

Критерий малости невязки для бимодального решения уравнения Больцмана

В.Д. Гордевский

*Харьковский государственный университет,
Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4*

Статья поступила в редакцию 20 сентября 1995 года

Для явного приближенного решения уравнения Больцмана в виде пространственно-неоднородной линейной комбинации двух максвеллианов с различными массовыми скоростями вычислена точная низкотемпературная асимптотика невязки между левой и правой частями уравнения в смысле интегральной метрики. Получены необходимые и достаточные условия стремления к нулю этой невязки за счет выбора значений параметров, входящих в решение.

В предыдущей работе [1] предложено приближенное бимодальное решение уравнения Больцмана. Напомним, что трехмерное нелинейное уравнение Больцмана для твердых сфер имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d^2}{2} \int_{R^3} dv_1 \int_{\Sigma} d\alpha \cdot |(v - v_1, \alpha)| [f(t, v', x)f(t, v'_1, x) - f(t, v, x)f(t, v_1, x)] \quad (1)$$

или коротко:

$$D(f) = Q(f, f), \quad (2)$$

где $t \in R^1$ – время, $x = (x^1, x^2, x^3) \in R^3$ – координата частицы, $v, v_1 \in R^3$ – скорости частиц до столкновения, v', v'_1 – после столкновения, $f(t, v, x)$ – искомая функция распределения частиц, $\frac{\partial f}{\partial x}$ – ее пространственный градиент, d – диаметр частиц;

$$v' = v - \alpha(v - v_1, \alpha), \quad v'_1 = v_1 + \alpha(v - v_1, \alpha), \quad \alpha \in \Sigma, \quad (3)$$

где Σ – единичная сфера в R^3 .

Предложенное в [1] приближенное явное решение уравнения (1) таково (сразу заметим, что принятые в данной работе обозначения несколько отличаются от обозначений работы [1] и являются более традиционными):

$$f(t, v, x) = \varphi(t, x)M(v) + [1 - \varphi(t, x)]M_0(v), \quad (4)$$

$$\varphi(t, x) = \left[1 + e^{c(x^1 - Dt)}\right]^{-1}; \quad (5)$$

максвеллианы $M(v)$ и $M_0(v)$ берутся в виде

$$M(v) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta v^2}, \quad M_0(v) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta(v-v_0)^2}, \quad (6)$$

где c, D – произвольные параметры, $\beta = \frac{1}{2T}$ – обратная температура газа, $v_0 = (v_0^1, v_0^2, v_0^3)$ – массовая скорость. Там же доказано, что невязка между левой и правой частями уравнения (2) может быть ограничена сверху суммой величин, имеющих при $\beta \rightarrow +\infty$ (низкотемпературный предел) конечные пределы. Однако оставался открытым вопрос о существовании предела самой невязки.

Целью настоящей работы является доказательство существования предела невязки между частями уравнения (2) при $\beta \rightarrow +\infty$ и, более того, явное вычисление этого предела, что позволяет затем сделать некоторые выводы о поведении уравнения Больцмана в зависимости от имеющихся параметров. Основной результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема. Пусть L – пространство функций с нормой

$$\|g\|_L = \sup_{(x,t) \in R^3 \times R^1} \int_{R^3} |g(t, v, x)| dv.$$

Невязку Δ определим следующим образом:

$$\Delta = \|D(f) - Q(f, f)\|_L.$$

Тогда для любых D, c, v_0 существует предел

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \Delta = \frac{1}{4} \left[\left| Dc + \pi d^2 |v_0| \right| + \left| (v_0^1 - D)c + \pi d^2 |v_0| \right| + 2\pi d^2 |v_0| \right]; \quad (7)$$

здесь v_0^1 и $|v_0|$ – первая компонента и длина вектора v_0 , соответственно.

