrak{p}_\Delta:=\mathfrak{a}_\Delta\oplus\mathfrak{n}_\Delta\oplus\mathfrak{z}_\Delta$ – параболическая подалгебра в $\mathfrak{g}$. Хорошо известно, что любая параболическая подалгебра в $\mathfrak{g}$ K-сопряжена единственной подалгебре вида $\mathfrak{p}_\Delta$.

Пусть V – коизотропное подпространство в $\mathfrak{z}_\Delta$. Положим $\mathfrak{c}_{\Delta,V}:=\mathfrak{a}_\Delta\oplus\mathfrak{n}_\Delta\oplus V$. Легко видеть, что $\mathfrak{c}_{\Delta,V}$ – подалгебра в $\mathfrak{g}$ и что $\mathfrak{c}^{\perp}_{\Delta,V}=\mathfrak{n}_\Delta\oplus V^{\perp}$, т.е. $\mathfrak{c}_{\Delta,V}$ коизотропна.

Теорема 3.2. *Любая коизотропная подалгебра в $\mathfrak{g}$ K-сопряжена единственной подалгебре вида $\mathfrak{c}_{\Delta,V}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{c}$ – коизотропная подалгебра в $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{p}$ – минимальная параболическая подалгебра, содержащая $\mathfrak{c}$. Сопрягая элементом группы K, можно считать, что $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_\Delta$, где $\Delta\subset\Gamma$. Тогда $\mathfrak{n}_\Delta=\mathfrak{p}_\Delta^{\perp}\subset\mathfrak{c}^{\perp}\subset\mathfrak{c}\subset\mathfrak{p}_\Delta$. Пусть $\mathfrak{g}_\Delta=\mathfrak{p}_\Delta/\mathfrak{n}_\Delta=\mathfrak{a}_\Delta\oplus\mathfrak{z}_\Delta$, $\mathfrak{c}'=\mathfrak{c}/\mathfrak{n}_\Delta$. Очевидно, что $\mathfrak{c}'$ – коизотропная подалгебра в $\mathfrak{g}_\Delta$.

Пусть π – проекция $\mathfrak{g}_\Delta$ на $\mathfrak{a}_\Delta$ вдоль $\mathfrak{z}_\Delta$, пусть $\mathfrak{c}''=\pi(\mathfrak{c}')$. Тогда $\mathfrak{c}''$ – коизотропная подалгебра в $\mathfrak{a}_\Delta$, не содержащаяся ни в какой собственной параболической подалгебре в $\mathfrak{a}_\Delta$. Поэтому $\mathfrak{c}''=\mathfrak{a}_\Delta$.

Теперь, поскольку $\mathfrak{z}_\Delta$ – центр $\mathfrak{g}_\Delta$, то $\mathfrak{c}'\supset[\pi(\mathfrak{c}'),\pi(\mathfrak{c}')]=[\mathfrak{c}'',\mathfrak{c}'']=[\mathfrak{a}_\Delta,\mathfrak{a}_\Delta]=$ $=\mathfrak{a}_\Delta$, и поэтому $\mathfrak{c}'=\mathfrak{a}_\Delta\oplus V$, где V коизотропно в $\mathfrak{z}_\Delta$. Отсюда $\mathfrak{c}=\mathfrak{n}_\Delta\oplus\mathfrak{a}_\Delta\oplus V=$ $=\mathfrak{c}_{\Delta,V}$.

Пусть теперь $\mathfrak{c}_{\Delta_2, V_2} = \mathrm{Ad}_g(\mathfrak{c}_{\Delta_1, V_1})$, где $g \in K$. Докажем, что $\Delta_1 = \Delta_2$, $V_1 = V_2$. Так как $\mathfrak{n}_{\Delta_i}$ – нильрадикал в $\mathfrak{c}_{\Delta_i, V_i}$ $(i = 1, 2)$, то $\mathfrak{n}_{\Delta_2} = \mathrm{Ad}_g(\mathfrak{n}_{\Delta_1})$, а значит, и $\mathfrak{p}_{\Delta_2} = \mathrm{Ad}_g(\mathfrak{p}_{\Delta_1})$ (так как $\mathfrak{n}_{\Delta_i} = \mathfrak{p}_{\Delta_i}^{\perp}$, $i = 1, 2$). Поэтому $\Delta_1 = \Delta_2$. Пусть $\Delta := \Delta_1 = \Delta_2$. Пусть G – комплексификация группы K. Заметим, что нормализатор $\mathfrak{p}_\Delta$ в группе G равен P_Δ, где P_Δ – параболическая подгруппа в G такая, что $\mathrm{Lie}\, P_\Delta = \mathfrak{p}_\Delta$ (см. [6, гл. 6, теорема 1.5]). Поэтому $g \in P_\Delta$. Так как $g \in K$, то $\mathrm{Ad}_g(\tau(\mathfrak{p}_\Delta)) = \tau(\mathfrak{p}_\Delta)$, а значит, $g \in \tau(P_\Delta)$ (в последнем случае τ обозначает инволюцию в G, соответствующую инволюции $\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$). Итак, $g \in P_\Delta \cap \tau(P_\Delta)$. Из разложения Леви для P_Δ следует, что $P_\Delta \cap \tau(P_\Delta)$ – связная подгруппа Ли в G; ее алгебра Ли – это $\mathfrak{a}_\Delta \oplus \mathfrak{z}_\Delta$. Поэтому Ad_g индуцирует внутренний автоморфизм редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{a}_\Delta \oplus \mathfrak{z}_\Delta$, и так как $\mathfrak{z}_\Delta$ – ее центр, то $\mathrm{Ad}_g|_{\mathfrak{z}_\Delta} = \mathrm{id}$. Следовательно, $V_1 = V_2$. ■

Описание коизотропных подалгебр в $\mathfrak{g}$, данное в теореме 3.2, хорошо известно (например, в [7] оно приводится без доказательства).

4. Пусть снова $\Delta \subset \Gamma$. Сведем описание лагранжевых подалгебр в $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, соответствующих фиксированной коизотропной подалгебре $\mathfrak{c}_{\Delta, V} \subset \mathfrak{g}$, к описанию некоторого класса автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{a}_\Delta$.

