Математическая физика, анализ, геометрия
1996, т. 3, № 3/4, с. 446-456

О вертикальной сильной сферичности метрики Сасаки сферических касательных расслоений

А. Л. Ямпольский

Харьковский государственный университет, Украина, 3100077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 9 июня 1994 года

Распределение $\mathcal{L}^q$ на римановом многообразии M^n называется сильно сферическим, если тензор кривизны его метрики удовлетворяет условию $R(X, Y)Z = k(\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y)$ $(k > 0)$ для любых касательных к M^n векторов X, Z и любого $Y \in \mathcal{L}^q$. Число $q = \dim \mathcal{L}^q$ называется индексом сферичности. Рассматривается вопрос о существовании на сферическом касательном расслоении T_1M^n с метрикой Сасаки вертикального сильно сферического распределения.

1. Основные понятия и формулировка результатов

Метрика риманова многообразия (M^n, q) называется сильно q-сферической, если на M^n существует q-мерное распределение $\mathcal{L}^q$ такое, что тензор кривизны метрики M^n удовлетворяет условию

$$R(X, Y)Z = k(\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y) \quad (k > 0)$$

для любого $Y \in \mathcal{L}^q$ и произвольных $X, Z \in TM^n$. Известно, что это распределение интегрируемо и интегральные подмногообразия являются вполне геодезическими подмногообразиями в M^n постоянной кривизны k [1]. Размерность q называется индексом сильной сферичности, k – показателем сферичности.

В работе рассматривается сферическое касательное расслоение T_1M^n с метрикой Сасаки и исследуется вопрос о существовании вертикального сильно сферического распределения на T_1M^n. Интерес к этому можно объяснить тем, что слои T_1M^n являются вполне геодезическими подмногообразиями в

T_1M^n, имеют постоянную кривизну, равную 1, и представляют собой интегральные подмногообразия $(n-1)$-мерного вертикального распределения [2]. Однако легко показать, что всё вертикальное распределение на T_1M^n не является сильно сферическим. Докажем следующие утверждения.

Теорема 1. *Если n нечетно, то индекс вертикальной сильной сферичности метрики Сасаки T_1M^n равен* 0.

Теорема 2. *Индекс вертикальной сильной сферичности метрики Сасаки T_1M^2 равен 1 тогда и только тогда, когда M^2 – пространство постоянной кривизны K и $k = K^2/4$.*

Теорема 3. *Если $n \geq 4$ четно, а M^n локально симметрично, то индекс вертикальной сильной сферичности метрики Сасаки T_1M^n не превышает* 1.

2. Необходимые и достаточные условия существования нетривиального сильно сферического распределения на T_1M^n

Как известно, метрика Сасаки T_1M^n определяется как метрика гиперповерхности в TM^n, определяемой условием единичности касательных векторов. А именно, если $(u^1, \dots, u^n; \xi^1, \dots, \xi^n)$ – локальные координаты в TM^n, то T_1M^n задается уравнением $g_{ik}\xi_i\xi^k = 1$.

На TTM^n определены отображения $\pi_*: TTM^n \to TM^n$ и $K: TTM^n \to TM^n$, которые являются дифференциалом проекции $\pi: TM^n \to M^n$ и отображением связности, соответственно [3]. В каждой точке $(Q, \xi) \in TM^n$, $T_{(Q,\xi)}TM^n = \mathcal{H}_{(Q,\xi)}TM^n \oplus \mathcal{V}_{(Q,\xi)}TM^n$, где $\mathcal{H}_{(Q,\xi)}$ и $\mathcal{V}_{(Q,\xi)}$ – взаимно ортогональные подпространства в $T_{(Q,\xi)}TM^n$, определяемые условиями $\mathcal{H}_{(Q,\xi)} = \ker K$, $\mathcal{V}_{(Q,\xi)} = \ker \pi_*$. При этом $\pi_*(\mathcal{H}_{(Q,\xi)}) = T_Q M^n$, $K(\mathcal{V}_{(Q,\xi)}) = T_Q M^n$. Подпространства H и $\mathcal{V}$ называются горизонтальным и вертикальным, соответственно, и образуют на TM^n дифференцируемые распределения. Вертикальное распределение интегрируемо, и его интегральными подмногообразиями являются слои TM^n, которые вполне геодезичны и внутренне плоски [4].