Доказательство. Подставляя (4)–(6) в (1) и используя результаты работ [2, 3], после преобразований, аналогичных проведенным в [1], будем

иметь

$$4\Delta \propto \int_{R^3} dv \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} \left| c \left[D e^{-\beta v^2} + (v_0^1 - D) e^{-\beta(v-v_0)^2} \right] + \pi d^2 |v_0| \right. \\ \times \left. \left(e^{-\beta v^2} + e^{-\beta(v-v_0)^2} \right) - \frac{\pi d^2 \left(|v - \frac{v_0}{2}| + \frac{|v_0|}{2} \right)}{\beta |v_0| \cdot |v - \frac{v_0}{2}|} e^{\beta \left[\left(|v - \frac{v_0}{2}| + \frac{|v_0|}{2} \right)^2 - v^2 - (v-v_0)^2 \right]} \right|, \quad (8)$$

где введенный в [1] знак эквивалентности понимается так: $a \propto b$, если $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} a = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} b$, либо оба предела не существуют. После перегруппировки слагаемых и преобразования показателя экспоненты в (8) получим

$$4\Delta \propto \int_{R^3} dv \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} \\ \times \left| B e^{-\beta v^2} + B_0 e^{-\beta(v-v_0)^2} - \frac{\pi d^2 \left(|v - \frac{v_0}{2}| + \frac{|v_0|}{2} \right)}{\beta |v_0| \cdot |v - \frac{v_0}{2}|} e^{-\beta \left(|v - \frac{v_0}{2}| - \frac{|v_0|}{2} \right)^2} \right|, \quad (9)$$

где введены обозначения

$$B = cD + \pi d^2 |v_0|, \quad B_0 = (v_0^1 - D)c + \pi d^2 |v_0|. \quad (10)$$

Произведя в (9) последовательно ряд замен: сначала $u = \sqrt{\beta}(v - \frac{v_0}{2})$, затем переходя к сферической системе координат (r, φ, ψ) , в которой выполнено равенство $(u, v_0) = r|v_0| \sin \psi$, и интегрируя по "долготе" φ , наконец, полагая $s = \sin \psi$, будем иметь

$$4\Delta \propto \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^1 ds \int_0^{+\infty} r^2 dr e^{-r^2 - \beta \frac{v_0^2}{4}} \\ \times \left| B e^{-\sqrt{\beta} r s |v_0|} + B_0 e^{\sqrt{\beta} r s |v_0|} - \frac{\pi d^2}{2\beta |v_0|} \left(r + \sqrt{\beta} \frac{|v_0|}{2} \right) e^{\sqrt{\beta} r |v_0|} \right|. \quad (11)$$

Далее, после вынесения последней экспоненты за знак модуля, непосредственными вычислениями проверяется равенство

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \int_0^{+\infty} \left| r - \sqrt{\beta} \frac{|v_0|}{2} \right| e^{-(r - \sqrt{\beta} \frac{|v_0|}{2})^2} r dr = 0,$$

что позволяет переписать (11) в виде (внешнее интегрирование по s здесь, очевидно, роли не играет)

$$\Delta \propto \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-1}^1 ds \int_0^{+\infty} r^2 dr e^{-(r - \sqrt{\beta} \frac{|v_0|}{2})^2} \\ \times \left| B e^{-\sqrt{\beta} r |v_0|(s+1)} + B_0 e^{\sqrt{\beta} r |v_0|(s-1)} - \frac{\pi d^2}{r\sqrt{\beta}} \right|. \quad (12)$$

Дальнейший поиск асимптотики правой части (12) при $\beta \rightarrow +\infty$ сильно затруднен ввиду присутствия модуля под знаком интеграла. Дело в том, что при разных B и B_0 выражение, стоящее под знаком модуля, может принимать значения с противоположными знаками в зависимости от переменных интегрирования r и s . Тем не менее, рассматривая отдельно несколько случаев и развивая метод, примененный в [1], удастся найти предел правой части (12) при $\beta \rightarrow +\infty$. Именно, преобразуем (12) к более удобному виду, сделав замену $y = r|v_0|\sqrt{\beta}$ и введя новые обозначения

$$E = \frac{B}{\pi d^2 |v_0|}, \quad E_0 = \frac{B_0}{\pi d^2 |v_0|}. \quad (13)$$

В результате будем иметь

$$\Delta \propto \frac{\sqrt{\pi} d^2}{2v_0^2 \beta^{3/2}} e^{-\beta \frac{v_0^2}{4}} \int_{-1}^1 ds \int_0^{+\infty} y^2 dy e^{-\frac{y^2}{\beta v_0^2}} \left| E e^{-ys} + E_0 e^{ys} - \frac{e^y}{y} \right|. \quad (14)$$

