Математическая физика, анализ, геометрия
1996, т. 3, № 3/4, с. 339-355

Вполне омбилические подмногообразия в $G(2, n)$. III

Ю. А. Николаевский

Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 15 декабря 1993 года

Статья является продолжением работ с таким же названием I, II, опубликованных в Укр. геом. сб. (1992, 1993), вып. 34, 35. Дана полная классификация вполне омбилических поверхностей в грассмановом многообразии $G(2, n)$.

Статья является тематическим продолжением работ [1,2], в которых были классифицированы омбилические подмногообразия размерности ≥ 3 в многообразии Грассмана $G(2, n)$. Основная теорема [1, 2] состоит в том, что всякое такое подмногообразие либо вполне геодезично, либо лежит как вполне омбилическое в сфере, или в произведении сфер, или в произведении сферы и окружности, вполне геодезических в $G(2, n)$. Поскольку вполне геодезические подмногообразия в $G(2, n)$ хорошо известны [3], остается описать лишь омбилические подмногообразия в сферах и их произведениях, что также проводится в этих работах.

В настоящей статье полностью классифицированы вполне омбилические двумерные подмногообразия (поверхности) в $G(2, n)$ и тем самым исчерпан вопрос об омбилических подмногообразиях в многообразии Грассмана $G(2, n)$. Оказывается, что в размерности 2 ничего нового по сравнению с многомерным случаем нет. Тем не менее методы доказательства здесь иные. Нумерация параграфов продолжает нумерацию из работ [1, 2], нумерация формул и ссылок на литературу — самостоятельная.

5. Основная теорема

Вкратце приведем определения и факты, которые нам понадобятся, отсылая читателя за подробностями к [1] или [4].

Подмногообразие N^l риманова многообразия M^n называется *вполне омбилическим*, если его вторая квадратичная форма "пропорциональна" первой:

$$h(X, Y) = g(X, Y)H,$$

где h — вторая квадратичная форма $N \subset M$, g — метрика на M (и индуцированная на N), X и Y — произвольные касательные к N векторные поля, $H = \frac{1}{l} Trh$ — поле вектора средней кривизны $N \subset M$ (легко видеть, что именно оно будет "коэффициентом пропорциональности"). При этом, если $H = 0$ (и $h = 0$), N называется *вполне геодезическим*; если $H \neq 0$, но $DH = 0$ (H параллельно в нормальной связности D подмногообразия $N \subset M$) — *внешней сферой*; в противном случае ($DH \neq 0$ хотя бы в одной точке) — *существенно вполне омбилическим* (это — "общий случай"). Функцию $\alpha = \|H\| = \sqrt{g(H, H)}$ будем называть средней кривизной $N \subset M$.

Многообразием Грассмана $G(2, n)$ называется множество двумерных подпространств евклидова пространства E^n, наделенное метрикой такой, что квадрат расстояния между двумя подпространствами равен сумме квадратов стационарных углов между ними [5], и стандартной дифференциальной структурой. Эта метрика оказывается римановой и превращает $G(2, n)$ в компактное симметрическое риманово пространство $O(n)/O(n-2) \times O(2)$, где $O(k)$ — ортогональная группа $k \times k$-матриц [6].

При подходящем выборе локальных координат можно отождествить касательное пространство М к $G(2, n)$ в точке O с пространством $2(n-2)$-матриц; при этом для $X, Y \in$ М их скалярное произведение $g(X, Y) = Tr(X, Y')$ (в частности $\|X\|^2 = TrXX'$), для $X, Y, Z \in$ М тензор кривизны $\widetilde{R}$ многообразия $G(2, n)$ имеет вид: $\widetilde{R}(X, Y)Z = (XY' - YX')Z - Z(X'Y - Y'X)$. В М определено действие группы изотропии $O(n-2) \times O(2)$ по формуле $Ad_{U \times V} X = VXU'$ для $U \in O(u-2)$, $V \in O(2)$ и $X \in$ М. Оно сохраняет g и $\widetilde{R}$.

В соответствии с [3], всякое максимальнсе по включению вполне геодезическое подмногообразие в $G(2, n)$ есть либо $G(2, n-1)$, либо $S^p \times S^q$ ($p + q = n - 2$; p, $q \geq 0$), либо CP^m ($m = [n/2] - 1$). Соответственно, полный список вполне геодезических подмногообразий в $G(2, n)$ содержит все $G(2, k)$ с $1 \leq k \leq n - 1$, произведения $S^p \times S^q$ с $2 \leq p + q \leq n - 2$, p, $q \geq 0$ (в частности сферы $S^p = S^p \times S^0$ и произведения сфер на окружности $S^p \times S^1$), диагонали $S^p \subset S^p \times S^p$ ($2 \leq p \leq [n/2] - 1$), и CP^k с $1 \leq k \leq [n/2] - 1$ (в частности $G(2, 4) = S^2 \times S^2 = CP^1 \times CP^1$).

Произведения сфер $S^p \times S^q$ из этого списка будем называть стандартными произведениями (в частности стандартными сферами, если $p = 0$ и $q = 0$). Эти произведения устроены так: пространство E^n раскладывается в ортогональную сумму $E^{p+1} \dotplus E^{q+1} \dotplus E^{n-p-q-2}$ и подпространство $\pi \in S^p \times S^q \subset G(2, n)$ тогда и только тогда, когда $\pi = \mathrm{Span}\,(u, v)$, $u \in E^{p+1}$, $v \in E^{q+1}$.

Имеет место следующая

Теорема. *Пусть $F^2 \subset G(2, n)$ — вполне омбилическое связное подмногообразие. Тогда оно либо 1) вполне геодезично, либо 2) является внешней сферой и $F^2 = S^2 \subset S^3$, где S^3 — стандартная сфера или сфера-диагональ, а S^2 — малая сфера в ней, либо 3) существенно вполне омбилично, и тогда оно является либо а) существенно вполне омбилической гиперповерхностью в стандартном $S^2 \times S^1 \subset G(2, n)$, либо б) существенно вполне омбилической гиперповерхностью во вполне геодезическом произведении $S^2 \times S^1 \subset S^2 \times S^2 = G(2, 4) \subset G(2, n)$, либо в) существенно вполне омбилическим подмногообразием постоянной средней кривизны, изометричным сфере S^2, в стандартном $S^2 \times S^3$.*

Отметим, что омбилические гиперповерхности в $S^2 \times S^1$ (пп. 3а) и 3б)) классифицированы в [1, утверждение а)]. Что касается случая 3в), то он фактически описан в [1, утверждение б)], однако здесь будет дано доказательство при $l = 2$ следующего утверждения.

