Математическая физика, анализ, геометрия
1996, т. 3, № 3/4, с. 290-307

Характеризация конформных отображений верхней полуплоскости на области типа "гребенки"

А. В. Кесарев

Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 15 февраля 1995 года.

Областью типа "гребенки" называется область вида $\{ z \in \mathbb{C} : -\infty \le a < \operatorname{Re} z < b \le +\infty, \operatorname{Im} z > 0 \} \setminus \{ \cup [x_k, x_k + iy_k] \}$. Верхнюю полуплоскость с заданным замкнутым множеством E на границе можно единственным образом конформно отобразить на некоторую область типа "гребенки", переводя множество E в интервал (a, b). Если при этом $a = -\infty$ и $b = +\infty$, то множество E относится к типу (A), если либо $a = -\infty$, $b < +\infty$, либо $a > -\infty$, $b = +\infty$, то E относится к типу (B), а если $-\infty < a < b < +\infty$, то к типу (C). Приводятся некоторые условия того, что E относится к типу (A), (B) или (C).

Областью типа "гребенки" называется область вида $\{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re} z < b, \operatorname{Im} z > 0 \}$, $-\infty \le a < b \le +\infty$, из которой выброшено конечное или счетное множество вертикальных отрезков конечной длины с основаниями на вещественной оси. Причем множество отрезков не может иметь предельного отрезка с основанием на (a, b). Интервал (a, b) называется основанием области.

В работах Н. И. Ахиезера, Б. Я. Левина [1] и Б. Я. Левина [2] показано, что каждому замкнутому регулярному множеству E на вещественной оси (т. е. такому, что каждая точка множества E регулярна для решения задачи Дирихле в дополнении к E) можно поставить в соответствие конформное отображение $z(\zeta)$ верхней полуплоскости на некоторую область типа "гребенки", переводящее множество E в основание области. При этом отображение $z(\zeta)$ определено множеством E с точностью до преобразования подобия и вещественного сдвига, т. е. $z(\zeta) = \lambda z_0(\zeta) + \mu$, $\lambda > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$. Если $a = -\infty$ и $b = +\infty$, то множество E относится к типу (A), если либо $a = -\infty$, $b < +\infty$, либо $a > -\infty$, $b = +\infty$, то E относится к типу (B), а если $-\infty < a < b < +\infty$, то к типу (C).

Исследования, описанные в данной статье, в определенной степени проведены благодаря поддержке Международного научного фонда (грант U2Z000).

Такие конформные отображения нашли важные применения в теории экстремальных задач чебышевского типа [1], теории квазианалитических классов [3] и спектральной теории операторов Хилла [4].

В работе [2] Б. Я. Левиным была установлена связь между конформными отображениями верхней полуплоскости на области типа "гребенки" и мажорантами (верхними огибающими) некоторых семейств субгармонических функций.

О п р е д е л е н и е [2]. Пусть непрерывная функция $\varphi(x)$ такова, что $\varphi(x) \geq 0$, тогда под классом $K_\varphi(E)$ будем понимать семейство таких функций $g(z)$, что:

1) все функции $g(z)$ являются субгармоническими в $\mathbf{C}$ функциями конечной степени (*т.е.* $\overline{\lim\limits_{|z| \to \infty}} \dfrac{g(z)}{|z|} < +\infty$);

2) $\overline{\lim\limits_{|y| \to \infty}} [g(iy) - (1+\varepsilon)\varphi(|y|)] \leq 0$ для любого $\varepsilon > 0$;

3) $g(x) \leq 0,\ x \in E$;

4) в классе $K_\varphi(E)$ существует некоторая отличная от постоянной функция.

Как показано в [2], мажоранта класса $K_\varphi(E)$, т. е. функция $v_E(z) = \max\{g(z), g \in K_\varphi(E)\}$, будет либо тождественно равна $+\infty$, либо будет гармонической в $\mathbf{C} \setminus E$ функцией. В последнем случае $v_E(z)$ будет симметричной (т.е. $v_E(z) = v_E(\bar{z})$) непрерывной субгармонической в $\mathbf{C}$ функцией, равной нулю на множестве E. Функция, обладающая такими свойствами, единственна с точностью до постоянного множителя [2, теорема 3. 2]. Этот факт был также установлен М. Бенедиксом в [5]. Если теперь обозначить через $u_E(z)$ функцию, гармонически сопряженную с $v_E(z)$, то функция $w_E(z) = u_E(z) + i\,v_E(z)$ будет давать требуемое конформное отображение. При этом (как следует из уравнений Коши-Римана [2, лемма 2. 4]) непрерывная функция $u_E(z)$ на вещественной оси будет монотонно возрастающей и удовлетворяющей равенству

$$\frac{1}{\pi}(u_E(x_1) - u_E(x_2)) = \mu([x_1, x_2]),$$

где μ — ассоциированная мера для функции $v_E(z)$. Таким образом, множество E относится к типу (A) тогда и только тогда, когда обе массы $\mu((-\infty, 0])$ и $\mu([0, +\infty))$ бесконечны, относится к типу (B) тогда и только тогда, когда одна из масс $\mu((-\infty, 0])$ и $\mu([0, +\infty))$ конечна, а другая бесконечна, и относится к типу (C) тогда и только тогда, когда масса $\mu((-\infty, +\infty))$ конечна.

В связи с этим возникает естественный вопрос: как по множеству E определить, к какому типу оно относится?

Сформулируем основные результаты. Предварительно введем некоторые обозначения. Пусть $R > 1$, обозначим

$$E^{\pm} = E \cap \mathbf{R}^{\pm}, \quad E_n^{\pm} = E^{\pm} \cap \{ R^n \le |z| \le R^{n+1} \}, \quad E_n = E_n^- \cup E_n^+,$$

$$\gamma_n^{\pm} = \operatorname{cap}(E_n^{\pm}), \quad \gamma_n = \operatorname{cap}(E_n),$$

где $\operatorname{cap}(E_n)$ — логарифмическая емкость множества E_n.