Интегрирование в (14) ведется по полуполосе

$$\Omega = \{(s, y) \in R^2 : -1 \leq s \leq 1; y \geq 0\}.$$

Модуль под знаком интеграла в (14) будет раскрываться по-разному в различных частях Ω в зависимости от значений E и E_0 . Формально возможны 9 случаев ($E = 0; \operatorname{sgn} E = \pm 1$ в сочетании с $E_0 = 0; \operatorname{sgn} E_0 = \pm 1$). Однако случаи, когда $E = 0$ или $E_0 = 0$ (т.е. $BB_0 = 0$), рассмотрены в работе [1] при исследовании предела введенных там интегралов I_1 и I_2 и дают результаты, являющиеся частным случаем утверждения нашей теоремы при $B = 0$ или $B_0 = 0$. Кроме того, варианты, когда $E > 0, E_0 < 0$ либо $E < 0, E_0 > 0$, симметричны (сводятся один к другому заменой $s = -s_1$ в (14)). Поэтому на самом деле рассмотрению подлежат лишь следующие возможные комбинации:

- 1) $E_0 < 0, \quad E < 0$;
- 2) $E_0 < 0, \quad E > 0$;
- 3) $E_0 > 0, \quad E > 0$.

Результаты вычислений для каждого из этих трех вариантов таковы (сами вычисления приведены в Приложении):

- 1) $\Delta \propto \frac{1}{4} \pi d^2 |v_0| (2 - E - E_0)$;
- 2) $\Delta \propto \frac{1}{4} \pi d^2 |v_0| (2 + E - E_0)$;
- 3) $\Delta \propto \frac{1}{4} \pi d^2 |v_0| (2 + E + E_0)$,

что с учетом знаков E и E_0 в каждом случае, а также (13) и (10), всегда дает (7). Теорема доказана.

Проанализируем полученный результат. В следствии из теоремы работы [1] сформулированы достаточные условия стремления невязки Δ к нулю при соответствующем поведении параметров. Теперь можно утверждать, что они являются и необходимыми, т. е. в этом смысле результаты работы [1] нельзя улучшить.

Действительно, для того чтобы правая часть равенства (7) стремилась к нулю (а это равносильно тому, что $\Delta \rightarrow 0$ при таком комбинированном "повторном" предельном переходе), необходимо, чтобы одновременно выполнялись требования

$$\begin{aligned} Dc + \pi d^2 |v_0| &\rightarrow 0, \\ ((v_0^1) - D)c + \pi d^2 |v_0| &\rightarrow 0, \\ 2\pi d^2 |v_0| &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Последнее из требований (15) возможно, если $v_0 \rightarrow 0$ либо $d \rightarrow 0$. Однако при $v_0 \rightarrow 0$ исходное распределение (4)–(6) стремится к максвеллиану $M(v)$, т.е. к известному точному решению уравнения Больцмана; и мы приходим к тривиальной ситуации. Остается возможность $d \rightarrow 0$. Но тогда из первых двух требований (15) имеем

$$Dc \rightarrow 0, \quad (v_0^1 - D)c \rightarrow 0. \quad (16)$$

Если $c \rightarrow 0$, то, как видно из (5), $\varphi(t, x) \rightarrow 1$, т.е. $f(t, v, x) \rightarrow M(v)$, как и выше. Итак, c не стремится к нулю, тогда (16) дает

$$D \rightarrow 0, \quad v_0^1 - D \rightarrow 0, \quad (17)$$

что равносильно тому, что $D \rightarrow 0$, $v_0^1 \rightarrow 0$. Таким образом, единственным нетривиальным вариантом, приводящим к стремлению Δ к нулю, является именно тот, который указан в работе [1] (он назван там "заворачивающим потоком"), а именно:

$$\lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ v_0^1 \rightarrow 0 \\ D \rightarrow 0}} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \Delta = 0. \quad (18)$$

В заключение еще раз укажем на то (см. [1]), что в процессе предельного перехода (18) само распределение (4) выходит из пространства L (уже на первом этапе, т.е. при $\beta \rightarrow +\infty$); невязка же Δ , построенная именно в L , выдерживает предельный переход. Кроме того, даже в пространстве обобщенных функций внешний предел ($d, v_0^1, D \rightarrow 0$) не приводит к тому, что бимодальное распределение (4) стремится к максвеллиану (ибо две другие

компоненты массовой скорости, v_0^2 и v_0^3 , остаются совершенно произвольными!), т. е. "заворачивающий поток" не есть малое отклонение от однородного равновесного распределения.