Если вектор $\widetilde{X} \in T_{(Q,\xi)}TM^n$, то векторы $X_H = \pi_* \widetilde{X}$ и $X_V = K\widetilde{X}$ называются горизонтальной и вертикальной проекциями вектора $\widetilde{X}$, соответственно. Определены и обратные операции – горизонтального и вертикального подъемов (лифтов) произвольного вектора (векторного поля)

$$X \in T_Q M^n : X^H \in \mathcal{H}_{(Q,\xi)}TM^n, \quad X^V \in \mathcal{V}_{(Q,\xi)}TM^n,$$

причем [3,5]

$$\pi_*(X^H_{(Q,\xi)}) = X_Q, \quad K(X^H_{(Q,\xi)}) = 0, \quad \pi_*(X^V_{(Q,\xi)}) = 0, \quad K(X^V_{(Q,\xi)}) = X_Q.$$

Пусть $\langle\, ,\rangle$ – скалярное умножение векторов в метрике M^n. Метрика Сасаки на TM^n определяется следующим скалярным умножением [5]:

$$\langle\langle \widetilde{X}, \widetilde{Y} \rangle\rangle = \langle \pi_*\widetilde{X}, \pi_*\widetilde{Y} \rangle + \langle K\widetilde{X}, K\widetilde{Y} \rangle.$$

Единичной нормалью к T_1M^n в TM^n в точке (Q,ξ) служит вектор ξ^V. Поэтому вектор $\widetilde{X} \in T_{(Q,\xi)}TM^n$ касается T_1M^n тогда и только тогда, когда $\langle K\widetilde{X}, \xi \rangle = 0$. Таким образом, горизонтальные распределения на T_1M^n и TM^n совпадают [2], а вертикальное распределение на T_1M^n характеризуется условием $K(\mathcal{V}_{(Q,\xi)}) = L^\perp_Q(\xi)$, где $L^\perp_Q(\xi)$ – ортогональное дополнение вектора ξ в T_QM^n.

Условия сильной сферичности метрики Сасаки T_1M^n основаны на выражении тензора ее кривизны.

Лемма 1. *В каждой точке* $(Q,\xi) \in T_1M^n$ *тензор кривизны* $\overline{R}$ *метрики Сасаки* T_1M^n *определяется следующими формулами:*

$$\langle\langle \overline{R}(X^H, Y^H)Z^H, U^H \rangle\rangle = \langle R(X,Y)Z, U \rangle + \frac{1}{4}\langle R(X,U)\xi,$$
$$R(Z,Y)\xi \rangle + \frac{1}{4}\langle R(X,Z)\xi, R(Y,U)\xi \rangle + \frac{1}{2}\langle R(X,Y)\xi, R(Z,U)\xi \rangle;$$

$$\langle\langle \overline{R}(X^H, Y^H)Z^H, u^V \rangle\rangle = \frac{1}{2}\langle (\nabla_Z R)(X,Y)\xi, u \rangle,$$

$$\langle\langle \bar{R}(X^H, Y^H)z^V, u^V\rangle\rangle = \langle R(X, Y)z, u\rangle -$$
$$-\frac{1}{4}\langle R(\xi, u)X, R(\xi, z)Y\rangle + \frac{1}{4}\langle R(\xi, z)X, R(\xi, u)Y\rangle,$$

$$\langle\langle \bar{R}(X^H, y^V)Z^H, u^V\rangle\rangle = \frac{1}{2}\langle R(X, Z)y, u\rangle - \frac{1}{4}\langle R(\xi, y)Z, R(\xi, u)X\rangle;$$

$$\langle\langle \bar{R}(x^V, y^V)z^V, U^H\rangle\rangle = 0,$$

$$\langle\langle \bar{R}(x^V, y^V)z^V, u^V\rangle\rangle = \langle y, z\rangle\langle x, u\rangle - \langle x, z\rangle\langle y, u\rangle,$$

где $X, Y, Z, U \in T_Q M^n$ *при горизонтальном подъеме и* $x, y, z, u \in L_Q^{\perp}(\xi)$ *при вертикальном подъеме в точку* (Q, ξ).