Утверждение в). Пусть $F^2 \subset S^3 \times S^3$ — существенно вполне омбилическая сфера постоянной средней кривизны. Тогда F^2 является "косой диагональю" в следующем смысле: если $\{u^1, u^2, u^3\}$ и $\{v^1, v^2, v^3\}$ — локальные координаты на сомножителях S^3 такие, что метрика $S^3 \times S^3$ имеет вид

$$dS^2 = (du^1)^2 + \sin^2 u^1((du^2)^2 + \sin^2 u^2(du^3)^2) +$$

$$+ (dv^1)^2 + \sin^2 v^1((dv^2)^2 + \sin^2 v^2(dv^3)^2),$$

то F^2 конгруэнтна области на подмногообразии $u^1 = R$, $v^1 = r$, $u^2 = v^2$, $u^3 = v^3$, $0 < R \neq r < \pi$, и хотя бы одно из чисел R и r не равно $\pi/2$ [1, рис. 26].

З а м е ч а н и е. Теорема и утверждение носят локальный характер и будут доказываться локальными средствами. Понятно, однако, что то же выполнено и "в целом".

6. Схема доказательства

Уравнения Гаусса–Кодацци и Риччи [7] для двумерного омбилического подмногообразия $F^2 \subset M^n$ имеют вид

$$\widetilde{R}(X, Y)Y = (k - \alpha^2)X + D_X H; \tag{1}$$

$$\widetilde{R}(X, Y, \xi, \eta) = R^D(X, Y, \xi, \eta) = g\,(D_X D_Y \xi - D_Y D_X \xi - D_{[X, Y]}\xi, \eta), \tag{2}$$

где X, Y — касательные к F векторные поля (ортонормированные в (1)); k — гауссова кривизна F, $\alpha = \|H\|$ — средняя кривизна; D — произвольная в нормальной связности; R^D — ее тензор кривизны; ξ и η — нормальные векторные поля к F; $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ — скобка Ли полей X и Y; ∇ — связность на F, индуцированная связностью $\widetilde{\nabla}$ на M.

Эти уравнения в случае, когда M — симметрическое пространство, влекут равенства (лемма 1):

$$k - 2\alpha^2 = \beta = \text{const}; \tag{3}$$

$$\widetilde{R}(X, Y)H = \xi X + \zeta Y; \tag{4}$$

$$\widetilde{R}(H, X)H + \widetilde{R}(X, Y)(\widetilde{R}(X, Y)X) + k\widetilde{R}(X, Y)Y = \rho Y + \tau X + \zeta H; \tag{5}$$

$$\widetilde{R}(H, Y)H + \widetilde{R}(Y, X)(\widetilde{R}(Y, X)Y) + k\widetilde{R}(Y, X)X = \rho X + \sigma Y + \xi H; \tag{6}$$

$$\widetilde{R}(H, X)(\widetilde{R}(Y, X)X - k/2Y) + \xi\widetilde{R}(X, Y)Y =$$

$$= \frac{1}{4}(Y\tau - 2\rho\varphi - 2k\xi)X + \frac{1}{4}(Y\rho + (\tau - \sigma)\varphi + \zeta k)Y + \frac{\rho}{2}H; \tag{7}$$

$$\widetilde{R}(H, Y)(\widetilde{R}(X, Y)Y - k/2X) + \zeta\widetilde{R}(Y, X)X =$$

$$= \frac{1}{4}(X\sigma - 2\rho\psi - 2k\zeta)Y + \frac{1}{4}(X\rho + (\sigma - \tau)\psi + \xi k)X + \frac{\rho}{2}H; \tag{8}$$

$$\widetilde{R}(H, Y)(\widetilde{R}(Y, X)X - \frac{k}{2}Y) - \widetilde{R}(H, X)(\widetilde{R}(X, Y)Y - \frac{k}{2}X) +$$

$$+ \xi\widetilde{R}(Y, X)X - \zeta R(X, Y)Y =$$

$$= \frac{1}{4}(Y\rho + (\tau - \sigma)\varphi)X - \frac{1}{4}(X\rho + (\sigma - \tau)\psi)Y + \frac{1}{2}(\sigma - \tau)H, \tag{9}$$

где

$$\varphi = g(\nabla_Y X, Y), \psi = g(\nabla_X Y, X), \quad \zeta = Xk/4, \quad \xi = Yk/4,$$

$$4\rho = (XY - \nabla_X Y)k = (YX - \nabla_Y X)k,$$

$$4\tau = (-YY - \nabla_Y Y)k, \; 4\sigma = (-XX + \nabla_X X)k \; -$$

функции на F, поля X и Y — ортонормированы.

В доказательстве теоремы случай 1) получается из списка в [3], случай 2) следует из того, что внешняя сфера в симметрическом пространстве является малой гиперсферой во вполне геодезическом подмногообразии постоянной кривизны [8,9]; у нас таковым может быть только стандартная S^3. Остается случай 3).

Нам необходимо следующее

Утверждение А [10, утверждение 1]. *Пусть M — риманово пространство, $Q \in M$, L — l-мерное подпространство в $T_Q M$, H' — вектор в $T_Q M$, ортогональный к L. Тогда*

1) *существует не более одного вполне омбилического подмногообразия $N \subset M$ такого, что $Q \in N$, $T_Q N = L$ и вектор средней кривизны подмногообразия N в точке Q $H_{|Q} = H'$;*

2) *если такое подмногообразие существует, то оно лежит как вполне омбилическое подмногообразие в (наименьшем по включению) геодезическом подмногообразии $\widetilde{M} \subset M$ таком, что $\widetilde{M} \ni Q$ и $T_Q \widetilde{M} \supset L \dotplus H'$.*

Поскольку для объемлющего симметрического пространства вполне геодезические подмногообразия являются экспонентами тройных систем Ли [6], задача сводится к чисто алгебраической, а именно: найти наименьшую тройную систему Ли в $\mathbf{M} = T_O G(2, n)$, содержащую три попарно ортогональных вектора X, Y и H таких, что $\|X\| = \|Y\| = 1$, $\|H\| = \alpha > 0$, и выполнены равенства (3)–(9). При этом будем считать, что находимся в точке общего положения, т.е. $\alpha \neq 0$; $DH \neq 0$ (значит, $T_O F = \mathrm{Span}\,\{X, Y\}$ не является тройной системой Ли); $Xk \neq 0$ или $Yk \neq 0$, либо k (локально) постоянна и, в частности, $\rho = \sigma = \tau = 0$.