Приложение

Проверим справедливость трех эквивалентностей, которыми завершалось доказательство теоремы.

1. Случай $E_0 < 0$, $E < 0$. В этом случае в (14) все слагаемые, стоящие под знаком модуля, имеют одинаковые знаки, т. е. модуль просто снимается во всей полуполосе Ω , после чего будем иметь

$$\Delta \propto \frac{\sqrt{\pi}d^2}{2v_0^2\beta^{3/2}} e^{-\beta\frac{v_0^2}{4}} \int_{-1}^1 ds \int_0^{+\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{\beta v_0^2}} \left(\frac{e^y}{y} - Ee^{-ys} - E_0e^{ys} \right) dy. \quad (\text{П.1})$$

Поменяв порядок интегрирования по s и y (обоснование тривиально) и проинтегрировав по s , получим

$$\Delta \propto \frac{\sqrt{\pi}d^2}{2v_0^2\beta^{3/2}} e^{-\beta\frac{v_0^2}{4}} \int_0^{+\infty} y^2 dy e^{-\frac{y^2}{\beta v_0^2}} \left[2\frac{e^y}{y} + \frac{E}{y}(e^{-y} - e^y) - \frac{E_0}{y}(e^y - e^{-y}) \right]. \quad (\text{П.2})$$

Положим

$$\frac{\sqrt{\pi}d^2}{2v_0^2\beta^{3/2}} = K. \quad (\text{П.3})$$

Тогда правая часть (П.2) распадается на сумму двух интегралов $I_1 + I_2$, где

$$I_1 = K \int_0^{+\infty} y dy e^{-\frac{y^2}{\beta v_0^2} + y - \beta\frac{v_0^2}{4}} (2 - E - E_0), \quad (\text{П.4})$$

$$I_2 = K \int_0^{+\infty} y dy e^{-\frac{y^2}{\beta v_0^2} - y - \beta\frac{v_0^2}{4}} (E + E_0). \quad (\text{П.5})$$

Вычислим каждый из этих интегралов в отдельности, проделав замены: в первом положим $p = \frac{y}{\sqrt{\beta|v_0|}} - \frac{\sqrt{\beta|v_0|}}{2}$; во втором — $q = \frac{y}{\sqrt{\beta|v_0|}} + \frac{\sqrt{\beta|v_0|}}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} I_1 &= K \int_{-\frac{\sqrt{\beta|v_0|}}{2}}^{+\infty} \left(p + \frac{\sqrt{\beta|v_0|}}{2} \right) (\sqrt{\beta|v_0|})^2 e^{-p^2} (2 - E - E_0) dp \\ &= K(2 - E - E_0) \left[\int_{-\frac{\sqrt{\beta|v_0|}}{2}}^{+\infty} p e^{-p^2} \beta v_0^2 dp + \frac{1}{2} \int_{-\frac{\sqrt{\beta|v_0|}}{2}}^{+\infty} e^{-p^2} \beta^{3/2} |v_0|^3 dp \right]. \end{aligned}$$

С учетом (П.3) далее будем иметь

$$I_1 = (2 - E - E_0) \frac{\sqrt{\pi} d^2}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_{-\frac{\sqrt{\beta}|v_0|}{2}}^{+\infty} p e^{-p^2} dp + \frac{|v_0|}{2} \int_{-\frac{\sqrt{\beta}|v_0|}{2}}^{+\infty} e^{-p^2} dp \right]. \quad (\text{П.6})$$

Однако при $\beta \rightarrow +\infty$ первый из интегралов в (П.6) сходится к $\int_{-\infty}^{+\infty} p e^{-p^2} dp$, и за счет множителя $\beta^{-1/2}$ первое слагаемое в пределе исчезает, второе же стремится к $\frac{|v_0|}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2} dp = \frac{|v_0|}{2} \sqrt{\pi}$. Итак, из (П.6) получим

$$I_1 \propto \frac{\pi d^2}{4} (2 - E - E_0) |v_0|. \quad (\text{П.7})$$

Аналогично имеем

$$\begin{aligned} I_2 &= K(E + E_0) \int_{\frac{\sqrt{\beta}|v_0|}{2}}^{+\infty} (q - \frac{\sqrt{\beta}|v_0|}{2}) (\sqrt{\beta}|v_0|)^2 e^{-q^2} dq \\ &= (E + E_0) \frac{\sqrt{\pi} d^2}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_{\frac{\sqrt{\beta}|v_0|}{2}}^{+\infty} q e^{-q^2} dq - \frac{|v_0|}{2} \int_{\frac{\sqrt{\beta}|v_0|}{2}}^{+\infty} e^{-q^2} dq \right] \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

при $\beta \rightarrow +\infty$, ибо оба интеграла стремятся к нулю как остатки сходящихся. Объединяя (П.7) и (П.8), получим то, что требовалось.