Обозначим через $\mathrm{Aut}\, \mathfrak{a}_\Delta$ группу автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{a}_\Delta$, ортогональных относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Группу внутренних автоморфизмов произвольной алгебры Ли $\mathfrak{a}$ обозначим $\mathrm{Int}\, \mathfrak{a}$. Заметим, что так как $\tau(\mathfrak{a}_\Delta) = \mathfrak{a}_\Delta$, то τ определяет компактную вещественную форму $\mathfrak{k}_\Delta \subset \mathfrak{a}_\Delta$. Положим $\Theta_\Delta := \{ \theta \in \mathrm{Aut}\, \mathfrak{a}_\Delta \mid (\tau\theta)^2 = 1 \}$. Пусть $\theta \in \Theta_\Delta$, $\mathfrak{l}_0$ – вещественное лагранжево относительно $(\cdot, \cdot)$ подпространство в $\mathfrak{z}_\Delta$. Положим

$$\mathfrak{l}(\Delta, \theta, \mathfrak{l}_0) := \mathfrak{l}_0 \oplus \{ a \in \mathfrak{n}_\Delta \oplus \mathfrak{a}_\Delta \mid (\tau\theta)(\bar{a}) = \bar{a} \},$$

где $\bar{a}$ – это проекция a на $\mathfrak{a}_\Delta$ вдоль $\mathfrak{n}_\Delta$.

Теорема 4.1. 1) $\mathfrak{l}(\Delta, \theta, \mathfrak{l}_0)$ *– лагранжева подалгебра в* $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

2) *Любая лагранжева подалгебра в* $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ *K-сопряжена подалгебре* $\mathfrak{l}(\Delta, \theta, \mathfrak{l}_0)$ *для подходящих* Δ, θ, $\mathfrak{l}_0$.

3) *Подалгебры* $\mathfrak{l}(\Delta, \theta, \mathfrak{l}_0)$ *и* $\mathfrak{l}(\Delta', \theta', \mathfrak{l}_0')$ *K-сопряжены тогда и только тогда, когда* $\Delta = \Delta'$, $\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{l}_0'$, *а* θ *и* θ' *сопряжены элементом группы* $\mathrm{Int}\, \mathfrak{k}_\Delta$.

4) *Подалгебра* $\mathfrak{l}(\Delta, \theta, \mathfrak{l}_0) \cap \mathfrak{k} \subset \mathfrak{k}$ *соответствует замкнутой подгруппе в* K *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{l}_0 \cap \mathfrak{t}$ *– алгебра Ли замкнутой подгруппы максимального тора* $T \subset K$, *соответствующего* $\mathfrak{t}$.

З а м е ч а н и е. Подпространство $V \subset \mathfrak{t}$ соответствует замкнутой подгруппе тора T тогда и только тогда, когда V определено над Q (т.е. в базисе $\mathfrak{t}$, состоящем из элементов $2\pi i\check{\alpha}$, $\alpha \in \Gamma$, V должно задаваться системой линейных уравнений с коэффициентами из Q).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4.1. 1) Покажем, что $\mathfrak{l}(\Delta, \theta, \mathfrak{l}_0) = \mathfrak{l}(\mathfrak{c}, \varphi)$ для подходящих $\mathfrak{c}$ и φ. Согласно замечанию в конце разд. 2, $\mathfrak{l}_0 = \{ a \in V \mid \varphi_0([a]) = [a] \}$ для подходящего коизотропного подпространства $V \subset \mathfrak{z}_\Delta$ и антилинейного $\varphi_0 : V/V^\perp \to V/V^\perp$ такого, что $\varphi_0^2 = 1$, $\langle \varphi_0(\alpha), \varphi_0(\beta) \rangle = \overline{\langle \alpha, \beta \rangle}$ при $\alpha, \beta \in V/V^\perp$. Теперь положим $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_{\Delta, V} = \mathfrak{a}_\Delta \oplus \mathfrak{n}_\Delta \oplus V$ и определим $\varphi : \mathfrak{a}_\Delta \oplus V/V^\perp \to \mathfrak{a}_\Delta \oplus V/V^\perp$ формулами $\varphi|_{\mathfrak{a}_\Delta} = \tau\theta$, $\varphi|_{V/V^\perp} = \varphi_0$. Очевидно, что эти $\mathfrak{c}$ и φ – искомые.

2) Пусть $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}(\mathfrak{c}, \varphi)$ – лагранжева подалгебра в $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. Тогда $\mathfrak{c}$ K-сопряжена подалгебре вида $\mathfrak{c}_{\Delta, V}$, и поэтому $\mathfrak{l}$ K-сопряжена $\mathfrak{l}(\Delta, \theta, \mathfrak{l}_0)$ для подходящих θ и $\mathfrak{l}_0$.

3) Это очевидно следует из следствия после предложения 2.3 и теоремы 3.2.

4) Достаточно заметить, что $\mathfrak{l}(\Delta, \theta, \mathfrak{l}_0) \cap \mathfrak{k} = (\mathfrak{l}_0 \cap \mathfrak{t}) \oplus (\mathfrak{a}_\Delta^\theta \cap \mathfrak{k})$, где $\mathfrak{a}_\Delta^\theta = \{ a \in \mathfrak{a}_\Delta \mid \theta(a) = a \}$, и что $\mathfrak{a}_\Delta^\theta \cap \mathfrak{k}$ всегда соответствует замкнутой подгруппе в K. ■

5. В силу теоремы 4.1, для завершения классификации пуассоновых однородных K-пространств со связными стационарными подгруппами осталось описать классы $\mathrm{Int}\, \mathfrak{k}_\Delta$-сопряженности автоморфизмов из Θ_Δ, $\Delta \subset \Gamma$.

Пусть $\mathrm{Aut}\, \Delta$ – группа перестановок Δ, сохраняющих скалярные произведения корней, $\pi : \mathrm{Aut}\, \mathfrak{a}_\Delta \to \mathrm{Aut}\, \Delta$ – канонический гомоморфизм. Так как $\pi(\tau\theta\tau) = \pi(\theta)$, то равенство $(\tau\theta)^2 = 1$, где $\theta \in \mathrm{Aut}\, \mathfrak{a}_\Delta$, влечет $\pi(\theta)^2 = 1$.