Условия сильной вертикальной сферичности метрики Сасаки могут быть сформулированы так: в каждой точке $Q \in M^n$ для любого единичного вектора $\xi \in T_Q M^n$ существует подпространство $V^q \subset L_Q^{\perp}(\xi)$ такое, что для любого вектора $\upsilon \in V^q$ выполняется условие

$$\langle\langle \bar{R}(\tilde{X}, \upsilon^V)\tilde{Y}, \tilde{Z}\rangle\rangle = k(\langle\langle \upsilon^V, \tilde{Y}\rangle\rangle\langle\langle \tilde{X}, \tilde{Z}\rangle\rangle - \langle\langle \upsilon^V, \tilde{Z}\rangle\rangle\langle\langle \tilde{X}, \tilde{Y}\rangle\rangle) \quad (1)$$

при любых $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in T_{(Q,\xi)}T_1M^n$. Положим в (1), что

а) $\tilde{X} = X^H$, $\tilde{Y} = Y^H$, $\tilde{Z} = u^V$;

б) $\tilde{X} = X^H$, $\tilde{Y} = Y^H$, $\tilde{Z} = Z^H$;

в) $\tilde{X} = x^V$, $\tilde{Y} = u^V$, $\tilde{Z} = w^V$.

Используя лемму 1, найдем, что с необходимостью для любого $\xi \in T_Q M^n$ должен существовать вектор $\upsilon \in L_Q^{\perp}(\xi)$ такой, что

а) $\frac{1}{2}\langle R(\upsilon, u)X, Y\rangle - \frac{1}{4}\langle R(\xi, \upsilon)Y, R(\xi, u)X\rangle + k\langle u, \upsilon\rangle\langle X, Y\rangle = 0$;

б) $\frac{1}{2}\langle(\nabla_X R)(Y, Z)\xi, \upsilon\rangle = 0$;

в) $(1-k)(\langle \upsilon, u\rangle\langle w, x\rangle - \langle \upsilon, w\rangle\langle u, x\rangle) = 0$

для любых $X, Y, Z \in T_Q M^n$ и любых $u, w, x \in L_Q^{\perp}(\xi)$. Эти условия являются и достаточными. В этом можно убедиться, положив $\tilde{X} = X^H + x^V$, $\tilde{Y} = Y^H + y^V$, $\tilde{Z} = Z^H + z^V$ (произвольные вектора) и расписав выражение $\langle\langle \bar{R}(\tilde{X}, \upsilon^V)\tilde{Y}, \tilde{Z}\rangle\rangle$ с использованием леммы 1.

Введем в рассмотрение оператор кривизны $R_{XY}\colon T_Q M^n \to T_Q M^n$. Тогда, учитывая произвольность выбора векторов в выписанных выше равенствах, можно записать их следующим образом.

Лемма 2. *Нетривиальное вертикальное сильно сферическое распределение на $T_1 M^n$ существует тогда и только тогда, когда для любого единичного вектора $\xi \in T_Q M^n$ существует по крайней мере один вектор $\upsilon \in L_Q^{\perp}(\xi)$ такой, что оператор кривизны M^n удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\frac{1}{4} R_{\xi\upsilon}^2 = -kE$;

2) $\frac{1}{2} R_{u\upsilon} = \frac{1}{4} R_{\xi\upsilon} R_{\xi u}$ *для любого u, ортогонального ξ и υ;*

3) $\frac{1}{2} (\nabla_Z R)_{\xi\upsilon} = 0$;

4) $(1-k)(\langle u, \upsilon\rangle\langle w, x\rangle - \langle \upsilon, w\rangle\langle u, x\rangle) = 0$ *для любых u, w, x, ортогональных ξ.*

3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Если n нечетно, то $\det R_{\xi\upsilon} = 0$ как определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка. С другой стороны, условие 1) леммы 2 влечет $(\det R_{\xi\upsilon})^2 = (-1)^{n+1}(4k)^n \neq 0$. Противоречие.

Доказательство теоремы 2. Если размерность $n = 2$, то условия 1), 4) леммы 2 выполняются тождественно. Условие 3) означает постоянство кривизны M^2. Условие 1) влечет равенство $k = K^2/4$, где K – гауссова кривизна M^2. При этом υ огибает слой – единичную окружность в $T_Q M^2$.