Следующая теорема была сообщена автору без доказательства А. Э. Еременко и М. Л. Содиным.

Теорема 1. *Замкнутое регулярное множество E относится к типу (C) тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln 1/\gamma_n} < \infty. \tag{1}$$

Последнее условие, как показано в [6], эквивалентно условию разреженности множества E в бесконечности.

Отметим, что теорема 1 позволяет дать несколько более наглядную формулировку одного из результатов Б. Я. Левина [3, теорема 3. 23], относящегося к теории квазианалитических классов функций, которые представлены интегралами Фурье–Стильтьеса.

Для типа (B) поставим задачу следующим образом. Пусть E^+ — заданное неразреженное в бесконечности множество. Каким должно быть множество E^-, чтобы выполнялось условие $\mu(E^-) < \infty$, т.е. чтобы множество $E = E^+ \cup E^-$ относилось к типу (B)?

Теорема 2. *Пусть замкнутое регулярное множество E таково, что множество E^+ не разрежено в бесконечности. Тогда E относится к типу (B) тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{E^+}(-R^n)}{\ln 1/\gamma_n^-} < \infty. \tag{2}$$

Пусть $E^+ = \mathbf{R}^+$, тогда $v_{E^+}(z) = \operatorname{Im}\sqrt{z}$ и, следовательно, $v_{E^+}(-R) = R^{1/2}$.

Следствие 1. *Для того чтобы* $E^{-} \bigcup \mathbf{R}^{+}$ *относилось к типу* (B), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{n/2}}{\ln 1/\gamma_n^{-}} < \infty. \tag{3}$$

Так как для любого множества E^{+} $v_{E^{+}}(-R) = O(R^{1/2})$, то справедливо

Следствие 2. *Условие* (3) *является достаточным для того, чтобы любое множество* E *относилось к типу* (B).

Сформулируем также вспомогательные утверждения, первое из которых установлено в [2] в ходе доказательства теоремы 2. 5.

Лемма 1. *Пусть* $v(z)$ *положительная гармоническая в* $\mathbf{C} \setminus E$ *функция конечной степени* $\sigma \geq 0$ *и* $g(z)$ *субгармоническая в* $\mathbf{C}$ *функция, степень которой не превышает* σ. *Тогда из условий*

1) $\overline{\lim\limits_{|y| \to \infty}} [g(iy) - (1+\varepsilon) v(iy)] \leq 0$ *для любого* $\varepsilon > 0$,

2) $g(x) \leq v(x),\ x \in E$,

следует, что $g(z) \leq v(z)$ *всюду в* $\mathbf{C}$.

Лемма 2. *Пусть* $E \subset \mathbf{R}^{+} \setminus [0, 1)$. *Тогда* $v_E(z)$ *монотонно убывает на отрицательной полуоси и для любого* $R > 1$ *при* $x < 0$ *справедливы неравенства*

$$v_E(x) \leq v_E(Rx) \leq R v_E(x).$$

Лемма 3. *Обозначим* $\hat{E} = E \bigcup [-r, r]$ *и* $\tilde{E} = E \setminus (-r, r)$, *где* $r > 0$. *Пусть существует мажоранта класса* $K_{\varphi}(E)$, *тогда существуют и мажоранты классов* $K_{\varphi}(\hat{E})$ *и* $K_{\varphi}(\tilde{E})$ — *функции* $\hat{v}(z)$ *и* $\tilde{v}(z)$, *соответственно, и для них выполнены следующие неравенства*:

1) $\hat{v}(z) \leq v_E(z) \leq \tilde{v}(z)$;

2) $\tilde{v}(z) \leq \hat{v}(z) + c,\quad c = c(r)$.

Последнее утверждение позволяет, не уменьшая общности, изменять множество E на конечном интервале, и в дальнейшем будем считать, что E не имеет общих точек с интервалом $(-1, 1)$.

Перейдем теперь к доказательству основных утверждений. Доказательства лемм 2 и 3 будут даны в конце статьи.

Доказательство теоремы 1. Докажем сначала достаточность. Пусть сходится ряд (1). Тогда можно считать, что $\ln 1/\gamma_n > 0$. Обозначим через λ_n равновесную меру E_n, нормированную условием $\lambda_n(E_n) = 1$. Тогда

$$\int\limits_{E_n} \ln \frac{1}{|z-t|}\, d\lambda_n(t) \le \ln 1/\gamma_n$$

всюду в $\mathbf{C}$, и знак равенства достигается на E_n.

Рассмотрим функции

$$v_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{\ln 1/\gamma_{2k}} \int\limits_{E_{2k}} \ln \left| 1 - \frac{z}{t} \right| d\lambda_{2k}(t),$$

$$v_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{\ln 1/\gamma_{2k-1}} \int\limits_{E_{2k-1}} \ln \left| 1 - \frac{z}{t} \right| d\lambda_{2k-1}(t),$$

$$v(z) = v_1(z) + v_2(z).$$

Обозначим через M_1, M_2 суммы ряда (1), т.е. полные риссовские массы функций v_1 и v_2, а через E_e, E_o — объединения E_n по четным и нечетным индексам, соответственно. Тогда из [6] известно, что

$$\varlimsup_{E_e \ni x \to \infty} \frac{v_1(x)}{\ln|x|} < M_1 \quad \text{и} \quad \varlimsup_{E_o \ni x \to \infty} \frac{v_2(x)}{\ln|x|} < M_2 .$$

Покажем, что, кроме того,

$$\varliminf_{z \to \infty} \frac{v_i(z)}{\ln|z|} \ge m_i > -\infty, \quad i = 1, 2.$$