Пусть теперь $\sigma \in \mathrm{Aut}\,\Delta$, $\sigma^2 = 1$. Положим $\Theta_{\Delta,\sigma} := \{\,\theta \in \pi^{-1}(\sigma) \mid (\tau\,\theta)^2 = 1\,\}$. Опишем классы $\mathrm{Int}\,\mathfrak{k}_\Delta$-сопряженности элементов $\Theta_{\Delta,\sigma}$.

Зафиксируем каноническую систему образующих e_i, f_i, h_i алгебры $\mathfrak{a}_\Delta$ такую, что $\tau(e_i) = -f_i$. Определим $\tilde\sigma \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{a}_\Delta$ формулами $\tilde\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$, $\tilde\sigma(f_i) = f_{\sigma(i)}$, $\tilde\sigma(h_i) = h_{\sigma(i)}$. Пусть $\mathfrak{h}^\sigma_\Delta := \{x \in \mathfrak{h}_\Delta \mid \tilde\sigma\,(x) = x\}$, $H^\sigma_\Delta := \{\exp(\mathrm{ad}\,x) \mid x \in \mathfrak{h}^\sigma_\Delta\} \subset \mathrm{Aut}\,\mathfrak{a}_\Delta$, $H^\sigma_{\Delta,R} := \{h \in H^\sigma_\Delta \mid \tau h\,\tau = h^{-1}\}$ ($H^\sigma_{\Delta,R}$ – это группа R-точек вещественного расщепимого тора). Очевидно, что $\tilde\sigma\,H^\sigma_{\Delta,R} \subset \Theta_{\Delta,\sigma}$.

Теорема 5.1. *Если* $\theta \in \Theta_{\Delta,\sigma}$, *то найдется* $g \in \mathrm{Int}\,\mathfrak{k}_\Delta$ *такой, что* $g\cdot\theta\cdot g^{-1} \in \tilde\sigma\,H^\sigma_{\Delta,R}$.

Доказательство. Рассмотрим $\mathfrak{a}^\theta_\Delta = \{\,a \in \mathfrak{a}_\Delta \mid \theta(a) = a\,\}$. Так как $(\tau\theta)^2 = 1$, то $\tau(\mathfrak{a}^\theta_\Delta) = \mathfrak{a}^\theta_\Delta$. Поэтому в $\mathfrak{a}^\theta_\Delta$ можно выбрать τ-инвариантную картановскую подалгебру $\tilde{\mathfrak{h}}$. Пусть $\mathfrak{h}'$ – это централизатор $\tilde{\mathfrak{h}}$ в $\mathfrak{a}_\Delta$. Тогда $\mathfrak{h}'$ – картановская подалгебра в $\mathfrak{a}_\Delta$, инвариантная относительно τ и θ (см. [6, гл. 3, теорема 3.13]). Рассмотрим корневое разложение $\mathfrak{a}_\Delta$ относительно $\mathfrak{h}'$. Найдется система простых корней Δ', инвариантная относительно θ (см. [6, гл. 3, теорема 3.13]). Существует $g \in \mathrm{Int}\,\mathfrak{k}_\Delta$ такой, что $g(\mathfrak{h}') = \mathfrak{h}_\Delta$ и $g^* : \mathfrak{h}^*_\Delta \to (\mathfrak{h}')^*$ переводит Δ в Δ'. Поэтому можно, не ограничивая общности, считать, что $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_\Delta$, $\Delta' = \Delta$. Тогда $\theta = \tilde\sigma\cdot h$, $h \in H_\Delta := \{\,\exp(\mathrm{ad}\,x) \mid x \in \mathfrak{h}_\Delta\,\}$. Так как $(\tau\theta)^2 = 1$, то $\tau h\,\tau = \tilde\sigma h^{-1}\tilde\sigma$.

Если $g \in H_\Delta$, то $g\theta\,g^{-1} = \tilde\sigma h'$, где $h' = (\tilde\sigma\,g\,\tilde\sigma)g^{-1}\,h$. Покажем, что найдется $g \in H_\Delta \cap \mathrm{Int}\,\mathfrak{k}_\Delta$ такой, что $h' \in H^\sigma_{\Delta,R}$. Отождествим H_Δ с $(C^*)^{|\Delta|}$, сопоставив элементу $h \in H_\Delta$ набор $a_\alpha(h)$, $\alpha \in \Delta$, где $a_\alpha(h)$ – собственное значение h в корневом подпространстве $\mathfrak{g}_\alpha$. Тогда $a_\alpha(\tilde\sigma\,h\,\tilde\sigma) = a_{\sigma(\alpha)}(h)$, $a_\alpha(\tau\,h\,\tau) = \overline{a_\alpha(h)}^{\,-1}$. Остается проверить, что если $a_\alpha \in C^*$, $\alpha \in \Delta$, $\bar a_\alpha = a_{\sigma(\alpha)}$, то найдутся $b_\alpha \in C^*$, $\alpha \in \Delta$, такие, что $|\,b_\alpha| = 1$ и $a'_\alpha := b_{\sigma(\alpha)}\,b_\alpha^{-1}\,a_\alpha$ удовлетворяют условиям $a'_\alpha \in R^*$, $a'_{\sigma(\alpha)} = a'_\alpha$. Это верно для любого множества Δ и любого $\sigma : \Delta \to \Delta$ такого, что $\sigma^2 = 1$ (достаточно рассмотреть случай $|\Delta| \le 2$). ■

Перейдем теперь от сопряженности элементом группы $\operatorname{Int} \mathfrak{k}_\Delta$ к сопряженности элементом группы $\operatorname{Int} \mathfrak{a}_\Delta$. Для этого нам понадобится хорошо известная

Лемма 5.2. *Пусть G – вещественная аффинная алгебраическая группа такая, что группа вещественных точек $G(\mathbb{R})$ компактна. Пусть X – вещественное линейное пространство, снабженное линейным действием группы G. Пусть x, $y \in X$ лежат в одной $G(\mathbb{C})$-орбите. Тогда они лежат в одной $G(\mathbb{R})$-орбите.*

Доказательство. Пусть O_x (соответственно O_y) – $G(\mathbb{R})$ орбита точки x (соответственно точки y) в X. Предположим, что $O_x \cap O_y = \varnothing$. Тогда (см. [8, гл. 3, §4, теорема 3]) существует регулярная функция f на X, инвариантная относительно $G(\mathbb{R})$ (а значит, и относительно $G(\mathbb{C})$) и такая, что $f|_{O_x} > 0$, $f|_{O_y} < 0$. Так как $y \in G(\mathbb{C})x$, то $f(x) = f(y)$, что невозможно. ■

Лемма 5.3. $\theta \in \Theta_\Delta$ тогда и только тогда, когда θ самосопряжен относительно эрмитовой формы $(a, b)_\tau := \langle a, \tau(b)\rangle$.