Доказательство теоремы 3. Прежде всего заметим, что условие 4) леммы 2 влечет $k = 1$. Действительно, если $k \neq 1$, то, полагая $u = \upsilon$, $x = w$ и выбирая их так, что $\langle w, u\rangle = 0$, имеем $(1-k)|\upsilon|^2|w|^2 = 0$. Из произвольности w заключаем, что $\upsilon = 0$. Следовательно, в условиях теоремы оператор кривизны должен удовлетворять соотношениям $\frac{1}{4} R_{\xi\upsilon}^2 = -E$, $\frac{1}{2} R_{u\upsilon} = \frac{1}{4} R_{\xi\upsilon} R_{\xi u}$, $(\langle u, \xi\rangle = \langle u, \upsilon\rangle = 0)$.

Для удобства вычислений сделаем формальную замену: $\frac{1}{2}R \to R$. Тогда условия существования вектора сильной сферичности T_1M^n примут вид

$$R^2_{\xi\upsilon} = -E; \qquad (4)$$

$$R_{u\upsilon} = R_{\xi\upsilon}R_{\xi u}, \quad (\langle u, \xi\rangle = \langle \upsilon, \xi\rangle = 0). \qquad (5)$$

Предположим, что υ является решением системы (4), (5). Будем говорить, что υ – "соответствующий" вектор для ξ.

Предложение 1. *Если вектору ξ соответствует вектор υ, то вектору $\eta = \cos\varphi\,\xi + \sin\varphi\upsilon$ соответствует вектор $w = -\sin\varphi\,\xi + \cos\varphi\upsilon$.*

Доказательство. $R_{\eta w} = R(\cos\varphi\xi + \sin\varphi\upsilon)(-\sin\xi + \cos\varphi\upsilon) = \cos^2\varphi R_{\xi\upsilon} - \sin^2\varphi R_{\upsilon\xi} = R_{\xi\upsilon}$. Поэтому $R^2_{\eta w} = R^2_{\xi\upsilon} = -E$.

Пусть u – произвольный вектор, ортогональный паре (ξ, υ). Тогда u ортогонален паре (η, w). Имеем

$$R_{uw} = R_{u(-\sin\varphi\xi + \cos\varphi\upsilon)} = -\sin\varphi\, R_{u\xi} + \cos\varphi\, R_{u\upsilon} =$$

$$= -\sin\varphi\, R_{u\xi} + \cos\varphi\, R_{\xi\upsilon} = \sin\varphi\, R^2_{\xi\upsilon} R_{\xi u} + \cos\varphi\, R_{\xi\upsilon} R_{\xi u} =$$

$$= R_{\xi\upsilon}(-\sin\varphi\, R_{\xi\upsilon} R_{\xi u} + \cos\varphi\, R_{\xi u}) = R_{\xi\upsilon}(-\sin\varphi\, R_{u\upsilon} + \cos\varphi\, R_{\xi u}) =$$

$$= R_{\xi\upsilon} R_{(\cos\varphi\xi + \sin\varphi\upsilon)u} = R_{\eta w} R_{\eta u}.$$

Предложение доказано.

Заметим, что условия (4) и (5) инвариантны относительно замены $\xi \to -\xi$. Вместе с предложением 1 это означает, что векторы ξ и υ взаимно соответствуют друг другу, а плоскость $\xi \wedge \upsilon$ можно называть "плоскостью соответствий".

В силу линейности исходных условий (2) сильной сферичности, легко убедиться в справедливости следующего утверждения.

Предложение 2. *Если вектору ξ соответствуют два линейно независимых вектора υ_1 и υ_2, то ξ соответствует плоскость $\upsilon_1 \wedge \upsilon_2$.*

Пусть вектору ξ соответствует пара линейно независимых векторов υ и w. По предложению 2 можно считать, что υ и w взаимно ортогональны.

Предложение 3. *Если вектору* ξ *соответствует плоскость* $\upsilon \wedge w$ $(\langle \upsilon, w \rangle = 0)$, *то вектору* υ *соответствует плоскость* $\xi \wedge w$ $(\langle \xi, w \rangle = 0)$.