2. Случай $E_0 < 0, E > 0$. Теперь выражение под знаком модуля имеет разные знаки в различных частях Ω , и рассмотрение существенно усложняется. Прежде всего выясним знаки этого выражения, для чего решим уравнение

$$E e^{-ys} + E_0 e^{ys} - \frac{e^y}{y} = 0 \quad (\text{П.9})$$

относительно переменной s . Имеем (поскольку знаки E и E_0 противоположны, решение единственно)

$$s = \mu(y) = \frac{1}{y} \ln \frac{\frac{e^y}{y} - \sqrt{\frac{e^{2y}}{y^2} - 4EE_0}}{2E_0}. \quad (\text{П.10})$$

К счастью, функция $\mu(y)$ допускает прямое аналитическое исследование. Оказывается, что

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \mu(y) = -1 \quad (\text{П.11})$$

при любых E, E_0 . Далее график $\mu(y)$ пересекает границу области Ω либо один раз, либо трижды (в зависимости от E и E_0), причем всегда существует единственная точка пересечения с прямой $s = -1$, (которая является

решением уравнения $e^{-2y} = \frac{1}{yE_0} - \frac{E}{E_0}$; ее естественно обозначить через y_{-1} . Точки пересечения с прямой $s = 1$ обозначим через y_1^1 и y_1^2 ; их может не быть вовсе (и тогда $\mu(y) < 1$ при всех $y > 0$); если же они существуют, то удовлетворяют уравнению $e^{2y} = \frac{Ey}{1-E_0y}$ (в частности они могут совпасть).

Возможные варианты поведения $\mu(y)$ изображены на рис. 1, а, б.

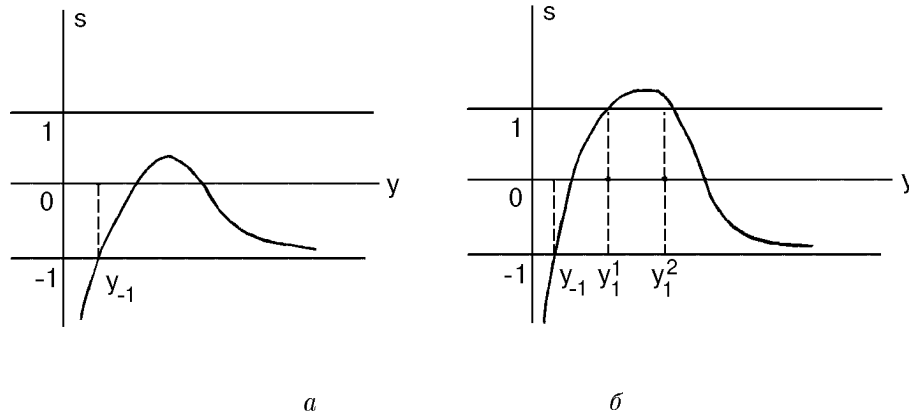


Рис. 1

Как видим, область Ω разбивается кривой $s = \mu(y)$ либо на две, либо на три части, в которых модуль под интегралом в (14) раскрывается по-разному.

Рассмотрим эти варианты последовательно (для краткости записи все подынтегральное выражение в (14) вместе с коэффициентом обозначим через $H(s, y)$ – без учета модуля!)

Вариант а).