Доказательство. Достаточно заметить, что $(\theta(a), b)_\tau = \langle\theta(a), \tau(b)\rangle = \langle a, (\theta^{-1}\tau)(b)\rangle$, $(a, \theta(b))_\tau = \langle a, (\tau\theta)(b)\rangle$. ■

Предложение 5.4. *Если θ_1, $\theta_2 \in \Theta_\Delta$ сопряжены элементом группы* $\operatorname{Int} \mathfrak{a}_\Delta$, *то они сопряжены и элементом группы* $\operatorname{Int} \mathfrak{k}_\Delta$.

Доказательство. Достаточно применить лемму 5.2 к группе $\operatorname{Int} \mathfrak{k}_\Delta$, действующей сопряжениями на пространстве линейных операторов в $\mathfrak{a}_\Delta$, самосопряженных относительно эрмитовой формы $(\cdot\,, \cdot)_\tau$. ■

Итак, описание классов $\operatorname{Int} \mathfrak{k}_\Delta$-сопряженности элементов $\Theta_{\Delta,\sigma}$ сводится к вопросу о том, когда элементы $\tilde{\sigma} \cdot H_\Delta^\sigma$ сопряжены элементом группы $\operatorname{Int} \mathfrak{a}_\Delta$. Так как $\sigma^2 = 1$, то достаточно рассмотреть два частных случая: 1) $\mathfrak{a}_\Delta$ – простая алгебра Ли, 2) $\mathfrak{a}_\Delta = \mathfrak{a}_{\Delta_1} \oplus \mathfrak{a}_{\Delta_2}$, где $\mathfrak{a}_{\Delta_1}$ и $\mathfrak{a}_{\Delta_2}$ – простые алгебры Ли, причем $\tilde{\sigma}(\mathfrak{a}_{\Delta_1}) = \mathfrak{a}_{\Delta_2}$.

В первом случае θ_1, $\theta_2 \in \tilde{\sigma} \cdot H_\Delta^\sigma$ сопряжены элементом группы $\mathrm{Int}\, \mathfrak{a}_\Delta$ тогда и только тогда, когда они лежат в одной орбите действия группы $W_\Delta^\sigma := N(S_\Delta^\sigma)/H_\Delta^\sigma$, где S_Δ^σ – подгруппа в $\mathrm{Aut}\, \mathfrak{a}_\Delta$, порожденная $\tilde{\sigma}$ и H_Δ^σ, а $N(S_\Delta^\sigma)$ – нормализатор S_Δ^σ в группе $\mathrm{Int}\, \mathfrak{a}_\Delta$ (см. [6, гл. 3, теорема 3.12]; см. также [6, гл. 3, пп. 3.9, 3.10], где дается более явное описание классов $\mathrm{Int}\, \mathfrak{a}_\Delta$-сопряженности элементов $\tilde{\sigma} \cdot H_\Delta^\sigma$ в терминах барицентрических координат). Отметим, что если $\sigma = 1$, то W_Δ^σ – это группа Вейля алгебры Ли $\mathfrak{a}_\Delta$, и утверждение хорошо известно.

Во втором случае ответ более простой.

Предложение 5.5. *Пусть* $\mathfrak{a}_\Delta = \mathfrak{a}_{\Delta_1} \oplus \mathfrak{a}_{\Delta_2}$, *где* $\mathfrak{a}_{\Delta_1}$ *и* $\mathfrak{a}_{\Delta_2}$ *– простые алгебры Ли, причем* $\tilde{\sigma}(\mathfrak{a}_{\Delta_1}) = \mathfrak{a}_{\Delta_2}$. *Пусть* $h,\ h' \in H_\Delta^\sigma$. *Тогда* $\tilde{\sigma} h$ *и* $\tilde{\sigma} h'$ *сопряжены элементом группы* $\mathrm{Int}\, \mathfrak{a}_\Delta$ *тогда и только тогда, когда образы* h^2 *и* $(h')^2$ *в* $H_{\Delta_1} := \{ \exp(\mathrm{ad}\, x) \mid x \in \mathfrak{h}_{\Delta_1} \}$ *лежат в одной* W_1*-орбите, где* W_1 *– группа Вейля алгебры Ли* $\mathfrak{a}_{\Delta_1}$.

Доказательство. Пусть $\eta = \tilde{\sigma}|_{\mathfrak{a}_{\Delta_1}}$, $\eta : \mathfrak{a}_{\Delta_1} \to \mathfrak{a}_{\Delta_2}$, тогда $\tilde{\sigma}|_{\mathfrak{a}_{\Delta_2}} = \eta^{-1}$. Пусть $h = h_1 h_2$, $h' = h_1' h_2'$, где h_1, $h_1' \in H_{\Delta_1}$, h_2, $h_2' \in H_{\Delta_2}$. Условие $h \in H_\Delta^\sigma$ равносильно тому, что $h_2 = \eta \cdot h_1 \cdot \eta^{-1}$, то же для h'. Поэтому $\tilde{\sigma} h$ и $\tilde{\sigma} h'$ сопряжены элементом группы $\mathrm{Int}\, \mathfrak{a}_\Delta$ тогда и только тогда, когда найдутся $g_1 \in \mathrm{Int}\, \mathfrak{a}_{\Delta_1}$, $g_2 \in \mathrm{Int}\, \mathfrak{a}_{\Delta_2}$ такие, что $\eta h_1' = g_2 \cdot \eta h_1 \cdot g_1^{-1}$, $h_1' \cdot \eta^{-1} = g_1 \cdot h_1 \eta^{-1} \cdot g_2^{-1}$, а это равносильно тому, что найдется $g_1 \in \mathrm{Int}\, \mathfrak{a}_{\Delta_1}$ такой, что $(h_1')^2 = g_1 \cdot h_1^2 \cdot g_1^{-1}$, что и требовалось доказать. ■

Замечание. Пусть X – компактное эрмитово симметрическое пространство над K. В работе [9] построено однопараметрическое семейство пуассоновых структур на X, согласованных с действием группы K. Используя классификационные результаты разд. 4.5, нетрудно показать, что этим исчерпываются все с точностью до изоморфизма структуры пуассонова однородного K-пространства на X.