Доказательство проведем для функции $v_1(z)$ (для $v_2(z)$ доказательство полностью аналогично). Запишем $v_1(z) = \varphi_n(z) + \psi_n(z)$, где

$$\varphi_n(z) = \frac{n}{\ln 1/\gamma_n} \int\limits_{E_n} \ln \left| 1 - \frac{z}{t} \right| d\lambda_n(t),$$

тогда

$$\varphi_n(z) = \frac{n}{\ln 1/\gamma_n}\left[-\int\limits_{E_n} \ln \frac{1}{|z-t|}\, d\lambda_n(t) - \int\limits_{E_n} \ln |t|\, d\lambda_n(t)\right] \geq$$

$$\geq -n - \frac{n(n+1)\ln R}{\ln 1/\gamma_n}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \inf\left\{\frac{\varphi_n(z)}{\ln|z|} : R^n \leq |z| \leq R^{n+1}\right\} \geq$$

$$\geq -\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{(n+1)\ln R} + \frac{n}{\ln 1/\gamma_n}\right] = -\frac{1}{\ln R}. \tag{4}$$

Про ψ_n известно (см. [6]), что существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi_n(z)}{\ln|z|} = M_1, \text{ когда } R^n \leq |z| \leq R^{n+1}. \tag{5}$$

Тогда из (4) и (5) следует, что

$$\underline{\lim}_{z\to\infty} \frac{v_1(z)}{\ln|z|} \geq m_1 = M_1 - \frac{1}{\ln R}.$$

Тем самым для функции $v(z)$ можно записать:

$$\overline{\lim}_{E\ni x\to\infty} \frac{v(x)}{\ln|x|} = M' < M = M_1 + M_2$$

и

$$\underline{\lim}_{z\to\infty} \frac{v(z)}{\ln|z|} > m = m_1 + m_2 - 1 > -\infty.$$

Кроме того, поскольку $E \subset \mathrm{R}$, то

$$\lim_{y\to\infty} \frac{v(iy)}{\ln|y|} = M.$$

Рассмотрим теперь класс $K_\varphi(E)$, где $\varphi(x) = M\ln^+|x|$. Покажем, что этот класс не пуст. Обозначим:

$$\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln 1/\gamma_n}\lambda_n.$$

Можно найти такие числа N и δ, что $\lambda([-N, N\,]) = M' + 2\delta < M$. Если обозначить

$$g(z) = v(z) - \frac{M' + \delta}{M' + 2\delta} \int_{-N}^{N} \ln \left|1 - \frac{z}{t}\right| d\lambda(t) - c,$$

где константа c выбрана так, чтобы $g(x) \le 0$ при $x \in E$, то легко видеть, что $g \in K_\varphi(E\,)$.

Рассмотрим функцию

$$u(z) = |\, m \,| \ln |\, 2z - 3 + \sqrt{(2z-3)^2 - 1}\,|,$$

являющуюся положительной гармонической в $\mathbf{C} \setminus [1, 2\,]$ функцией, удовлетворяющей условиям $u(x) = 0$, когда $x \in [1, 2\,]$, и $u(z) = |\, m \,| \ln |\, z \,| + o(\ln |\, z \,|)$, когда $|\, z \,| \to \infty$.

Не уменьшая общности, по лемме 3 можно считать, что $[1, 2\,] \subset E$. Рассмотрим теперь функцию

$$h(z) = \frac{M}{M + |\, m \,|} [v(z) + u(z)\,] + c,$$

где константа c выбрана так, чтобы $h(z) \ge 0$ всюду в $\mathbf{C}$. Тогда для любой функции $g \in K_\varphi(E\,)$ справедливы неравенства

$$\varlimsup_{|\,y\,| \to \infty} [g(iy) - (1 + \varepsilon)\, h(iy)\,] \le 0, \;\; \varepsilon > 0,$$

$$g(x) \le h(x), \;\; x \in E,$$

и по лемме 1 $g(z) \le h(z)$. Следовательно, для класса $K_\varphi(E\,)$ существует мажоранта $v_E\,(z)$. Это положительная гармоническая вне E функция, равная нулю на E, и, согласно [2, теорема 3. 2], $v_E\,(z)$ является мнимой частью нужного конформного отображения. Функция $h(z)$ имеет логарифмический рост. Следовательно, ассоциированная мера функции $v_E\,(z)$ имеет конечную полную массу. Тем самым достаточность доказана.

Докажем теперь необходимость. Пусть множество E относится к типу $(C\,)$, тогда функция $v_E\,(z)$ удовлетворяет определению разреженности множества E в бесконечности, а именно

$$0 = \varlimsup_{E \ni x \to \infty} \frac{v_E\,(x)}{\ln |\, x \,|} < M,$$

где πM — длина основания "гребенки". Теорема доказана.

Вместе с классами $K_\varphi(E)$ нам потребуются другие семейства субгармонических функций. Пусть $E \subset \mathbf{R}^+$ ($E \subset \mathbf{R}^-$), а $\psi(x) \ge 0$ является неограниченной монотонно возрастающей вместе с $|x|$ выпуклой вверх функцией, тогда определим класс $K_{\varphi,\psi}(E)$ теми же условиями, что и класс $K_\varphi(E)$, заменив условие 3) условием $g(x) \le -\psi(x)$, $x \in E$. Для класса $K_{\varphi,\psi}(E)$ определим его мажоранту как

$$v_E(z) = \lim_{\delta \to 0} \sup \{ \hat{v}(\zeta) : |\zeta - z| < \delta \},$$

где $\hat{v}(\zeta) = \max \{ g(\zeta) : g \in K_{\varphi,\psi}(E) \}$. Несущественно изменяя рассуждения, приведенные в [2], можно показать, что для таких семейств справедливо следующее утверждение:

Лемма 4. *Пусть для определенных выше множества E и функции $\psi(x)$ существует некоторая субгармоническая в* $\mathbf{C}$ *функция $V(z)$ такая, что $g(z) \le V(z)$ для любой функции $g \in K_{\varphi,\psi}(E)$, тогда мажоранта класса $K_{\varphi,\psi}(E)$, если она конечна, является непрерывной субгармонической в* $\mathbf{C}$ *и гармонической в $\mathbf{C} \setminus E$ функцией, совпадающей с $-\psi(x)$ на множестве E.*

Доказательство теоремы 2. Докажем достаточность. Пусть сходится ряд (2). Обозначим через λ_n равновесную меру множества E_n^-, выбранную так же, как и при доказательстве теоремы 1, и рассмотрим функции

$$v_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_{E^+}(-R^{2k})}{\ln 1/\gamma_{2k}^-} \int_{E_{2k}^-} \ln \left|1 - \frac{z}{t}\right| d\lambda_{2k}(t),$$

$$v_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_{E^+}(-R^{2k-1})}{\ln 1/\gamma_{2k-1}^-} \int_{E_{2k-1}^-} \ln \left|1 - \frac{z}{t}\right| d\lambda_{2k-1}(t),$$

$$v(z) = v_1(z) + v_2(z).$$

Покажем, что существуют такие константы M' и m, что

$$-\infty < m \le \varliminf_{x \to -\infty} \frac{v(x)}{v_{E^+}(x)} \le \varlimsup_{E^- \ni x \to -\infty} \frac{v(x)}{v_{E^+}(x)} \le M' < 0.$$

Обозначим через M_1, M_2 суммы ряда (2), а через E_e^-, E_o^- — объединения E_n^- по четным и нечетным индексам, соответственно. Покажем, что

$$\varlimsup_{E_e^- \ni x \to -\infty} \frac{v_1(x)}{v_{E^+}(x)} \le M_1' < 0 \quad \text{и} \quad \varlimsup_{E_o^- \ni x \to -\infty} \frac{v_2(x)}{v_{E^+}(x)} \le M_2' < 0.$$

Доказательство проведем только для функции $v_1(z)$. Для этого представим $v_1(z) = \varphi_n(z) + \psi_n(z)$, где

$$\varphi_n(z) = \frac{v_{E^+}(-R^n)}{\ln 1/\gamma_n^-} \int\limits_{E_n^-} \ln \left|1 - \frac{z}{t}\right| d\lambda_n(t).$$

Тогда

$$\varphi_n(z) = \frac{v_{E^+}(-R^n)}{\ln 1/\gamma_n^-} \left[-\int\limits_{E_n^-} \ln \frac{1}{|z-t|} d\lambda_n(t) - \int\limits_{E_n^-} \ln |t| \, d\lambda_n(t) \right] < -v_{E^+}(-R^n),$$

когда $z \in E_n^-$. Последнее неравенство следует из того, что равновесный потенциал

$$\int\limits_{E_n^-} \ln \left| \frac{1}{z-t} \right| d\lambda_n(t) = \ln \frac{1}{\gamma_n^-} \quad \text{при } z \in E_n^-.$$

Отсюда при помощи леммы 2 получаем

$$\lim_{n \to \infty} \sup \left\{ \frac{\varphi_n(x)}{v_{E^+}(x)} : x \in E_n^- \right\} < 0.$$

Как уже говорилось при доказательстве теоремы 1,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\psi_n(z)}{\ln |z|} = M_1, \quad \text{когда} \quad R^n \le |z| \le R^{n+1}.$$

Кроме того, так как множество E^+ не разрежено на бесконечности, то

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln |x|}{v_{E^+}(x)} = 0.$$

Полностью, аналогично тому, как это сделано при доказательстве теоремы 1, получаем, что

$$\varliminf_{x \to -\infty} \frac{v_1(x)}{v_{E^+}(x)} \geq m_i > -\infty, \quad i = 1, 2.$$

Далее можем записать, что

$$\varlimsup_{E^- \ni x \to -\infty} \frac{v(x)}{v_{E^+}(x)} = M' < 0, \quad \varliminf_{x \to -\infty} \frac{v(x)}{v_{E^+}(x)} \geq m = m_1 + m_2 > -\infty.$$

Рассмотрим теперь класс $K_\varphi(E)$, где $\varphi(x) = v_{E^+}(ix)$. Покажем, что этот класс не пуст. Для функции v_{E^+} можно записать представление как

$$v_{E^+}(z) = \int\limits_1^\infty \ln \left| 1 - \frac{z}{t} \right| d\tilde{\mu}(t).$$

Так как масса $\tilde{\mu}([0, \infty))$ бесконечна, то существует такое число N, что $\widetilde{M}_N = \tilde{\mu}([1, N]) > 2M$. Пусть $\delta \in (0, -M'/2)$, тогда функция

$$u_\delta(z) = \frac{1}{-M' - 2\delta} \left[(-M' - 2\delta) v_{E^+}(z) + v(z)\right] - \frac{2M}{\widetilde{M}_N} \int\limits_1^N \ln \left| 1 - \frac{z}{t} \right| d\tilde{\mu}(t) - c,$$

где константа c выбрана так, чтобы $u_\delta(x) \leq 0$ при $x \in E$, принадлежит классу $K_\varphi(E)$. Так как все функции класса, по лемме 1, ограничены сверху функцией $v_{E^+}(z)$, то для класса $K_\varphi(E)$ существует мажоранта $v_E(z)$ и

$$v_E(z) \leq v_{E^+}(z). \tag{6}$$

Построим вспомогательную субгармоническую в C функцию $h(z)$ со следующими свойствами:

1) $h(x) \leq 0$, когда $x \in E^-$, и $h(x) = 0$, когда $x \in E^+$;
2) $h(z)$ имеет конечную риссовскую меру в $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$;
3) $v_E(z) - h(z)$ является субгармонической в $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$;
4) $\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} (v_E - h)(\rho e^{i\theta})\, d\theta \leq c_1 \ln \rho$.