Фактически доказательство состоит в решении этой алгебраической задачи, однако мы будем в некоторых местах обращаться к ее геометрическому содержанию. Восстановление по полученным тройным системам Ли подмногообразиий из п. 3) теоремы не составит труда.

Для доказательства утверждения в) достаточно только проверить, что описанное в нем подмногообразие — омбилическое с постоянными k и α.

7. Доказательства

Лемма 1. *Пусть $F^2 \subset M$ — двумерное вполне омбилическое подмногообразие в локально симметрическом пространстве. Тогда выполнены следующие равенства:*

$$k - 2\alpha^2 = \mathrm{const} = \beta; \tag{3}$$

$$\widetilde{R}(X, Y)H = \xi X + \zeta Y; \tag{4}$$

$$\widetilde{R}(H, X)H + \widetilde{R}(X, Y)(\widetilde{R}(X, Y)X) + k\widetilde{R}(X, Y)Y = \rho Y + \tau X + \zeta H; \tag{5}$$

$$\widetilde{R}(H, Y)H + \widetilde{R}(Y, X)(\widetilde{R}(Y, X)Y) + k\widetilde{R}(Y, X)X = \rho X + \sigma Y + \xi H; \tag{6}$$

$$\widetilde{R}(H, X)(\widetilde{R}(Y, X)X - k/2Y) + \xi\widetilde{R}(X, Y)Y =$$
$$= \frac{1}{4}(Y\tau + 2\rho\varphi - 2k\xi)X + \frac{1}{4}(Y\rho + (\tau - \sigma)\varphi + \zeta k)Y + \frac{\rho}{2}H; \tag{7}$$

$$\widetilde{R}(H, Y)(\widetilde{R}(X, Y)Y - k/2X) + \zeta\widetilde{R}(Y, X)X =$$
$$= \frac{1}{4}(X\sigma - 2\rho\psi - 2k\zeta)Y + \frac{1}{4}(X\rho + (\sigma - \tau)\psi + \xi k)X + \frac{\rho}{2}H; \tag{8}$$

$$\widetilde{R}(H, Y)(\widetilde{R}(Y, X)X) - \widetilde{R}(H, X)(\widetilde{R}(X, Y)Y - k/2X) +$$
$$+ \xi\widetilde{R}(Y, X)X - \zeta\widetilde{R}(X, Y)Y =$$
$$= \frac{1}{4}(Y\rho + (\tau - \sigma)\varphi)X - \frac{1}{4}(X\rho + (\sigma - \tau)\psi)Y + \frac{1}{2}(\sigma - \tau)H, \tag{9}$$

где X и Y — ортонормированные касательные векторные поля вдоль F; k — гауссова кривизна F; $\widetilde{R}$ — тензор кривизны M; H — поле вектора средней кривизны $F \subset M$, $\alpha = \|H\|$, $\xi = Yk/4$, $\zeta = Xk/4$, $\rho = (XY - \nabla_X Y)k/4 = (YX - \nabla_Y X)k/4$, $\tau =$ $= (-YY + \nabla_Y Y)k/4$, $\sigma = (-XX + \nabla_X X)k/4$ — функции на F (∇ — связность на F).

Доказательство леммы 1. Мы будем пользоваться локальной симметричностью M, т.е. равенством $\widetilde{\nabla}\widetilde{R} = 0$, где $\widetilde{\nabla}$ — риманова связность на M; формулами Гаусса и Вейнгартена, которые в случае омбилического подмногообразия имеют вид

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(X, Y)H; \tag{10}$$

$$\widetilde{\nabla}_X \eta = D_X \eta - g(\eta, H)X \tag{11}$$

для касательных к F (не обязательно ортонормированных) полей X, Y и нормированного η; здесь D — производная в нормальной связности, g — метрика на M (и на F). Из уравнения Гаусса (1) для ортонормированных X и Y имеем

$$\widetilde{R}(X, Y, Y, X) = k - \alpha^2.$$

Дифференцируя вдоль X, получаем с учетом (10) и двумерности F: $\widetilde{R}(H, Y, Y, X) + \widetilde{R}(X, Y, Y, H) = X(k - \alpha^2)$, откуда, в силу уравнения Кодацци, $X(k - \alpha^2) = 2g(D_X H, H) = X\alpha^2$. Выражение (3) доказано.

Для доказательства (4) продифференцируем (1):

$$\widetilde{R}(X,H)Y+\widetilde{R}(X,Y)H+\widetilde{R}(X,Y)\nabla_Y Y=$$

$$=(Y(k-\alpha^2))X+(k-\alpha^2)\nabla_Y X-g(D_X H,H)Y+D_Y D_X H,$$

откуда, с учетом (1), (3) и ортонормированности X и Y,

$$\widetilde{R}(X,H)Y+\widetilde{R}(X,Y)H=\left(\frac{1}{2}Yk\right)X-\left(\frac{1}{4}Xk\right)Y+D_Y D_X H-D_{\nabla_Y X}H.$$

Поменяем местами Y и X, тогда

$$\widetilde{R}(Y,H)X+\widetilde{R}(Y,X)H=\left(\frac{1}{2}Xk\right)Y-\left(\frac{1}{4}Yk\right)X+D_X D_Y H-D_{\nabla_X Y}H.$$

Вычтем из второго равенства первое:

$$-2\widetilde{R}(X,Y)H+\widetilde{R}(Y,H)X+\widetilde{R}(H,X)Y=\left(\frac{3}{4}Xk\right)Y-\left(\frac{3}{4}Yk\right)X+R^D(X,Y)H.$$

Теперь, в силу тождества Якоби и уравнения Риччи,

$$-3\widetilde{R}(X,Y)H-(\widetilde{R}(X,Y)H)^{\perp}=\left(\frac{3}{4}Xk\right)Y-\left(\frac{3}{4}Yk\right)X,$$

где $(\widetilde{R}(X,Y)H)^{\perp}$ — нормальная компонента поля $\widetilde{R}(X,Y)H$, равная

$$\widetilde{R}(X,Y)H-\widetilde{R}(X,Y,H,X)X-\widetilde{R}(X,Y,H,Y)Y=$$

$$=\widetilde{R}(X,Y)H-\left(\frac{1}{4}Yk\right)X+\left(\frac{1}{4}Xk\right)Y$$

(по (2)). Отсюда

$$-4\widetilde{R}(X,Y)H=(Xk)Y-(Yk)X.$$

Таким образом, (4) доказано.