6. Опишем однородные K-пространства со связными стационарными подгруппами, допускающие пуассонову структуру, согласованную с действием K.

Лемма 6.1. *Пусть* $\Delta \subset \Gamma$, $\theta \in \Theta_\Delta$. *Тогда* $\theta = |\theta| \cdot \operatorname{sgn}\theta$, *где* $|\theta|$, $\operatorname{sgn}\theta \in \Theta_\Delta$, $|\theta| \cdot \operatorname{sgn}\theta = \operatorname{sgn}\theta \cdot |\theta|$, $|\theta| = \exp(i \cdot \operatorname{ad} x)$, $x \in \mathfrak{k}_\Delta$, $(\operatorname{sgn}\theta)^2 = 1$.

Доказательство. Пусть $\theta = |\theta| \cdot \operatorname{sgn}\theta$ – полярное разложение θ относительно эрмитовой формы $(\cdot,\cdot)_\tau$, т.е. $|\theta|$ самосопряжен и положительно определен, а $\operatorname{sgn}\theta$ унитарен относительно $(\cdot,\cdot)_\tau$, $\operatorname{sgn}\theta \cdot |\theta| = |\theta| \cdot \operatorname{sgn}\theta$. Так как θ самосопряжен, то $(\operatorname{sgn}\theta)^2 = 1$.

Покажем, что $\operatorname{sgn}\theta$ (а тогда и $|\theta|$) – гомоморфизм алгебр Ли. Пусть $\mathfrak{a}_\pm := \{ a \in \mathfrak{a}_\Delta \mid (\operatorname{sgn}\theta)(a) = \pm a \}$. Достаточно проверить, что $[\mathfrak{a}_+, \mathfrak{a}_+] \subset \mathfrak{a}_+$, $[\mathfrak{a}_+, \mathfrak{a}_-] \subset \mathfrak{a}_-$, $[\mathfrak{a}_-, \mathfrak{a}_-] \subset \mathfrak{a}_+$. Для этого заметим, что $\mathfrak{a}_+ = \bigoplus_{\lambda > 0} \mathfrak{a}_\lambda$, $\mathfrak{a}_- = \bigoplus_{\lambda < 0} \mathfrak{a}_\lambda$, где $\mathfrak{a}_\lambda = \{ a \in \mathfrak{a}_\Delta \mid \theta(a) = \lambda a \}$, $\lambda \in R$, и что $[\mathfrak{a}_\lambda, \mathfrak{a}_\mu] \subset \mathfrak{a}_{\lambda\mu}$, поскольку θ – гомоморфизм алгебр Ли.

Согласно лемме 5.3, $|\theta| \in \Theta_\Delta$, а тогда и $\operatorname{sgn}\theta \in \Theta_\Delta$. Заметим, наконец, что $\ln|\theta|$ – дифференцирование алгебры Ли $\mathfrak{a}_\Delta$ такое, что $\tau \cdot \ln|\theta| \cdot \tau = -\ln|\theta|$. Так как $\mathfrak{a}_\Delta$ полупроста, то $\ln|\theta| = \operatorname{ad} x$, $x \in \mathfrak{a}_\Delta$, и из условия $\tau \cdot \operatorname{ad} x \cdot \tau = -\operatorname{ad} x$ следует, что $x \in i \cdot \mathfrak{k}_\Delta$. ■

Напомним (см. [6, гл. 4, § 1.4]), что автоморфизм второго порядка простой комплексной алгебры Ли называется *автоморфизмом типа II*, если подалгебра его неподвижных точек неполупроста (тогда она содержится в нетривиальной параболической подалгебре, см. [6, гл. 6, § 1.2]). Если $\Delta \subset \Gamma$, то назовем $\theta \in \operatorname{Aut} \mathfrak{a}_\Delta$ *хорошим*, если $\theta^2 = 1$, $\theta\tau = \tau\theta$, и ограничение θ на любой θ-инвариантный идеал в $\mathfrak{a}_\Delta$, являющийся простой алгеброй Ли, не относится к типу II.

Теорема 6.2. 1) *Пусть* $\mathfrak{l}$ *– лагранжева подалгебра в* $\mathfrak{g}_R$, $\mathfrak{u} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{k}$. *Тогда* $\mathfrak{u}$ *K-сопряжена подалгебре в* $\mathfrak{k}$ *вида*

$$(\mathfrak{a}_\Delta^\theta \cap \mathfrak{k}) \oplus V \tag{2}$$

для подходящих $\Delta \subset \Gamma$, *хорошего автоморфизма* θ *и подпространства* $V \subset \mathfrak{z}_\Delta \cap \mathfrak{t}$, *где* $\mathfrak{a}_\Delta^\theta$ *– подалгебра неподвижных точек автоморфизма* θ.

2) *Для любой подалгебры* $\mathfrak{u}$ *вида* (2) *найдется лагранжева подалгебра* $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}_\mathbb{R}$ *такая, что* $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{k} = \mathfrak{u}$.

Доказательство. 1) Сопрягая $\mathfrak{l}$ элементом группы K, можем считать, что $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}(\Delta', \theta', \mathfrak{l}_0)$, где $\Delta' \subset \Gamma$, $\theta' \in \Theta_{\Delta'}$, $\mathfrak{l}_0$ – вещественное лагранжево подпространство в $\mathfrak{z}_{\Delta'}$. При этом $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{k} = (\mathfrak{a}_{\Delta'}^{\theta'} \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{l}_0 \cap \mathfrak{t})$.