Для этого определим функцию $q(z)$ как мажоранту класса $K_{\varphi, \psi}(E^-)$, где

$$\varphi(x) = \frac{M}{|M'|} \ln^+ |x| \quad \text{и} \quad \psi(x) = v_{E^+}(x).$$

Этот класс не пуст, так как функция

$$g(z) = \frac{1}{|M'|} v(z) - c,$$

где константа c выбрана так, чтобы $g(x) \le -v_{E^+}(x)$, когда $x \in E^-$, принадлежит классу. Поскольку из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln 1/\gamma_n^-},$$

то по аналогии с доказательством теоремы 1 получаем, что класс $K_\varphi(E^-)$ имеет мажоранту, и по лемме 1 получаем, что существует мажоранта класса $K_{\varphi,\psi}(E^-)$. Определим также функцию $\hat{v}(z)$ как мажоранту класса $K_{\varphi,\psi}(E^+)$, где $\varphi(x) = v_{E^+}(ix)$ и $\psi(x) = q(x)$. Этот класс не пуст, так как функция

$$v_{E^+}(z) - \frac{2M}{|M'|\,\tilde{\mu}([1,N])} \int_1^N \ln\left|1 - \frac{z}{t}\right| d\tilde{\mu}(t) \in K_{\varphi,\psi}(E^+), \tag{7}$$

где $\tilde{\mu}$ — ассоциированная мера для функции $v_{E^+}(z)$, а число N выбрано так, чтобы $\tilde{\mu}([1,N]) > 2\frac{M}{|M'|}$. При этом, поскольку функция $v_{E^+}(z)$ является мажорантой класса $K_\varphi(E^+)$, то существует и мажоранта класса $K_{\varphi,\psi}(E^+)$. Определим теперь функцию $h(z) = \hat{v}(z) + q(z)$. По построению $h(x) \le 0$, когда $x \in E^-$, и $h(x) = 0$, когда $x \in E^+$. Тогда, по лемме 1, $v_E(z) \ge h(z)$. Отсюда следует, что $v_E - h$ является субгармонической в $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ функцией.

Докажем свойство 4) функции h. Действительно, так как при достаточно больших ρ из (7) следует, что $\hat{v}(\rho e^{i\theta}) \ge v_{E^+}(\rho e^{i\theta}) - c_2 \ln \rho$, то, учитывая (6), при достаточно больших ρ получаем

$$(v_E - h)(\rho e^{i\theta}) = (v_E - \hat{v} - q)(\rho e^{i\theta}) \le c_3 \ln \rho - q(\rho e^{i\theta}).$$

Откуда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(v_E-h)(\rho e^{i\theta})\,d\theta \le c_4\ln\rho.$$

Покажем теперь, что $\mu\,(E^-)<\infty$, где μ — ассоциированная мера для функции $v_E(z)$ (тем самым достаточность в теореме 2 будет доказана). Воспользуемся для этого формулой Иенсена

$$(v_E-h)(0)=\int_1^{\rho}\frac{n(t;v_E)-n(t;h)}{t}\,dt-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(v_E-h)(\rho e^{i\theta})\,d\theta.$$

Тогда для достаточно больших ρ выполнено неравенство

$$\int_1^{\rho}\frac{n^+(t;v_E)-n^+(t;h)+n^-(t;v_E)-n^-(t;h)}{t}\,dt\le c_5\ln\rho,$$

где $n^{\pm}$ — считающие функции в правой и левой полуплоскостях, соответственно. Так как функция v_E-h является субгармонической в $\{z:\mathrm{Re}\,z>0\}$, то $n^+(t;v_E)-n^+(t;h)\ge 0$, кроме того, так как $h(z)$ имеет конечную по построению массу ассоциированной меры в $\{z:\mathrm{Re}\,z<0\}$, то $n^-(t;h)<c_6$. Таким образом, можно записать, что

$$\int_1^{\rho}\frac{n^-(t;v_E)}{t}\,dt\le c_7\ln\rho.$$

Отсюда следует, что $n^-(t;v_E)$ является ограниченной функцией. Предположим противное. Пусть существует такое число t_0, что $n^-(t;v_E)>100c_7$, тогда при $\rho\ge t_0$

$$\int_1^{\rho}\frac{n^-(t;v_E)}{t}\,dt\ge\int_{t_0}^{\rho}\frac{n^-(t;v_E)}{t}\,dt\ge n^-(t;v_E)\ln\frac{\rho}{t_0}>100c_7\ln\frac{\rho}{t_0}.$$

Таким образом, мы получили $\ln\rho>100\ln\frac{\rho}{t_0}$. Это неравенство при достаточно больших ρ можно привести к противоречию. Это доказывает ограниченность функции $n^-(t;v_E)$.

Докажем необходимость. Пусть множество E относится к типу (B). Тогда функция $v_E(z)$ представима в виде

$$v_E(z) = \left(\int\limits_{-\infty}^{-1} + \int\limits_{1}^{\infty} \right) \ln \left| 1 - \frac{z}{t} \right| d\mu(t) = v_1(z) + v_2(z).$$