Доказательство. Проверим условия (4) и (5) для пары (υ, w). Для пары (υ, ξ) они выполняются, так как υ и ξ лежат в плоскости соответствий. Поскольку υ и w соответствуют ξ, то

$$\begin{cases} R_{\xi\upsilon}^2 = -E, \\ R_{u\upsilon} = R_{\xi\upsilon} R_{\xi u} \quad (\langle u, \xi \rangle = \langle u, \upsilon \rangle = 0); \end{cases} \tag{*}$$

$$\begin{cases} R_{\xi w}^2 = -E, \\ R_{uw} = R_{\xi w} R_{\xi u} \quad (\langle u, \xi \rangle = \langle u, w \rangle = 0). \end{cases} \tag{**}$$

Рассмотрим $R_{\upsilon w}^2 = R_{\upsilon w} R_{\upsilon w}$. Так как $\langle w, \xi \rangle = \langle w, \upsilon \rangle = 0$, то из (*) следует, что $R_{\upsilon w} = -R_{w\upsilon} = -R_{\xi\upsilon} R_{\xi w}$, а так как $\langle \upsilon, \xi \rangle = \langle \upsilon, w \rangle = 0$, то из (**) следует, что $R_{\upsilon w} = R_{\xi w} R_{\xi\upsilon}$. Значит, $R_{\upsilon w}^2 = -R_{\xi\upsilon} R_{\xi w} R_{\xi w} R_{\xi\upsilon} = -E$. Далее рассмотрим R_{uw} для любого u: $\langle u, \upsilon \rangle = \langle u, w \rangle = 0$. Вектор u представим в виде $u = \lambda \xi + \mu u'$, где вектор u' ортогонален (ξ, υ, w). Тогда

$$R_{uw} = \lambda R_{\xi w} + \mu R_{u'w}. \tag{6}$$

Так как $\langle w, \xi \rangle = \langle w, \upsilon \rangle = 0$, то из (*) следует, что $R_{\xi\upsilon} = R_{\upsilon\xi} R_{\upsilon w}$. Из (**) найдем, что $R_{\upsilon w} = R_{\xi w} R_{\xi\upsilon} = R_{w\xi} R_{\upsilon\xi}$. Поэтому $R_{\xi w} = R_{\upsilon\xi} R_{w\xi} R_{\upsilon\xi}$. Но из (*) видно, что $R_{\upsilon\xi} R_{w\xi} = R_{w\upsilon}$. Значит,

$$R_{\xi w} = R_{\upsilon w} R_{\upsilon\xi}. \tag{7}$$

В то же время для u', ортогонального (ξ, υ, w), из (**) имеем $R_{u'w} = R_{\xi w} R_{\xi u'}$. Тогда из (*) следует $R_{\xi u'} = -R_{\upsilon\xi} R_{\upsilon u'}$, так что $R_{u'w} = -R_{\xi w} R_{\upsilon\xi} R_{\upsilon u'}$. Но из (**) видим, что $R_{\xi w} R_{\xi\upsilon} = R_{\upsilon w}$. Поэтому

$$R_{u'w} = R_{\upsilon w} R_{\upsilon u'}. \tag{8}$$

Подставляя (7) и (8) в (6), находим

$$R_{uw} = \lambda R_{\upsilon w} R_{\upsilon\xi} + \mu R_{\upsilon w} R_{\upsilon u'} =$$
$$= R_{\upsilon w} (\lambda R_{\upsilon\xi} + \mu R_{\upsilon u'}) = R_{\upsilon w} R_{\upsilon u}.$$

Доказательство закончено.

Как отмечалось, при фиксированной соответствующей паре (ξ, υ) оператор $R_{\xi\upsilon}$ является кососимметрическим и кософртогональным линейным оператором. Ортогональным преобразованием матрица такого оператора приводится к каноническому блочно-диагональному виду, в котором каждый блок есть 2×2 матрица вида $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Докажем, что справедливо

Предложение 4. *Если* (ξ, υ) – *соответствующая пара, то* ξ *и* υ *принадлежат каноническому базису оператора* $R_{\xi\upsilon}$. (*Другими словами,* $R_{\xi\upsilon}\upsilon = \xi$, $R_{\xi\upsilon}\xi = -\upsilon$.)