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} |H(s, y)| ds dy &= \left| \int_0^{y_{-1}} dy \int_{-1}^1 ds H(s, y) \right. \\ &+ \left. \int_{y_{-1}}^{\infty} dy \int_{\mu(y)}^1 ds H(s, y) - \int_{y_{-1}}^{\infty} dy \int_{-1}^{\mu(y)} ds H(s, y) \right|. \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

Подставляя в (II.12) выражение для $H(s, y)$ и проинтегрировав каждое слагаемое по s , с учетом (II.10) и (14), получим после очевидных упрощений

$$\begin{aligned} \Delta &\propto \frac{\sqrt{\pi} d^2}{2v_0^2 \beta^{3/2}} \left| (E + E_0 - 2) \int_0^{y_{-1}} ye^{-\left(\frac{y}{\sqrt{\beta|v_0|}} - \frac{\sqrt{\beta|v_0|}}{2}\right)^2} dy \right. \\ &- \left. (E + E_0) \int_0^{y_{-1}} ye^{-\left(\frac{y}{\sqrt{\beta|v_0|}} + \frac{\sqrt{\beta|v_0|}}{2}\right)^2} dy \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{y_{-1}}^{\infty} y dy e^{-\left(\frac{y}{\sqrt{\beta|v_0|}} - \frac{\sqrt{\beta|v_0|}}{2}\right)^2} \left(E_0 - E + \frac{2}{y} \ln \frac{\frac{e^y}{y} - \sqrt{\frac{e^{2y}}{y^2} - 4EE_0}}{2E_0} \right) \\
 & + \int_{y_{-1}}^{\infty} y dy e^{-\left(\frac{y}{\sqrt{\beta|v_0|}} + \frac{\sqrt{\beta|v_0|}}{2}\right)^2} (E_0 - E) \\
 & + 2e^{-\beta\frac{v_0^2}{4}} \int_{y_{-1}}^{\infty} y dy e^{-\frac{y^2}{\beta v_0^2}} \sqrt{\frac{e^{2y}}{y^2} - 4EE_0} \Big| . \tag{П.13}
 \end{aligned}$$

Обозначим интегралы в (П.13) в порядке следования через $I_1 - I_5$ (вместе с постоянным множителем, стоящим перед каждым из них). Поскольку y_{-1} зависит лишь от E , E_0 , а подынтегральные функции в I_1 и I_2 равномерно ограничены (относительно β), то I_1 и I_2 стремятся к нулю при $\beta \rightarrow +\infty$ (благодаря общему множителю $\beta^{-3/2}$). Интеграл I_4 аналогичен I_2 (см. П.5), и, согласно (П.8), также стремится к нулю. Интеграл I_5 в пределе тоже дает нуль, как видно из оценки:

$$\begin{aligned}
 I_5 & = \frac{\sqrt{\pi}d^2}{v_0^2\beta^{3/2}} \int_{y_{-1}}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{\beta v_0^2} + y - \beta\frac{v_0^2}{4}} \sqrt{1 - 4EE_0\frac{y^2}{e^{2y}}} dy \\
 & \leq \frac{\sqrt{\pi}d^2}{v_0^2\beta^{3/2}} \cdot N(E, E_0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{y}{\sqrt{\beta|v_0|}} - \frac{\sqrt{\beta|v_0|}}{2}\right)^2} dy
 \end{aligned}$$

(здесь $N(E, E_0) = \max_{y \in [0, +\infty)} \sqrt{1 - 4EE_0\frac{y^2}{e^{2y}}}$, очевидно, существует, ибо $EE_0 < 0$), так как после замены $p = \frac{y}{\sqrt{\beta|v_0|}} - \frac{\sqrt{\beta|v_0|}}{2}$ будем иметь

$$I_5 \leq \frac{\sqrt{\pi}d^2}{\beta|v_0|} N(E, E_0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2} dp \rightarrow 0 \quad (\beta \rightarrow +\infty) .$$

Таким образом, осталось найти предел I_3 . Вынося величину $\frac{e^y}{y}$ за скобки под знаком логарифма и расписывая его как сумму четырех логарифмов, получим, что I_3 распадается на пять слагаемых:

$$I_3 = \sum_{k=1}^5 I_3^k , \tag{П.14}$$

предел каждого из которых находим так:

$$I_3^1 = \frac{\sqrt{\pi}d^2}{2v_0^2\beta^{3/2}} (E_0 - E) \int_{y_{-1}}^{\infty} y dy e^{-\left(\frac{y}{\sqrt{\beta|v_0|}} - \frac{\sqrt{\beta|v_0|}}{2}\right)^2} \rightarrow \frac{1}{4}\pi d^2 |v_0| (E_0 - E)$$