Понятно, что из равенств (5) и (6) достаточно проверить одно из них. Продифференцируем (4) по Y:

$$\widetilde{R}(X,H)H+\widetilde{R}(X,Y)D_Y H-\alpha^2\widetilde{R}(X,Y)Y=$$

$$=(Y\xi)X+\xi\nabla_Y X-\zeta\nabla_Y Y-\zeta H-(Y\zeta)Y.$$

Подставляя из (1) $D_Y H=\widetilde{R}(Y,X)X-(k-\alpha^2)Y$, получим

$$\widetilde{R}(X,H)H+\widetilde{R}(X,Y)(\widetilde{R}(Y,X)X)-k\widetilde{R}(X,Y)Y=$$

$$-(-\zeta g(\nabla_Y Y, X) + Y\xi)X + (\xi g(\nabla_Y X, Y) - Y\zeta)Y - \zeta H,$$

откуда следует (5).

Равенства (7)–(9) получаются дифференцированием (5) и (6). Дифференцируя (5) вдоль Y, получаем

$$\widetilde{R}(\widetilde{R}(Y, X)X, X)H - k\widetilde{R}(Y, X)H + \varphi\widetilde{R}(H, Y)H +$$
$$+\widetilde{R}(H, X)(\widetilde{R}(Y, X)X) - k\widetilde{R}(H, X)Y + \widetilde{R}(X, H)(\widetilde{R}(X, Y)X) +$$
$$+\widetilde{R}(X, Y)(\widetilde{R}(X, H)X + \varphi\widetilde{R}(X, Y)(\widetilde{R}(X, Y)Y) +$$
$$+4\xi\widetilde{R}(X, Y)Y + k\widetilde{R}(X, H)Y + k\widetilde{R}(X, Y)H - \varphi k\widetilde{R}(X, Y)X =$$
$$= (Y\rho + \varphi\tau - \zeta k)Y + (Y\tau - \varphi\rho)X + (Y\zeta + \rho)H + \zeta\widetilde{R}(Y, X)X.$$

Слева при φ стоит как раз выражение, представляющее левую часть равенства (6). Используя еще и (4), получаем

$$2\widetilde{R}(H, X)(\widetilde{R}(Y, X)X) + \widetilde{R}(\widetilde{R}(Y, X)X, X) +$$
$$+\widetilde{R}(X, Y)(\widetilde{R}(X, H)X - 2k\widetilde{R}(H, X)Y + 4\xi\widetilde{R}(X, Y)Y - \xi\widetilde{R}(Y, X)X) =$$
$$= (Y\rho + \varphi(\tau - \sigma) + \zeta k)Y + (Y\tau - 2\varphi\rho - 2\xi k)X + (Y\zeta + \rho - \varphi\xi)H.$$

Третье слагаемое слева, в силу параллельности тензора кривизны $\widetilde{R}$, дает

$$\widetilde{R}(X, Y)(\widetilde{R}(X, H)X) = \widetilde{R}(\widetilde{R}(X, Y)X, H)X +$$
$$+\widetilde{R}(X, \widetilde{R}(X, Y)H)X + \widetilde{R}(X, H)(\widetilde{R}(X, Y)X) =$$
$$= 2\widetilde{R}(H, X)(\widetilde{R}(Y, X)X) - \widetilde{R}(\widetilde{R}(Y, X)X, X)H + \zeta\widetilde{R}(Y, X)X$$

(учтены тождества Якоби и (4)). Отсюда

$$4\widetilde{R}(H, X)(\widetilde{R}(Y, X)X) - 2k\widetilde{R}(H, X)Y + 4\xi\widetilde{R}(X, Y) =$$
$$= (Y\tau - 2\varphi\rho - 2k\xi)X + (Y\rho + (\tau - \sigma)\varphi + \zeta k)Y + (\rho + Y\zeta - \varphi\xi)H.$$

Но $Y\zeta - \varphi\xi = \rho$. Равенство (7) доказано. Аналогично получаются (8) и (9).

Лемма 1 доказана.

Удобство тождеств (3)–(9) состоит в том, что они содержат только векторы X, Y, H, тензор кривизны $\widetilde{R}$, который нам известен, и величины, через них выражающиеся; в частности, согласно уравнению Гаусса (1),

$$k = \widetilde{R}(X, Y, Y, X) + \alpha^2 > 0.$$

Лемма 2. *Пусть $F^2 \subset M$ — вполне омбилическое двумерное подмногообразие в локально симметрическом пространстве. Тогда либо $\beta = 0$, либо индуцированная на F метрика является метрикой вращения.*

Доказательство леммы 2. Умножая (7) скалярно на Y, имеем

$$-\widetilde{R}(H, X, Y, \widetilde{R}(Y, X)X) = \frac{1}{4}(Y\rho + (\tau - \sigma)\varphi + \zeta k).$$

Умножая (7) скалярно на $\widetilde{R}(Y, X)X$, получаем, с учетом (1),

$$-k/2\,\widetilde{R}(H, X, Y, \widetilde{R}(Y, X)X) = \frac{1}{4}(Y\rho + (\tau - \sigma)\varphi + \zeta k)(k - \alpha^2) +$$

$$+\frac{\rho}{2}\xi - \xi\,\widetilde{R}(X, Y, Y, \widetilde{R}(Y, X)X).$$

Отсюда

$$\xi\,(\rho/2 - g(\widetilde{R}(X, Y)Y, \widetilde{R}(Y, X)X) = \frac{1}{4}(Y\rho + (\tau - \sigma)\varphi + \zeta k)(-\beta/2).$$

Умножим (7) на H:

$$-\widetilde{R}(H, X, H, \widetilde{R}(Y, X)X) - k/2\,\widetilde{R}(H, X, Y, H) + \xi\zeta = -\rho/2\,\alpha^2.$$