Пусть $\theta' = |\theta'| \cdot \operatorname{sgn}\theta'$ – разложение из леммы 6.1. Заметим, что $\mathfrak{a}_{\Delta'}^{\theta'} = \mathfrak{a}_{\Delta'}^{|\theta'|} \cap \mathfrak{a}_{\Delta'}^{\operatorname{sgn}\theta'} = (\mathfrak{a}_{\Delta'}^{|\theta'|})^{\operatorname{sgn}\theta'}$. Так как $|\theta'| = \exp(i \cdot \operatorname{ad} x)$, где $x \in \mathfrak{k}_{\Delta'}$, то $\mathfrak{a}_{\Delta'}^{|\theta'|} = \mathfrak{z}_{\Delta'}(x) := \{ y \in \mathfrak{a}_{\Delta'} \mid [x, y] = 0\}$. Сопрягая $\mathfrak{l}$ подходящим элементом связной подгруппы $K_{\Delta'} \subset K$, соответствующей $\mathfrak{k}_{\Delta'}$, можно добиться того, чтобы $x \in \mathfrak{h}_{\Delta'} \cap \mathfrak{k}$. Теперь заметим, что $\mathfrak{z}_{\Delta'}(x) = \mathfrak{a}_\Delta \oplus \mathfrak{z}_{\Delta', \Delta}$ для подходящего $\Delta \subset \Delta'$, где $\mathfrak{z}_{\Delta', \Delta}$ – ортогональное дополнение к $\mathfrak{h}_\Delta$ в $\mathfrak{h}_{\Delta'}$ относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Положим $\theta = \operatorname{sgn}\theta'$, тогда $\mathfrak{a}_{\Delta'}^{\theta'} = \mathfrak{a}_\Delta^\theta \oplus \mathfrak{z}_{\Delta', \Delta}^\theta$. Так как $\mathfrak{z}_{\Delta'} \oplus \mathfrak{z}_{\Delta', \Delta} = \mathfrak{z}_\Delta$, то $V := (\mathfrak{z}_{\Delta', \Delta}^\theta \cap \mathfrak{t}) \oplus (\mathfrak{l}_0 \cap \mathfrak{t})$ содержится в $\mathfrak{z}_\Delta \cap \mathfrak{t}$.

Если θ не является хорошим, то достаточно рассмотреть случай, когда $\mathfrak{a}_\Delta$ проста и θ имеет тип II. Тогда θ – внутренний (см. [6, гл. 4, п. 1.4]). С точностью до сопряжения элементом группы K_Δ можно считать, что $\theta = \exp(\operatorname{ad} y)$, $y \in \mathfrak{h}_\Delta$. Пусть ν_α – числовая отметка на схеме Каца автоморфизма θ, соответствующая корню $\alpha \in \Delta$. Пусть $\mathfrak{a}_\Delta^\theta = (\mathfrak{a}_\Delta^\theta)_{ss} \oplus (\mathfrak{a}_\Delta^\theta)_c$, где $(\mathfrak{a}_\Delta^\theta)_{ss} = [\mathfrak{a}_\Delta^\theta, \mathfrak{a}_\Delta^\theta]$, $(\mathfrak{a}_\Delta^\theta)_c$ – центр $\mathfrak{a}_\Delta^\theta$. Тогда $(\mathfrak{a}_\Delta^\theta)_{ss} = \mathfrak{a}_{\tilde\Delta}$, где $\tilde\Delta = \{ \alpha \in \Delta \mid \nu_\alpha = 0\}$, $|\tilde\Delta| = |\Delta| - 1$ (см. [6, гл. 3, п. 3.7; гл. 4, п. 1.4]). Теперь достаточно заменить Δ на $\tilde\Delta$, θ – на тождественный автоморфизм и добавить к V подпространство $(\mathfrak{a}_\Delta^\theta)_c \cap \mathfrak{t}$.

2) Пусть $\mathfrak{u} = (\mathfrak{a}_\Delta^\theta \cap \mathfrak{k}) \oplus V$ имеет вид (2). Пусть $\mathfrak{l}_0$ – лагранжево подпространство в $\mathfrak{z}_\Delta$ такое, что $\mathfrak{l}_0 \cap \mathfrak{t} = V$. Тогда очевидно, что $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}(\Delta, \theta, \mathfrak{l}_0)$ такова, что $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{k} = \mathfrak{u}$. ■

Из соответствия между лагранжевыми подалгебрами в $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ и пуассоновыми однородными K-пространствами вытекает

Следствие. *Пусть H – связная замкнутая подгруппа в K. Для того чтобы на K/H существовала скобка Пуассона такая, что действие K на K/H пуассоново, необходимо и достаточно, чтобы подалгебра* Lie $H \subset \mathfrak{k}$ *была K-сопряжена подалгебре вида* (2). ■

7. Рассмотрим тройки $(\Delta, \theta, \mathfrak{l}_0)$, у которых $\Delta = \Gamma$, а $\mathfrak{l}_0$ – это центр $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{k}$. Тогда $\mathfrak{a}_\Delta = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ и $\mathfrak{l}(\Delta, \theta, \mathfrak{l}_0) = \mathfrak{l}_\theta := \{ a \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \mid (\tau\,\theta)(a) = a \} \oplus \mathfrak{z}$. Так как связная компонента центра группы K действует на подалгебрах $\mathfrak{l}_\theta$ тривиально, то достаточно рассмотреть случай, когда K полупроста, т.е. $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Далее K предполагается полупростой.

Дадим геометрическую интерпретацию пуассоновых однородных K-пространств, соответствующих подалгебрам $\mathfrak{l}_\theta$. Пусть $\Theta := \{ \theta \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g} \mid (\tau\,\theta)^2 = 1 \}$, где $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ – группа ортогональных относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$ автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Группа K действует на Θ сопряжениями. Пусть r означает то же, что в (1). Если $\varphi, \psi \in C^\infty(\Theta)$, то положим

$$\{ \varphi, \psi \} = - r_{\mathrm{alt}}^{\mu\nu} \cdot \delta_\mu \varphi \cdot \delta_\nu \psi + i \cdot r_{\mathrm{sym}}^{\mu\nu} \cdot \delta_\mu \varphi \cdot \delta_\nu' \psi, \tag{3}$$

где $\quad (\delta_\mu \varphi)(\theta) := \frac{d}{dt} \varphi(\exp(te_\mu) \cdot \theta \cdot \exp(-te_\mu))\,|_{t=0}, \quad (\delta_\mu' \varphi)(\theta) := \frac{d}{dt} \varphi(\exp(ite_\mu) \times$ $\times\, \theta \cdot \exp(ite_\mu))\,|_{t=0}$, а $r_{\mathrm{alt}}^{\mu\nu}$ (соответственно $r_{\mathrm{sym}}^{\mu\nu}$) – компоненты r_{alt} (соответственно r_{sym}) в базисе $\{ e_\mu \}$ алгебры $\mathfrak{k}$.