Обозначим через μ_1, μ_2 части меры μ, сосредоточенные на E^- и E^+, соответственно. Тогда $\mu_1((-\infty, -1]) = M_1 < \infty$. Покажем, что существуют такие числа x_0 и c_8, что при $x \in E^-$ и $x < x_0$ выполняется неравенство

$$v_2(x) \geq c_8 v_E(x). \tag{8}$$

Обозначим $M_1' = M_1 + \delta$ для некоторого $\delta > 0$, тогда существует $x_1 > 0$ такое, что при $x > x_1$, $x \in E^+$, $v_2(x) \geq -M_1' \ln |x|$. Рассмотрим функцию

$$u(z) = M_1' \ln \left| 2z - 3 + \sqrt{(2z-3)^2 - 1} \right|,$$

которая является положительной гармонической в $\mathbb{C} \setminus [1, 2]$ функцией, удовлетворяющей условиям $u(x) = 0$, когда $x \in [1, 2]$, и $u(z) = |m| \ln |z| + o(\ln |z|)$, когда $|z| \to \infty$. Обозначим $\tilde{v}(z) = v_2(z) + u(z) + c$, где константа c выбрана так, чтобы $\tilde{v}(z) \geq 0$. Рассмотрим теперь класс $K_\varphi(E^+)$, где $\varphi(x) = v_2(ix)$. Этот класс непуст, так как функция $v_E \in K_\varphi(E^+)$. Для всех функций $g \in K_\varphi(E^+)$ выполнены условия леммы 1

$$\varlimsup_{|y| \to \infty} [g(iy) - (1 + \varepsilon) \tilde{v}(|iy|)] \leq 0$$

для любого $\varepsilon > 0$ и

$$g(x) \leq \tilde{v}(x), \quad x \in E^+.$$

Следовательно, класс $K_\varphi(E^+)$ имеет мажоранту $v_{E^+}(z)$. Таким образом, $v_{E^+}(z) \leq \tilde{v}(z)$. Откуда и следует неравенство (8).

Представим теперь $v_1(z) = \varphi_n(z) + \psi_n(z)$, где

$$\varphi_n(z) = \int\limits_{\Omega_n} \ln \left| 1 - \frac{z}{t} \right| d\mu_1(t), \quad \Omega_n = \{ z : R^{n-1} \leq |z| \leq R^{n+2} \}.$$

Если обозначим $\omega_n = \{ z : R^n \leq |z| \leq R^{n+1} \}$, то, как уже указывалось,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\psi_n(z)}{\ln |z|} = M_1 , \ z \in \omega_n ,$$

и, следовательно, слагаемым ψ_n можно (с точностью до множителя) пренебречь. То есть при $x \in E^-$, $x < x_0$,

$$\varphi_n(x) = -v_2(x) - \psi_n(x) \le -c_9 v_2(x) \le -c_{10}\, v_{E^+}(x).$$

Тогда

$$\int_{E_n^-} \varphi_n(x)\, d\lambda_n(x) \le -c_{10} \int_{E_n^-} v_{E^+}(x)\, d\lambda_n(x) \le c_{10}\, v_{E^+}(-R^n).$$

С другой стороны,

$$\int_{E_n^-} \varphi_n(x)\, d\lambda_n(x) = \int_{E_n^-} \left(\int_{\Omega_n} \ln \left| 1 - \frac{x}{t} \right| d\mu_1(t) \right) d\lambda_n(x) =$$

$$= \int_{\Omega_n} \left(\int_{E_n^-} \ln \frac{1}{|x-t|}\, d\lambda_n(t) - \int_{E_n^-} \ln |t|\, d\lambda_n(t) \right) d\mu_1(x) \ge$$

$$\ge \left[-\ln \frac{1}{\gamma_n^-} - (n+1) \ln R \right] \mu_1(\Omega_n).$$

Таким образом,

$$c_{10} v_{E^+}(-R^n) \le \left[\ln \frac{1}{\gamma_n^-} + (n+1) \ln R \right] \mu_1(\Omega_n) \le c_{11} \left[\ln \frac{1}{\gamma_n^-} \right] \mu_1(\Omega_n).$$

Теорема доказана.

Перейдем теперь к доказательству вспомогательных утверждений.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 2. Монотонность функции $v_E(x)$ при $x < 0$ следует из того, что $v_E(-R) = \sup \{ v_E(z) : |z| \le R \}$. Для функции $v_E(z)$ справедливо представление

$$v_E(z) = \int_1^\infty \ln \left| 1 - \frac{z}{t} \right| d\mu(t).$$

При $x>0$, интегрируя по частям и используя то, что $\mu([1,t]) = o(t)$, $t\to\infty$, получим

$$v_E(-x) = \int_1^\infty \ln\left(1+\frac{x}{t}\right) d\mu(t) = x\int_1^\infty \frac{\mu([1,t])}{t(x+t)}\,dt.$$

Тогда вторая часть утверждения следует из неравенств

$$\frac{1}{R} < \frac{x+t}{Rx+t} < 1.$$

Доказательство леммы 3. Докажем левую часть неравенства 1). Для этого рассмотрим класс $K_\psi(\hat{E})$, где $\psi(x) = v_E(ix)$. Этот класс непуст, так как функция $v_E(z) - M(r, v_E) \in K_\psi(\hat{E})$, где $M(r, v_E) = \max\{v_E(z): |z| \le r\}$. Кроме того, все функции из класса $K_\psi(\hat{E})$, по лемме 1, ограничены сверху функцией $v_E(z)$. Значит, класс $K_\psi(\hat{E})$ имеет мажоранту $v_{\hat{E}}(z)$. Поскольку $K_\varphi(\hat{E}) \subset K_\varphi(E)$, то класс $K_\varphi(\hat{E})$ имеет мажоранту, которая в силу единственности совпадает с $v_{\hat{E}}(z)$. По построению $v_{\hat{E}}(z) \le v_E(z)$. Теперь, если доказать, что существует мажоранта класса $K_\varphi(\tilde{E})$, то аналогично получим правую часть неравенства 1). Обозначим $\hat{E}_R = \hat{E} \cup \{x: |x| \ge R\}$ и $\tilde{E}_R = \tilde{E} \cup \{x: |x| \ge R\}$.