Умножая (5) на Y и на $\widetilde{R}(Y, X)X$, соответственно, получаем

$$\widetilde{R}(H, X, H, Y) + g(\widetilde{R}(X, Y)Y, \widetilde{R}(Y, X)X) = \rho;$$

$$\widetilde{R}(H, X, H, \widetilde{R}(Y, X)X) + kg(\widetilde{R}(X, Y)Y, \widetilde{R}(Y, X)X) = \rho\,(k - \alpha^2) + \zeta\,\xi.$$

Из последних трех равенств следует, что

$$kg(\widetilde{R}(X, Y)Y, \widetilde{R}(Y, X)X) = \rho\,(k - \alpha^2),$$

поэтому

$$-\xi\rho\beta = -k\beta\,(Y\rho + (\tau - \sigma)\varphi + \zeta k)/4.$$

Теперь та же процедура с (6) и (8) дает

$$-\zeta\rho\beta = -k\beta\,(X\rho + (\sigma - \tau)\psi + \xi k)/4.$$

Пусть постоянная β не равна нулю. Тогда получаем систему внутренних дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} k\,(Y\rho + (\tau - \sigma)\varphi + \zeta k) - 4\,\xi\rho = 0; \\ k\,(X\rho + (\sigma - \tau)\psi + \xi k) - 4\,\zeta\rho = 0. \end{cases}$$

Заметим, что если $k \equiv 0$, то $\beta = 0$, в противном случае сдвинемся в точку, где $k \neq 0$, и перепишем систему:

$$\begin{cases} Y(\rho k^{-1}) = k^{-1}\varphi(\sigma - \tau) - \zeta; \\ X(\rho k^{-1}) = k^{-1}\psi(\tau - \sigma) - \xi. \end{cases}$$

Далее, поворачивая ортонормированный базис X, Y, запишем еще два уравнения

$$\begin{cases} X((\sigma - \tau)k^{-1}) - 2\zeta = 4k^{-1}\psi\rho; \\ Y((\sigma - \tau)k^{-1}) + 2\xi = -4k^{-1}\varphi\rho. \end{cases}$$

Выберем теперь поля X и Y так, чтобы $\rho \equiv 0$ (это всегда можно локально сделать). Тогда

$$\begin{cases} X((\sigma - \tau)k^{-1} - k/2) = 0; \\ Y((\sigma - \tau)k^{-1} + k/2) = 0; \\ Xk = 4k^{-1}\varphi(\sigma - \tau); \\ Yk = 4k^{-1}\psi(\tau - \sigma); \\ \rho = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Возьмем систему координат (x, y) на F так, чтобы первая квадратичная форма имела вид $ds^2 = E^2dx^2 + G^2dy^2$ и $X = E^{-1}\partial/\partial x$, $Y = G^{-1}\partial/\partial y$. Тогда первые два равенства из (12) дают $(\sigma - \tau)k^{-1} = f_1(x) + f_2(y)$, $k = 2f_1(x) - 2f_2(y)$, где f_1, f_2 — некоторые функции одной переменной. Далее, из (12_3), (12_4)

$$\begin{cases} f_1' = 2G^{-1}G_x(f_1 + f_2); \\ f_2' = 2E^{-1}E_y(f_1 + f_2), \end{cases}$$

откуда $E^2 = C_1(x)(f_1 + f_2)$, $G^2 = C_2(y)(f_1 + f_2)$, где C_1, C_2 — функции одной переменной. Изменяя масштаб, получаем $ds^2 = (f_1 + f_2)(dx^2 + dy^{2)}$ т.е. $E^2 = G^2 = f_1(x) + f_2(y)$.

Теперь из равенства $k = 2(f_1(x) - f_2(y))$ найдем

$$(f_1'^2 + f_2'^2) - (f_1 + f_2)(f_1'' + f_2'') = 4(f_1 - f_2)(f_1 + f_2)^3. \tag{13}$$

Дифференцируя это равенство по x, y, получаем

$$f_2'(-f_1'' + 8f_1^3)' = f_1'(f_2'' + 8f_2^3)'.$$

Если ни одна из функций f_1, f_2 не постоянна, то существуют константы a, b, C_1, C_2 такие, что

$$\begin{cases} af_1 + b(f_2'' - 8f_1^3) - C_1 = 0; \\ af_2 + b(-f_2'' - 8f_2^3) + C_1 = 0 \ (\text{и} \ |a| + |b| \neq 0). \end{cases}$$

Если же f_1 или f_2 — константа, то все доказано. Подставляя последнюю систему в (13), запишем алгебраические уравнения относительно f_1 и f_2

$$\begin{cases} -8f_1^4 + C_3 f_1 + C_4 = 0; \\ 8f_2^4 - C_3 f_2 + C_5 = 0 \end{cases}$$

с константами C_3, C_4, C_5. Отсюда f_1 и f_2 постоянны.

Лемма 2 доказана.

Замечание 1. Мы предполагаем, что альтернатива в этой лемме не отражает сути дела, т.е. на самом деле всегда F несет метрику вращения (так будет, например, когда M — пространство неположительной кривизны: тогда $\beta < 0$; или когда $M = G(2, n)$, как будет доказано).

Замечание 2. Если F действительно несет метрику вращения, то, выбирая поле X так, что $\zeta = Xk/4 = 0$, получим $\rho = 0$, $\nabla_Y Y = \nabla_Y X = 0$, т.е. $\varphi = 0$: интегральные кривые поля Y — геодезические (если $k = \mathrm{const}$, то тем более $\rho = 0$, и поле Y можно выбрать вдоль геодезических).

Как было сказано выше (п. 6), рассматриваются лишь существенно вполне омбилические подмногообразия. Первый нетривиальный случай возникает при $n = 4$.