Теорема 7.1. *Скобка* (3) *является скобкой Пуассона, действие K на Θ пуассоново, и орбиты этого действия – пуассоновы однородные K-пространства, причем точке $\theta \in \Theta$ соответствует лагранжева подалгебра $\mathfrak{l}_\theta$.*

Для доказательства теоремы 7.1 нам понадобятся вспомогательные результаты. Пусть G – группа Пуассона-Ли. Назовем *дублем* G группу Ли D с алгеброй Ли $D(\mathfrak{g})$ такую, что: 1) естественное скалярное произведение в $D(\mathfrak{g})$ инвариантно относительно присоединенного действия D (тогда D наделяется структурой группы Пуассона-Ли с помощью канонического элемента $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^* \subset D(\mathfrak{g}) \otimes D(\mathfrak{g})$), см. [3, §13]), 2) G – замкнутая подгруппа Пуассона-Ли в D.

З а м е ч а н и я. 1) Группа D определена неоднозначно. 2) Биалгебра Ли, соответствующая группе Пуассона-Ли D, – это $D(\mathfrak{g})$ со стандартной структурой биалгебры.

Теорема 7.2. *Пусть G – группа Пуассона-Ли, $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$, D – дубль G. Рассмотрим действие G левыми сдвигами на пуассоновом многообразии D/G. Тогда G-орбиты в D/G – пуассоновы многообразия, и если $w \in D$, а x – это образ w в*

D/G, то пуассонову однородному G-пространству $X = G\cdot x$ и точке x на нем соответствует лагранжева подалгебра $\mathfrak{l}_x := w\cdot\mathfrak{g}\cdot w^{-1}\subset D(\mathfrak{g})$.

Доказательство. Пусть ξ – бивекторное поле, задающее пуассонову структуру на D. Тогда $\xi(w)=\sum_i (w{\cdot}a_i\otimes w{\cdot}l_i - a_i w\otimes l_i{\cdot}w)$, где $\{a_i\}$ – базис в $\mathfrak{g}$, а $\{l_i\}$ – двойственный ему базис в $\mathfrak{g}^*$. Пусть $\bar\xi$ – векторное поле, задающее скобку Пуассона на D/G. Так как $T_x(D/G)\simeq T_w D/w\cdot\mathfrak{g}$, то $\bar\xi(x)=$ $=-\sum_i \overline{a_i w}\otimes\overline{l_i{\cdot}w}$, где черта в правой части означает образ в $T_x(D/G)$.

Пусть H_x – стационарная подгруппа точки $x\in X$. Тогда $H_x=$ $=\{g\in G\mid w^{-1}gw\in G\}$, поэтому $\mathfrak{h}_x := \mathrm{Lie}\,H_x=\mathfrak{l}_x\cap\mathfrak{g}$. Теперь $T_xX=$ $=\mathfrak{g}{\cdot}w/(w{\cdot}\mathfrak{g}\cap\mathfrak{g}{\cdot}w)=\mathfrak{g}{\cdot}w/\mathfrak{h}_x{\cdot}w\simeq\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_x$. Покажем, что $\bar\xi(x)\in(T_xX)^{\otimes 2}$, т.е. $X\subset D/G$ – пуассоново подмногообразие. В самом деле, можно выбрать базисы $\{a_i\}$ и $\{l_i\}$ так, чтобы для всякого i либо $a_i\in\mathfrak{h}_x$, либо $l_i\in\mathfrak{h}_x^\perp$. Если $a_i\in\mathfrak{h}_x$, то $\overline{a_i\cdot w}=0$, если же $l_i\in\mathfrak{h}_x^\perp$, то $l_i w\in\mathfrak{g}{\cdot}w+w{\cdot}\mathfrak{g}$ (так как $\mathfrak{h}_x^\perp$ – это проекция $\mathfrak{l}_x$ на $\mathfrak{g}^*$ вдоль $\mathfrak{g}$).

Если $l_i\in\mathfrak{h}_x^\perp$, то пусть $b_i\in\mathfrak{g}$ таков, что $b_i+l_i\in\mathfrak{l}_x$. Тогда $\overline{b_i}\in\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_x$ не зависит от произвола в выборе b_i, и образ $\bar\xi(x)$ в $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_x)^{\otimes 2}$ равен $\sum_i\bar a_i\otimes\bar b_i$, где $\bar a_i$ – образ a_i в $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_x$. Теперь очевидно, что $\mathfrak{l}_x=\Big\{a+l\mid a\in\mathfrak{g},\ l\in\mathfrak{h}_x^\perp,$ $(l\otimes\mathrm{id})\big(\sum_i\bar a_i\otimes\bar b_i\big)=\bar a\Big\}$ (достаточно заметить, что как левая, так и правая части равенства порождаются элементами b_i+l_i, где $l_i\in\mathfrak{h}_x^\perp$, и подпространством $\mathfrak{h}_x\subset\mathfrak{g}\subset D(\mathfrak{g})$), что и требовалось доказать. ■

Замечание. Теорема 7.2 верна и в случае, когда G – вещественная алгебраическая пуассонова группа, а D/G понимается в смысле теории алгебраических групп, т.е. как множество вещественных точек в $D(\mathbb{C})/G(\mathbb{C})$ (для доказательства достаточно применить теорему 7.2 к комплексной группе Пуассона-Ли $G(\mathbb{C})$).

Доказательство теоремы 7.1. Пусть $G_{\mathbb{R}}$ – это группа $G=\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$, рассматриваемая как вещественная группа Ли. Легко видеть, что $G_{\mathbb{R}}$

является дублем группы K. Рассмотрим отображение $\pi: G_{\mathbb{R}} \to \Theta$, $\pi(\theta) = (\theta\cdot\theta^*)^{-1}$, где $\theta^* = \tau\,\theta^{-1}\tau$ (θ^* сопряжен θ относительно $(\cdot\,,\cdot)_\tau$). Заметим, что π индуцирует изоморфизм $G_{\mathbb{R}}/K \xrightarrow{\sim} \Theta$, где фактор в левой части понимается в смысле теории вещественных алгебраических групп. Если $\theta \in G_{\mathbb{R}}$, то $\theta \cdot \mathfrak{k} \cdot \theta^{-1} = \theta(\mathfrak{k}) = \{\, a \in \mathfrak{g} \mid \tau\cdot(\theta\theta^*)^{-1}(a) = a \,\} = \mathfrak{l}_{\pi(\theta)}$. Итак, в силу теоремы 7.2 и замечания после нее, достаточно доказать, что скобка (3) – это образ скобки Пуассона на $G_{\mathbb{R}}/K$ при отображении π.