Рассмотрим классы $\hat{K}_R = K_\psi(\hat{E}_R)$ и $\tilde{K}_R = K_\psi(\tilde{E}_R)$, где $\psi(x) = |x|$. Эти классы непусты, так как функция $g(z) = |\operatorname{Im} z|$ принадлежит им. Легко видеть, что все функции из классов $\hat{K}_R$ и $\tilde{K}_R$ мажорируются функцией $\operatorname{Im}\sqrt{z^2 - R^2}$ (являющейся мажорантой класса $K_\psi(\{|x| \ge R\})$). Значит, классы $\hat{K}_R$ и $\tilde{K}_R$ имеют мажоранты. Обозначим их через $\hat{v}_R$ и $\tilde{v}_R$, соответственно. Так как $\hat{K}_R \subset \tilde{K}_R$, то, по лемме 1,

$$\hat{v}_R(z) \le \tilde{v}_R(z) \le \hat{v}_R(z) + M(r, \tilde{v}_R). \tag{9}$$

Рассмотрим множество $\{\hat{v}_R(i), R>0\}$. Пусть оно не ограничено сверху. Обозначим

$$\hat{v}_R^*(z) = \frac{\hat{v}_R(z)}{\hat{v}_R(i)} \quad \text{и} \quad \tilde{v}_R^*(z) = \frac{\tilde{v}_R(z)}{\tilde{v}_R(i)}.$$

Тогда, как показано в [2], для обоих семейств существует такая последовательность $R_n\to\infty$, что $\hat{v}_{R_n}^*(z) \to \hat{v}_\infty^*(z)$ и $\tilde{v}_{R_n}^*(z) \to \tilde{v}_\infty^*(z)$ равномерно на любом компакте в $\mathbb{C}\setminus\hat{E}$ и в $\mathbb{C}\setminus\tilde{E}$, соответственно, и предельные функции являются там гармоническими. Тогда $\hat{v}_\infty^*(z) = v_{\hat{E}}(z)$. В силу неравенства (9), получаем

$$\tilde{v}_R^*(z) = \frac{\hat{v}_R(z)}{\tilde{v}_R(i)} + \frac{M(r, \tilde{v}_R)}{\tilde{v}_R(i)} \le \hat{v}_R^*(z) + M(r, \tilde{v}_R^*).$$

Для любого компакта F из $C \setminus \hat{E}$ существует такое число N_1, что при $n > N_1$ и $z \in F$ выполняется неравенство $\hat{v}_{R_n}^*(z) \le v_{\hat{E}}(z) + c_{11}$. Докажем, что $M(r, \tilde{v}_{R_n}^*)$ ограничена. Пусть это не так, тогда $M_n = M(r, \tilde{v}_{R_n}^*) \to \infty$. Существует такое число N_2, что при $n > N_2$ выполняется неравенство $M(r, v_{\hat{E}}) \le M_n$. Возьмем теперь $n > \max\{N_1, N_2\}$ и рассмотрим последовательность функций

$$h_n(z) = \frac{1}{M_n} \tilde{v}_{R_n}^*(z).$$

Тогда $h_n(z) \le 2$ при $z \in F$. Так как компакт F выбирался произвольным, то последовательность $h_n(z)$ равномерно сходится к нулю на любом компакте из $C \setminus \hat{E}$ при $n \to \infty$, но это противоречит тому, что $M(r, h_n) = 1$. Таким образом, $\tilde{v}_R^*(z) \le v_{\hat{E}}(z) + c_{12}$ и, следовательно,

$$v_{\tilde{E}}(z) = \tilde{v}_\infty^*(z) \le v_{\hat{E}}(z) + c_{12}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда множество $\{\hat{v}_R(i), R > 0\}$ ограничено. Тогда существует такая последовательность R_n, что $\hat{v}_{R_n}(z) \to \hat{v}_\infty(z) = v_{\hat{E}}(z)$ и $\tilde{v}_{R_n}(z) \to \tilde{v}_\infty(z)$ при $n \to \infty$. По лемме 1, $\hat{v}_{R_n}(z) \le v_{\hat{E}}(z)$ и, в силу неравенства (9), получаем

$$\hat{v}_{R_n}(z) \le v_{\hat{E}}(z) + M(r, \tilde{v}_{R_n}).$$

Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, получаем, что

$$v_{\tilde{E}}(z) = \tilde{v}_\infty^*(z) \le v_{\hat{E}}(z) + c_{13}.$$

Тем самым лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. Несущественно изменяя рассуждения, приведенные в [2, теорема 1. 1], можно получить, что $v_E(z)$ является субгармонической в C и гармонической в $C \setminus E$ функцией.

Покажем, что $v_E(x) < -\psi(x)$, когда $x \in E$. Пусть $x_0 \in E$ и $\rho > 0$. Обозначим $B(x_0, \rho) = \{z : |z - x_0| < \rho\}$, $M = \max\{V(z) : |z - x_0| \le \rho\}$ и определим функцию $h(z)$ как решение задачи Дирихле для области $B(x_0, \rho) \setminus E$ и граничных условий $h(\zeta) = M$, когда $|\zeta - x_0| = \rho$ и $h(x) = -\psi(x)$ при $x \in E \bigcup B(x_0, \rho)$. Так как множество E является регулярным, а функция ψ непрерывна, то функция $h(z)$ существует и является непрерывной в точке x_0. По принципу максимума $g(z) \le h(z)$, когда $z \in B(x_0, \rho)$ для любой функции $g \in K_{\varphi,\psi}(E)$. Тогда и $\hat{v}(z) \le h(z)$ при $z \in B(x_0, \rho)$. Значит,

$$v_E(x_0) = \limsup_{\delta \to 0} \{\hat{v}(z) : |z - x_0| < \delta\} \le$$

$$\le \limsup_{\delta \to 0} \{h(z) : |z - x_0| < \delta\} = h(x_0) = -\psi(x_0).$$