Лемма 3. *Пусть $F^2 \subset G(2, 4) = S^2 \times S^2$ — существенно вполне омбилично. Тогда F^2 — существенно вполне омбилическая гиперповерхность во вполне геодезическом произведении одной из сфер на экватор другой сферы:*

$$F^2 \subset S^2 \times S^1 \subset S^2 \times S^2 = G(2, 4).$$

Доказательство леммы 3. Строго говоря, не само многообразие Грассмана $G(2, 4)$, а его двулистное накрытие $G^+(2, 4)$ (многообразие Грассмана ориентируемых подпространств) изометрично произведению двух сфер радиусов $1/\sqrt{2}$ каждая. Однако поскольку наши рассмотрения локальны, можно считать, что речь идет о $G(2, 4)$. Кроме того, будем считать, что сферы-сомножители являются сферами единичного радиуса (при необходимости сделаем гомотетию). Итак, надо найти существенно вполне омбилические подмногообразия в $S_1^2(1) \times S_2^2(1)$. Пусть

$O \in F^2$ (точка общего положения в смысле п. 6). Касательные векторы к $S_1^2(1) \times S_2^2(1)$ в точке O запишем в виде $X = (X_1 | X_2)$, где X_1, X_2 — двумерные вектор-строки $X_1 \in T_0 S_1^2$, $X_2 \in T_0 S_2^2$. Выберем локальные координаты так, чтобы для $X, Y, Z \in T_0(S_1^2 \times S_2^2) = \hat{M}$ иметь $g(X, Y) = \langle X_1, Y_1 \rangle + \langle X_2, Y_2 \rangle$, где $\langle , \rangle$ — евклидово скалярное произведение в E^2,

$$\tilde{R}(X, Y)Z = \left(\langle X_1, Z_1 \rangle X_1 - \langle X_1, Z_1 \rangle Y_1 \;\middle|\; \langle Y_2, Z_2 \rangle X_2 - \langle X_2, Z_2 \rangle Y_2 \right).$$

Группа изотропии $O(2) \times O(2)$ действует следующим образом:

$$Ad_{U \times V} X = (UX_1 \,|\, VX_2) \text{ для } U \in O(2),\ V \in O(2).$$

Пусть теперь X и Y — ортонормированные векторы из $T_0 F$, H — вектор средней кривизны $F \subset S_1^2 \times S_2^2$ в точке O. Выберем X так, чтобы в O $\zeta = (Xk)/4 = 0$. Действием группы изотропии приведем X к виду

$$X = (\cos\varepsilon \;\; 0 \;|\; \sin\varepsilon \;\; 0).$$

Учитывая ортонормированность X и Y, запишем

$$Y = (-\sin\varepsilon\cos\delta \quad -\sin\gamma\sin\delta \;|\; \cos\varepsilon\cos\delta \quad \cos\gamma\sin\delta)$$

для некоторых $\varepsilon, \delta, \gamma$. Наконец, для $H \perp X, Y$, $\|H\| = \alpha$ имеем

$$H = \alpha\,(-\sin\varepsilon\cos\hat{\delta} \quad -\sin\hat{\gamma}\sin\hat{\delta} \;|\; \cos\varepsilon\cos\hat{\delta} \quad \cos\hat{\gamma}\sin\hat{\delta});$$

причем

$$\cos\delta\cos\hat{\delta} + \sin\delta\sin\hat{\delta}\cos(\gamma - \hat{\gamma}) = 0 \tag{14}$$

и $\alpha \neq 0$.

Применим (4):

$$\alpha\sin\delta\,(\cos\varepsilon\sin\gamma\sin\hat{\gamma}\sin\hat{\delta} - \cos\varepsilon\sin\varepsilon\sin\gamma\cos\hat{\delta} \;|\; \sin\varepsilon\cos\gamma\cos\hat{\gamma}\sin\hat{\delta} -$$
$$-\cos\varepsilon\sin\varepsilon\cos\gamma\cos\hat{\delta}) = \xi\,(\cos\varepsilon \;\; 0 \;|\; \sin\varepsilon \;\; 0).$$

Отсюда сразу получаем

$$\sin\delta\cos\varepsilon\sin\varepsilon\cos\hat{\delta}\sin\gamma = 0 \text{ и } \sin\delta\cos\varepsilon\sin\varepsilon\cos\hat{\delta}\cos\gamma = 0.$$

Поэтому

$$\sin\delta\cos\varepsilon\sin\varepsilon\cos\hat{\delta} = 0. \tag{15}$$

Рассмотрим два случая.

1) $\xi = 0$. Здесь уже X и Y равноправны. В частности, можно выбрать X так, что $\cos\varepsilon \neq 0$ и $\sin\varepsilon \neq 0$ (в противном случае для любого $X \in T_0F$ $X_1 = 0$ или $X_2 = 0$, откуда T_0F — тройная система Ли, что противоречит существенной омбиличности). Имеем из (4), (14), (15)

$$\begin{cases} \sin\delta \sin\hat{\delta} \sin\gamma \sin\hat{\gamma} = 0; \\ \sin\delta \sin\hat{\delta} \cos\gamma \cos\hat{\gamma} = 0; \\ \sin\delta \cos\hat{\delta} = 0; \\ \cos\delta \cos\hat{\delta} + \sin\delta \sin\hat{\delta} \cos(\gamma - \hat{\gamma}) = 0. \end{cases}$$

Из двух последних уравнений $\cos\hat{\delta} = 0$, и поэтому

$$\sin\delta \sin\gamma \sin\hat{\gamma} = \sin\delta \cos\gamma \cos\hat{\gamma} = 0.$$

Если $\sin\delta = 0$, то T_0F — тройная система Ли. Поэтому $\sin\delta \neq 0$ и $\sin\gamma \sin\hat{\gamma} = \cos\gamma \cos\hat{\gamma} = 0$. Не нарушая общности, можно считать, что $\sin\gamma = \cos\hat{\gamma} = 0$, $\cos\gamma = 1$. Тогда

$$X = (\cos\varepsilon \quad 0 \mid \sin\varepsilon \quad 0);$$

$$Y = (-\sin\varepsilon \cos\delta \quad 0 \mid \cos\varepsilon \cos\delta \quad \sin\delta);$$

$$H = \pm\alpha (0 \quad 1 \mid 0 \quad 0).$$

Теперь можно повернуть базис $\{X, Y\}$ так, чтобы $X_1 = 0$. Действуя группой изотропии в $T_0 S_2^2$, получим

$$X = (0 \quad 0 \mid 1 \quad 0);$$

$$Y = (\cos\delta \quad 0 \mid 0 \quad \sin\delta);$$

$$H = \pm\alpha (0 \quad 1 \mid 0 \quad 0)$$

(δ, вообще говоря, здесь другое). Далее, из (6) (учитывая, что $\sigma = \rho = \xi = 0$, поскольку 0 — точка общего положения) получаем

$$(-\alpha^2 \cos\delta \quad 0 \mid 0 \quad k\sin\delta - \sin^3\delta) = 0,$$

откуда $\cos\delta = 0$ и T_0F — тройная система Ли. Противоречие.