Пусть $\{ e_\mu \}$ – базис в $\mathfrak{k}$, $\{ e^\mu \}$ – двойственный ему базис в $\mathfrak{k}^*$, $s = e_\mu \otimes e^\mu \in \mathfrak{k}\otimes\mathfrak{k}^* \subset D(\mathfrak{k})\otimes D(\mathfrak{k})$. Напомним, что если D – какой-нибудь дубль K, то скобка Пуассона на нем имеет вид $\{\varphi, \psi\} = s^{\alpha\beta}(\partial'_\alpha\varphi\cdot\partial'_\beta\psi - \partial_\alpha\varphi\cdot\partial_\beta\psi)$, где φ, ψ – регулярные функции на D, $\{\partial_\alpha\}$ (соответственно $\{\partial'_\alpha\}$) – базис в пространстве правоинвариантных (соответственно левоинвариантных) векторных полей на D, соответствующий какому-нибудь базису в $D(\mathfrak{k})$, а $s^{\alpha\beta}$ – координаты s в этом базисе.

Легко проверить, что $D(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}\oplus\mathfrak{k}^*$ и $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ отождествляются с помощью отображения $\lambda: \mathfrak{k}\oplus\mathfrak{k}^* \to \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, $\lambda(a + l) := a - (\mathrm{id}\otimes l)(r)$, где $a \in \mathfrak{k}$, $l \in \mathfrak{k}^*$ (подразумевается, что l продолжен по линейности до линейного функционала на $\mathfrak{g}$). Теперь $(\lambda\otimes\lambda)(s) = r^{\mu\nu}_{\mathrm{alt}}\cdot e_\mu\otimes e_\nu + i r^{\mu\nu}_{\mathrm{sym}}\cdot e_\mu \otimes i e_\nu$. Поэтому скобка Пуассона на $G_{\mathbb{R}}$ как на дубле K примет вид

$$\{\varphi, \psi\} = r^{\mu\nu}_{\mathrm{alt}}\cdot(\partial'_{e_\mu}\varphi\cdot\partial'_{e_\nu}\psi - \partial_{e_\mu}\varphi\cdot\partial_{e_\nu}\psi) + i r^{\mu\nu}_{\mathrm{sym}}\cdot(\partial'_{e_\mu}\varphi\cdot\partial'_{ie_\nu}\psi - \partial_{e_\mu}\varphi\cdot\partial_{ie_\nu}\psi), \qquad (4)$$

где φ, ψ – регулярные функции на $G_{\mathbb{R}}$, а ∂_a (соответственно ∂'_a) – дифференцирование вдоль правоинвариантного (соответственно левоинвариантного) векторного поля на $G_{\mathbb{R}}$ со значением $a \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ в единице.

Теперь заметим, что если φ – регулярная функция на Θ, то $(\partial_{e_\mu}\pi^*\varphi)(\theta) = (\delta_\mu\varphi)(\pi(\theta))$, $(\partial_{ie_\mu}\pi^*\varphi)(\theta) = -(\delta_\mu{}'\varphi)(\pi(\theta))$, $(\partial_{e_\mu}{}'\pi^*\varphi)(\theta) = 0$. Поэтому образ скобки (4) на Θ – это скобка (3), что и требовалось доказать. ■

Список литературы

1. *V. G. Drinfeld*, On Poisson homogeneous spaces of Poisson–Lie groups.– Теорет. и мат. физика (1993), т. 95, № 2, с. 226–227.
2. *Е. А. Каролинский*, Классификация пуассоновых однородных пространств компактных групп Пуассона–Ли.– Докл. РАН (в печати).
3. *V. G. Drinfeld*, Quantum groups.– In: Proc. Int. Congr. Math. (1986), v. 1, p. 798–820.
4. *J.-H. Lu and A. Weinstein*, Poisson–Lie groups, dressing transformations and Bruhat decompositions.– J. Diff. Geom. (1990), v. 31, p. 501–526.
5. *Ф. И. Карпелевич*, О неполупростых максимальных подалгебрах полупростых алгебр Ли.– Докл. АН СССР (1951), т. 76, № 6, с. 775–778.
6. *Э. Б. Винберг, В. В. Горбацевич, А. Л. Онищик*, Строение групп и алгебр Ли.– В сб.: Итоги науки и техники, Совр. пробл. мат., Фунд. направления (1990), т. 41, с. 5–253.
7. *А. А. Белавин, В. Г. Дринфельд*, Уравнения треугольников и простые алгебры Ли. Препринт ИТФ им. Ландау (1982).
8. *Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик*, Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. УРСС, Москва (1995), 343 с.
9. *S. Khoroshkin, A. Radul, and V. Rubtsov*, A family of Poisson structures on Hermitian symmetric spaces.– Commun. Math. Phys. (1993), v. 152, p. 299–315.

The classification of Poisson homogeneous spaces of compact Poisson–Lie group

E.A. Karolinsky

The classification of all Poisson homogeneous spaces with connected stabilizers of compact Poisson-Lie group K (equipped with the standard r-matrix Poisson structure) is given. The connected closed subgroups $H \subset K$ such that K/H admits a structure of Poisson homogeneous K-space are listed. The geometric interpretation of some of Poisson homogeneous K-spaces is also given.

Класифікація пуассонових однорідних просторів компактної групи Пуассона–Лі

Є.О. Каролінський

Подано класифікацію пуассонових однорідних просторів зі зв'язними стаціонарними підгрупами компактної групи Пуассона-Лі K (зі стандартною r-матричною пуассоновою структурою). Перелічено зв'язні замкнені підгрупи $H \subset K$ такі, що на K/H існує пуассонова структура, яка погоджена з дією групи K. Подано геометричну интерпретацію декількох пуассонових однорідних K-просторів.