Пусть теперь точка $x_0 \in E$ такова, что $v_E(x_0) < -\psi(x_0)$. Обозначим $\theta = -\psi(x_0) - v_E(x_0)$. Так как функция $\psi(x)$ непрерывна, а функция $v_E(z)$ — субгармоническая, то существует такое $\varepsilon > 0$, что при $z \in B(x_0, \varepsilon)$ и $|x - x_0| < \varepsilon$ выполняются неравенства $v_E(z) < v_E(x_0) + \theta/2$ и $\psi(x) < \psi(x_0) + \theta/2$. Следовательно, при указанных z и x для любой функции $g \in K_{\varphi,\psi}(E)$ выполнено неравенство $g(z) \le v_E(z) < \psi(x)$. Таким образом, вместе с любой функцией $g(z)$ семейство $K_{\varphi,\psi}(E)$ содержит также функцию $\tilde{g}(z)$, совпадающую с $g(z)$ в дополнении к $B(x_0, \varepsilon)$ и со своей гармонической мажорантой в $B(x_0, \varepsilon)$. Рассуждая аналогично тому, как это было сделано в [2, теорема 1. 1], получаем, что $v_E(z)$ является гармонической в $B(x_0, \varepsilon)$.

Обозначим через $\tilde{E}$ замкнутое множество $\{x \in E : v_E(x) = -\psi(x)\}$. Из сказанного выше следует, что $v_E(z)$ является непрерывной субгармонической в $\mathbf{C}$ и гармонической в $\mathbf{C} \setminus \tilde{E}$ функцией. Покажем, что $\tilde{E} = E$. Для этого сначала покажем, что $\tilde{E}$ — неограниченное множество. Если это не так, то функция $v_E(z)$ имеет конечную полную массу риссовской меры и, следовательно, $v_E(z) = \ln|z| + o(\ln|z|)$, $|z| \to \infty$. С другой стороны, в [2, лемма 2. 5] показано, что в интервалах $\mathbf{R} \setminus E$ функция $v_E(z)$ является выпуклой вверх. Так как в то же время функция $-\psi(x)$ является выпуклой вниз и монотонно убывающей к $-\infty$ при $|x| \to \infty$, то функция $v_E(x)$ должна стремиться к $-\infty$ по множеству E быстрее некоторой линейной функции, а это противоречит ее асимптотическому поведению. Значит, $\tilde{E}$ — не ограничено. Пусть теперь $x_0 \in E \setminus \widetilde{E}$, тогда существуют такие точки x_1, $x_2 \in \widetilde{E}$, что $x_0 \in (x_1, x_2) \subset \mathbb{R} \setminus \widetilde{E}$. Учитывая выпуклость функций v_E и ψ, получаем, что $v_E(x_0) > -\psi(x_0)$, а это противоречит тому, что $v_E(x_0) \leq -\psi(x_0)$. Таким образом, $\widetilde{E} = E$, и лемма доказана.

Автор благодарен А. Ф. Гришину и М. Л. Содину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

1. *Н. И. Ахиезер, Б. Я. Левин*, Обобщение неравенства С. Н. Бернштейна для производных от целых функций. В кн: Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного (ред. А. И. Маркушевич). Физматгиз, Москва (1960), с. 125–183.
2. *Б. Я. Левин*, Мажоранты в классах субгармонических функций. В сб. : I, II. Теория функций, функц. анализ и их прил. (1989), т. 51, с. 3–17; т. 52, с. 3–33.
3. *Б. Я. Левин*, Полнота систем функций, квазианалитичность и субгармонические мажоранты.— Зап. науч. семин. ЛОМИ (1989), т. 170, с. 102–156.
4. *В. А. Марченко, И. В. Островский*, Характеристика спектра оператора Хилла. — Мат. сб. (1975), т. 97(139), № 4(8), с. 540–606.
5. *M. Benedicks*, Positive harmonic functions vanishing on the boundary of certain domains in $\mathbb{R}^n$. — Ark. Math. (1960), v. 18, No 1, p. 53–72.
6. *M. Arsove and A. Huber*, Local behavior of subharmonic functions.— Indiana Univ. Math. J. (1973), v. 22, No 12, p. 1191–1199.

The characterization of conformal maps of the upper halfplane on a "comb" type domain

A. V. Kesarev

The domain $\{ z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re} z < b,\ \operatorname{Im} z > 0 \} \setminus \{ \cup\ [x_k, x_k + iy_k] \}$ is called a "comb" type domain. For each closed set E on the real axis there exists the unique conformal map of the upper halfplane onto a certain "comb" type domain of mapping the set E on the interval (a, b). If $a = -\infty$ and $b = +\infty$, then the set E is referred to the type (A). If either $a = -\infty$, $b < +\infty$ or $a > -\infty$, $b = +\infty$, then E is referred to the type (B). If both a and b are finite, then E is referred to the type (C). Conditions for a set E to be referred to the type (A), (B) or (C) are given.

Характеризація конформних відображень верхньої напівплощини на області типу "гребінки"

О. В. Кесарєв

Областю типу "гребінки" називаеться область виду $\{ z \in \mathbb{C} : -\infty \leq a < \operatorname{Re} z < b \leq +\infty,\ \operatorname{Im} z > 0 \} \setminus \{ \cup\ [x_k, x_k + iy_k] \}$. Верхню напівплощину с заданою замкненою множиною E на межі можливо єдиним способом відобразити на деяку область типу "гребінки," переводячи множину E в інтервал (a, b). Якщо до того ж $a = -\infty$ і $b = +\infty$, то множина E відноситься до типу (A), якщо або $a = -\infty$, $b < +\infty$, або $a > -\infty$, $b = +\infty$, то E відноситься до типу (B), а якщо $-\infty < a < b < +\infty$, то до типу (C). Приводяться деякі умови того, що E відноситься до типу (A), (B) або (C).