2) $\xi \neq 0$. Тогда (4), (10), (15) дают

$$\begin{cases} \sin\delta\cos\varepsilon\sin\varepsilon\cos\widehat{\delta} = 0; \\ \cos\delta\cos\widehat{\delta} + \sin\delta\sin\widehat{\delta}\cos(\gamma - \widehat{\gamma}) = 0; \\ \sin\delta\cos\varepsilon\sin\varepsilon\sin\widehat{\delta}\cos(\gamma - \widehat{\gamma}) = 0. \end{cases}$$

Из двух последних уравнений следует, что $\cos\delta\cos\varepsilon\sin\varepsilon\cos\widehat{\delta} = 0$. Сравнивая их с первым, получим $\cos\varepsilon\sin\varepsilon\cos\widehat{\delta} = 0$. Рассмотрим случай

2.1. $\cos\varepsilon\sin\varepsilon \neq 0$. Тогда $\cos\widehat{\delta} = 0$ и $\sin\delta\cos(\gamma - \widehat{\gamma}) = 0$. Но $\sin\delta \neq 0$ (иначе $\xi = 0$), поэтому $\cos(\gamma - \widehat{\gamma}) = 0$. Отсюда

$$X = (\cos\varepsilon \quad 0 \quad | \quad \sin\varepsilon \quad 0);$$

$$Y = (-\sin\varepsilon\cos\delta \quad -\sin\gamma\sin\delta \quad | \quad \cos\varepsilon\cos\delta \quad \cos\gamma\sin\delta);$$

$$H = \pm\alpha(0 \quad \cos\gamma \quad | \quad 0 \quad \sin\gamma).$$

Теперь из (5) следует, что

$$\alpha^2(-\cos^2\gamma\cos\varepsilon \quad 0 \quad | \quad -\sin^2\gamma\sin\varepsilon \quad 0) + \sin^2\delta \times$$

$$\times(-\sin^2\gamma\cos^3\varepsilon \quad 0 \quad | \quad -\cos^2\gamma\sin^3\varepsilon \quad 0) + k \times$$

$$\times(\cos\varepsilon\sin^2\gamma\sin^2\delta \quad -\sin\gamma\sin\delta\cos\delta\sin\varepsilon\cos\varepsilon \quad |$$

$$\sin\varepsilon\cos^2\gamma\sin^2\delta \quad -\cos\gamma\sin\delta\cos\delta\sin\varepsilon\cos\varepsilon) =$$

$$= \rho\,(-\sin\varepsilon\cos\delta \quad -\sin\gamma\sin\delta \quad | \quad \cos\varepsilon\cos\delta \quad \cos\gamma\sin\delta) +$$

$$+ \tau(\cos\varepsilon \quad 0 \quad | \quad \sin\varepsilon \quad 0).$$

Из второй и четвертой координат имеем

$$\begin{cases} k\cos\delta\cos\varepsilon\sin\varepsilon(-\sin\gamma\sin\delta) = \rho(-\sin\gamma\sin\delta); \\ k\cos\delta\cos\varepsilon\sin\varepsilon(-\cos\gamma\sin\delta) = \rho(\cos\gamma\sin\delta). \end{cases}$$

Поскольку $\sin\delta \neq 0$, получим, что либо $\cos\gamma\sin\gamma = 0$, либо $\rho = \cos\delta = 0$.

2.1.1. Если $\cos\gamma\sin\gamma \neq 0$, то из $k > 0$ и $\cos\varepsilon\sin\varepsilon \neq 0$ следует $\rho = 0$, $\cos\delta = 0$. Тогда запишем

$$\begin{cases} -\alpha^2\cos^2\gamma - \sin^2\gamma\cos^2\varepsilon + k\sin^2\gamma = \tau; \\ -\alpha^2\sin^2\gamma - \cos^2\gamma\sin^2\varepsilon + k\cos^2\gamma = \tau. \end{cases}$$

Складывая эти равенства и учитывая, что

$$k = \widetilde{R}(X, Y, Y, X) + \alpha^2 = \alpha^2 + \cos^2\varepsilon\sin^2\gamma + \sin^2\varepsilon\cos^2\gamma,$$

получаем $\tau = 0$. Значит, $-\alpha^2\cos^2\gamma - \sin^2\gamma\cos^2\varepsilon + k\sin^2\gamma = 0$.

Из (6) теперь имеем

$$\begin{cases} k\cos^2\varepsilon - \cos^2\varepsilon\sin^2\gamma = \sigma; \\ k\sin^2\varepsilon - \sin^2\varepsilon\cos^2\gamma = \sigma, \end{cases}$$

откуда $k\cos^2\varepsilon - \cos^2\varepsilon\sin^2\gamma = k\sin^2\varepsilon - \sin^2\varepsilon\cos^2\gamma$.

Учитывая, что $k = \alpha^2 + \cos^2\varepsilon\sin^2\gamma + \sin^2\varepsilon\cos^2\gamma$, получаем

$$\begin{cases} \alpha^2(1/2 - \cos^2\varepsilon) = \cos^2\varepsilon\sin^2\varepsilon\,(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma); \\ \alpha^2\,(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma) = \cos^2\gamma\sin^2\gamma\,(\cos^2\varepsilon - \sin^2\varepsilon) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -2\,\alpha^2\cos 2\varepsilon = \sin 2\varepsilon\cos 2\gamma; \\ 4\,\alpha^2\cos 2\gamma = \sin 2\gamma\cos 2\varepsilon. \end{cases}$$

Кроме того, из (3) $k - 2\,\alpha^2 = \cos^2\varepsilon\sin^2\gamma + \sin^2\varepsilon\cos^2\gamma - \alpha^2 = \mathrm{const}$, откуда $\alpha^2 = \mathrm{const} - \frac{1}{2}\cos 2\varepsilon\cos 2\gamma$. Итак, имеем

$$\begin{cases} -2\,\alpha^2\cos 2\varepsilon = \sin 2\varepsilon\cos 2\gamma; \\ 4\,\alpha^2\cos 2\gamma = \sin 2\gamma\cos 2\varepsilon; \\ \alpha^2 = \mathrm{const} - \frac{1}{2}\cos 2\varepsilon\cos 2\gamma. \end{cases}$$

Теперь если один из $\cos 2\varepsilon$, $\cos 2\gamma$ равен нулю, то $\alpha^2 = \mathrm{const}$. В противном случае, решая первые два уравнения, получаем $\mathrm{tg}^2\,2\varepsilon = (64\alpha^8 + 4\alpha^4)/(1 - 64\alpha^8)$, $\mathrm{tg}^2\,2\gamma = (64\alpha^8 + 16\alpha^4)/(1 - 64\alpha^8)$. Подставляя в третье уравнение выражения для $\cos 2\varepsilon$ и $\cos 2\gamma$ через $\mathrm{tg}\,2\varepsilon$ и $\mathrm{tg}\,2\gamma$, соответственно, запишем

$$(64\alpha^8 - 1)^2 = 4(\alpha^2 - \mathrm{const})^2(16\alpha^4 + 1)(4\alpha^4 + 1).$$

При старшей степени α^{16} стоит ненулевой коэффициент, откуда $\alpha^2 = \mathrm{const}$ (в принципе, α можно просто вычислить).