Доказательство. Так как $n \geq 4$, то найдется пара взаимно ортогональных векторов u_1, u_2, ортогональных (ξ, υ)-плоскости. Используя (5) и первое тождество Бьянки для оператора кривизны, получим цепочку равенств

$$R_{u_1\upsilon}u_2 = R_{\xi\upsilon}R_{\xi u_1}u_2 = R_{\xi\upsilon}(-R_{u_1u_2}\xi + R_{\xi u_2}u_1) =$$
$$= -R_{\xi\upsilon}R_{u_1u_2}\xi + R_{\xi\upsilon}R_{\xi u_2}u_1 = -R_{\xi\upsilon}R_{u_1u_2}\xi + R_{u_2\upsilon}u_1 =$$
$$= -R_{\xi\upsilon}R_{u_1u_2}\xi + R_{u_1\upsilon}u_2 - R_{u_1u_2}\upsilon.$$

Отсюда сразу находим, что

$$R_{u_1u_2}\upsilon = -R_{\xi\upsilon}R_{u_1u_2}\xi.$$

После умножения на вектор ξ имеем

$$\langle R_{u_1u_2}\upsilon, \xi\rangle = -\langle R_{\xi\upsilon}R_{u_1u_2}\xi, \xi\rangle$$

или

$$\langle R_{u_1u_2}\upsilon, \xi\rangle = \langle R_{\xi\upsilon}\xi, R_{u_1u_2}\xi\rangle. \tag{9}$$

Кроме того, для любого u, ортогонального ξ и υ,

$$R_{\xi\upsilon}u + R_{\upsilon u}\xi + R_{u\xi}\upsilon = 0.$$

Используя (5), запишем это так:

$$R_{\xi\upsilon}u - R_{\xi\upsilon}R_{\xi u}\xi + R_{u\xi}\upsilon \equiv 0.$$

Подействуем на левую часть оператором $R_{\xi\upsilon}$. Применяя (4), получим

$$-u + R_{\xi u}\xi - R_{\xi\upsilon} R_{\xi u}\upsilon \equiv 0.$$

Еще раз используя (5), окончательно находим

$$u + R_{u\xi}\xi + R_{u\upsilon}\upsilon \equiv 0. \tag{10}$$

После умножения (10) на ξ и на υ имеем

$$\langle R_{\xi\upsilon}\upsilon, u \rangle = \langle R_{u\upsilon}\upsilon, \xi \rangle = 0; \tag{11}$$

$$\langle R_{\xi\upsilon}\xi, u \rangle = -\langle R_{u\xi}\xi, \upsilon \rangle = 0. \tag{12}$$

Так как u – произвольный, ортогональный (ξ, υ)-плоскости вектор, то, следовательно,

$$R_{\xi\upsilon}\upsilon = \lambda\,\xi\,; \quad R_{\xi\upsilon}\xi = -\lambda\,\upsilon. \tag{13}$$

Покажем, что $\lambda = 1$. Действительно, подставив (13) в (9), получим

$$\langle R_{u_1u_2}\upsilon, \xi \rangle = -\lambda \langle R_{u_1u_2}\xi, \upsilon \rangle$$

или

$$(1-\lambda)\langle R_{\xi\upsilon}u_1\,, u_2 \rangle = 0.$$

Предположим, что

$$\langle R_{\xi\upsilon}u_1\,, u_2 \rangle = 0 \tag{14}$$

для любых взаимно ортогональных u_1 , u_2 , ортогональных (ξ, υ)-плоскости. Вектор $R_{\xi\upsilon}u_1$ обладает свойствами: а) $R_{\xi\upsilon}u_1$ ортогонален u_1 , б) $R_{\xi\upsilon}u_1$ ортогонален ξ в силу (11), в) $R_{\xi\upsilon}u_1$ ортогонален υ в силу (12). Следовательно, согласно (14), можно положить $u_2 = R_{\xi\upsilon}u_1$. В силу кососортогональности оператора $R_{\xi\upsilon}$, получим

$$\langle R_{\xi\upsilon}u_1\,, R_{\xi\upsilon}u_1 \rangle = |\,u_1\,|^2 = 0.$$

Противоречие. Таким образом, в (13) значение $\lambda = 1$, что и доказывает предложение.

Следствие 4.1. *Секционная кривизна M^n в направлении плоскости соответствий равна* 2.

Доказательство тривиально с учетом формальной замены (3).

Предложение 5. *Пусть* (ξ, υ) *– соответствующая пара, u – произвольный единичный вектор, ортогональный* (ξ, υ)*-плоскости. Тогда секционные кривизны удовлетворяют следующему тождеству*:

$$2 + K_{\xi \wedge u} + K_{\upsilon \wedge u} = 0. \tag{15}$$

Доказательство. Тождество (10) с учетом обратной замены (3) запишется в виде

$$2u + R_{u\xi}\xi + R_{u\upsilon}\upsilon \equiv 0.$$

Так как u, ξ, υ единичны и взаимно ортогональны, то скалярное умножение тождества на u дает искомое тождество.