Поскольку точка 0 — общего положения, приходим к противоречию с $\xi \neq 0$.

2.1.2. Пусть теперь одно из чисел $\cos\gamma$ или $\sin\gamma$ — нулевое. Без нарушения общности считаем $\cos\gamma = 1$, $\sin\gamma = 0$. Тогда

$$X = (\cos\varepsilon \quad 0 \quad | \quad \sin\varepsilon \quad 0);$$

$$Y = (-\sin\varepsilon\cos\delta \quad 0 \quad | \quad \cos\varepsilon\cos\delta \quad \sin\delta);$$

$$H = \pm\,\alpha\,(0 \quad 1 \quad | \quad 0 \quad 0).$$

Теперь (5) дает

$$\begin{cases} -k\cos\delta\cos\varepsilon\sin\varepsilon=\rho; \\ -\alpha^2\cos\varepsilon=-\rho\sin\varepsilon\cos\delta+\tau\cos\varepsilon; \\ -\sin^3\varepsilon\sin^2\delta+k\sin\varepsilon\sin^2\delta=\rho\cos\varepsilon\cos\delta+\tau\sin\varepsilon. \end{cases}$$

Исключая из двух последних уравнений τ, получаем

$$-\alpha^2\cos\varepsilon\sin\varepsilon+\sin^3\varepsilon\sin^2\delta-k\cos\varepsilon\sin\varepsilon\sin^2\delta=-\rho\cos\delta.$$

Подставляя ρ, имеем $k=-\alpha^2+\sin^2\varepsilon\sin^2\delta$. Но $k=\alpha^2+\sin^2\varepsilon\sin^2\delta$. Противоречие с $\alpha=0$.

2.2. $\cos\varepsilon\sin\varepsilon=0$. Без нарушения общности можно считать $\sin\varepsilon=0$, $\cos\varepsilon=1$. Можно взять также $\cos\gamma=0$, $\sin\gamma=-1$. Тогда

$$X=(1\quad 0\quad|\quad 0\quad 0);$$

$$Y=(0\quad \sin\delta\quad|\quad \cos\delta\quad 0);$$

$$H=\alpha\,(0\quad -\sin\hat{\gamma}\sin\hat{\delta}\quad|\quad \cos\hat{\delta}\quad \cos\hat{\gamma}\sin\hat{\delta}).$$

Из (14): $\cos\delta\cos\hat{\delta}=\sin\delta\sin\hat{\delta}\sin\hat{\gamma}$, а из (4): $\sin\delta\sin\hat{\delta}\sin\gamma\sin\hat{\gamma}\neq 0$, $\xi=-\alpha\sin\delta\sin\hat{\delta}\sin\hat{\gamma}$. Теперь (5) дает $\rho=0$.

Из (6) после упрощений получаем

$$\alpha^2\cos\delta\cos\hat{\gamma}\sin\hat{\delta}\cos\hat{\delta}=\alpha\,\xi\cos\hat{\gamma}\sin\hat{\delta}.$$

Отсюда $\cos\hat{\gamma}=0$. Можно считать, что

$$H=\pm\,\alpha\,(0\quad \cos\delta\quad|\quad -\sin\delta\quad 0).$$

Легко видеть, что пространство $\mathrm{Span}(X, Y, H)$ есть тройная система Ли. Ее экспонента равна $S^2\times S^1\subset S^2\times S^2$.

Лемма 3 доказана.

В последующих публикациях будут рассмотрены случаи $G(2, n)$ с $n>4$.

Список литературы

1. *Ю. А. Николаевский*, Вполне омбилические подмногообразия в $G(2, n)$. I.— Укр. геом. сб. (1991), вып. 34, с. 83–98.
2. *Ю. А. Николаевский*, Вполне омбилические подмногообразия в $G(2, n)$. II. — Укр. геом. сб. (1992), вып. 35 с. 83–103.
3. *B.-Y. Chen and T. Nagano*, Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces. I.— Duke Math. J. (1977), v. 44, p. 745–755.
4. *А. А. Борисенко, Ю. А. Николаевский*, Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий.— Успехи мат. наук (1991), т. 46, № 2(278), с. 41–83.
5. *Y.-C. Wong*, Differential geometry of Grassmann manifolds.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA (1967), v. 57, p. 589–594.

6. *С. Хелгасон*, Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. Мир, Москва (1964), 533 с.
7. *B.-Y. Chen*, Geometry of submanifolds and its applications. Sci. Univ. Tokyo, Tokyo (1981), 120 p.
8. *B.-Y. Chen*, Extrinsic spheres in Riemannian manifolds.— Houston J. Math. (1979), v. 5, p. 319–324.
9. *А. Ю. Николаевский*, О внешних сферах в симметрическом пространстве.— Мат. заметки (1992), т. 51, вып. 2, с. 72–77.
10. *Yu. A. Nickolaevsky*, Totally umbilical submanifolds of symmetric spaces.— Mat. Fiz. Analiz Geom. (1994), v. 1, No 2, p. 314–357.

Totally umbilical submanifolds in $G(2, n)$. III

Yu.A. Nickolaevsky

This paper is the continuation of the papers with the same title, I, II, published in Ukr. geom. sb. (1992, 1993), iss. 34, 35. Complete classification of totally umbilical surfaces in the Grassmann manifold $G(2, n)$ is presented.

Цілком омбілічні підмноговиди в $G(2, n)$. III

Ю.А. Ніколаєвський

Стаття є продовженням робіт з такою ж назвою, I, II, надрукованих в Укр. геом. зб. (1992, 1993), вип. 34, 35. Дано повну класифікацію цілком омбілічних поверхонь в грассмановому многовиді $G(2, n)$.