Следствие 5.1. *Если M^n – четномерное симметрическое пространство неотрицательной кривизны, то на T_1M^n не существует вертикального сильно сферического распределения. В частности, его не существует для КРОСПов.*

Предположим теперь, что на T_1M^n существуют сильно сферические вертикальные распределения размерности $q \geq 2$. Это означает, что для данного вектора ξ на M^n существуют по крайней мере два вектора υ_1 и υ_2 ($\langle \upsilon_1, \upsilon_2 \rangle = 0$), удовлетворяющих условиям (4) и (5).

Тогда, согласно следствию 4.1, $K_{\xi \wedge \upsilon_1} = 2$. Значит, из тождества (15), полагая $u = \upsilon_2$, находим $K_{\upsilon_1 \wedge \upsilon_2} = -4$. Но из предложения 3 следует, что $\upsilon_1 \wedge \upsilon_2$ также является плоскостью соответствий. В силу следствия 4.1, $K_{\upsilon_1 \wedge \upsilon_2} = 2$. Противоречие.

Пусть размерность сильно сферического вертикального распределения равна 1. Тогда справедливо

Предложение 6. *В каждой точке $Q \in M^n$ любые две плоскости соответствий либо имеют единственную общую точку Q, либо совпадают.*

Доказательство. Действительно, пусть $\xi \wedge \upsilon$, $\eta \wedge w$ – две плоскости соответствий. Предположим, что они пересекаются по некоторой прямой. Выберем на ней единичный вектор l. В плоскости $\xi \wedge \upsilon$ по предложению 1 совместим вектор ξ с l, а в плоскости $\eta \wedge w$ совместим вектор η с l. Векторы υ и w перейдут в соответствующие векторы υ_1 и w_1. Тогда вектору l

будут соответствовать два неколлинеарных вектора υ_1 и w_1 , а значит, и вся плоскость $\upsilon_1 \wedge w_1$, что противоречит одномерности распределения.

Замечание. Предложение 6 верно не только в локально-симметричном случае. Легко видеть, что уравнения леммы 2 инвариантны относительно преобразований в $\xi \wedge \upsilon$-плоскости, а значит, верно и предложение 1, на котором основано доказательство предложения 6.

Теорема доказана.

Список литературы

1. *P. Maltz*, The nullity spaces of curvature-like tensors.– J. Diff. Geom. (1972), v. 1, No 3-4, p. 519–529.
2. *S. Sasaki*, On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifold. II.– Tohoku Math. J. (1962), v. 14, p. 146–155.
3. *Д. Громолл, В. Клингенберг, В. Мейер*, Риманова геометрия в целом. Мир, Москва (1970), 191 с.
4. *S. Sasaki*, On the differential geometry of tangent bundle of Riemannian manifold. I.– Tohoku Math. J. (1958), v. 10, p. 338–354.
5. P. Dombrowski, On the geometry of tangent bundle.– J. Reine Angew. Math. (1962), v. 210, p. 73–88.

On the vertical strong sphericity of Sasaki metric of tangent sphere bundles

A. L. Yampol'sky

The distribution $\mathcal{L}^q$ on the Riemannian manifold M^n is called strong spherical if the curvature tensor of its metric satisfies the condition $R(X, Y)Z = k(\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y)$, $(k > 0)$ for any tangent to M^n vectors X, Z and any $Y \in L^q$. The value $q = \dim \mathcal{L}^q$ is called the strong sphericity index. The conditions are considered at which the vertical strong spherical distribution can exist on tangent sphere bundle T_1M^n with Sasaki metric.

Про вертикальну сильну сферичність метрики Сасакі сферичних дотичних розшарувань

О. Л. Ямпольский

Розподіл $\mathcal{L}^q$ на римановому многовиді M^n називається сильно сферичним, якщо кривини його метрики задовольняють умові $R(X, Y)Z = k(\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y)$, $(k > 0)$ для будь-яких дотичних до M^n векторів X, Z і будь-якого $Y \in \mathcal{L}^q$. Число $q = \dim \mathcal{L}^q$ називається індексом сферичності. Розглядається питання щодо існування на сферичному дотичному розшаруванні T_1M^n з метрикою Сасакі вертикального сильно сферичного розподілу.