по аналогии с (П.4)–(П.7);

$$I_3^2 = \frac{\sqrt{\pi}d^2}{v_0^2\beta^{3/2}} \int_{y_{-1}}^{\infty} \ln 2E \cdot e^{-\left(\frac{y}{\sqrt{\beta}|v_0|} - \frac{\sqrt{\beta}|v_0|}{2}\right)^2} dy \rightarrow 0$$

аналогично I_5 ;

$$I_3^3 = -\frac{\sqrt{\pi}d^2}{v_0^2\beta^{3/2}} \int_{y_{-1}}^{\infty} ye^{-\left(\frac{y}{\sqrt{\beta}|v_0|} - \sqrt{\beta}\frac{|v_0|}{2}\right)^2} dy \rightarrow -\frac{1}{2}\pi d^2|v_0|$$

наподобие I_3^1 ;

$$I_3^4 = \frac{\sqrt{\pi}d^2}{v_0^2\beta^{3/2}} \int_{y_{-1}}^{+\infty} e^{-\left(\frac{y}{\sqrt{\beta}|v_0|} - \sqrt{\beta}\frac{|v_0|}{2}\right)^2} \ln y dy \rightarrow 0,$$

ибо после перехода к переменной p (см. выше) легко оценивается сверху величиной типа $\text{const} \cdot \frac{\ln \beta}{\beta}$;

$$I_3^5 = \frac{-\sqrt{\pi}d^2}{v_0^2\beta^{3/2}} \int_{y_{-1}}^{+\infty} e^{-\left(\frac{y}{\sqrt{\beta}|v_0|} - \frac{\sqrt{\beta}|v_0|}{2}\right)^2} \ln \left[1 + \sqrt{1 - 4EE_0 \frac{y^2}{e^{2y}}} \right] dy \rightarrow 0,$$

ибо

$$\ln \left[1 + \sqrt{1 - 4EE_0 \frac{y^2}{e^{2y}}} \right] \leq \ln[1 + N(E, E_0)],$$

т.е. $|I_3^5| \leq \text{const} \cdot |I_3^2| \rightarrow 0$. Итак, вспоминая (П.13) и (П.14), получаем

$$\Delta \propto \left| \frac{\pi d^2|v_0|(E_0 - E)}{4} - \frac{1}{2}\pi d^2|v_0| \right| = \frac{1}{4}\pi d^2|v_0|(2 + E - E_0),$$

с учетом знаков E и E_0 , что и требовалось.

Вариант б). Теперь вместо (П.12) будем иметь

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} |H(s, y)| ds dy &= \left| \int_0^{y_{-1}} dy \int_{-1}^1 ds H(s, y) + \int_{y_{-1}}^{y_1^1} dy \int_{\mu(y)}^1 ds H(s, y) \right. \\ &+ \int_{y_1^2}^{+\infty} dy \int_{\mu(y)}^1 ds H(s, y) - \int_{y_{-1}}^{y_1^1} dy \int_{-1}^{\mu(y)} ds H(s, y) \\ &\left. - \int_{y_1^1}^{y_1^2} dy \int_{-1}^1 ds H(s, y) - \int_{y_1^2}^{+\infty} dy \int_{-1}^{\mu(y)} ds H(s, y) \right|. \end{aligned} \quad (\text{П.15})$$

Однако, как легко видеть, разность между выражениями, стоящими под знаками модулей в (П.15) и (П.12), после интегрирования по s сводится к

интегралу по отрезку $[y_1^1, y_1^2]$ от функции, непрерывной по y (она включает в себя экспоненты того же типа (ограниченные по β и y), что и ранее, логарифмы, функцию $\mu(y)$ и степени y); т.е. вся эта разность равномерно ограничена по β , а наличие множителя $\beta^{-3/2}$ перед интегралом приводит к тому, что пределы выражений (П.12) и (П.15) при $\beta \rightarrow +\infty$ совпадают, т.е. и в варианте б) получаем требуемый результат.

3. Случай $E_0 > 0, E > 0$.

Теперь уравнение (П.9) имеет два решения

$$s = \mu_{\pm}(y) = \frac{1}{y} \ln \frac{\frac{ey}{y} \pm \sqrt{\frac{e^2y}{y^2} - 4EE_0}}{2E_0}. \quad (\text{П.16})$$

Поскольку $\min_{(0;+\infty)} \frac{e^2y}{y^2} = e^2$, возникают две ситуации:

а) $4EE_0 \leq e^2$, тогда $\mu_{\pm}(y)$ определены на $(0; +\infty)$.

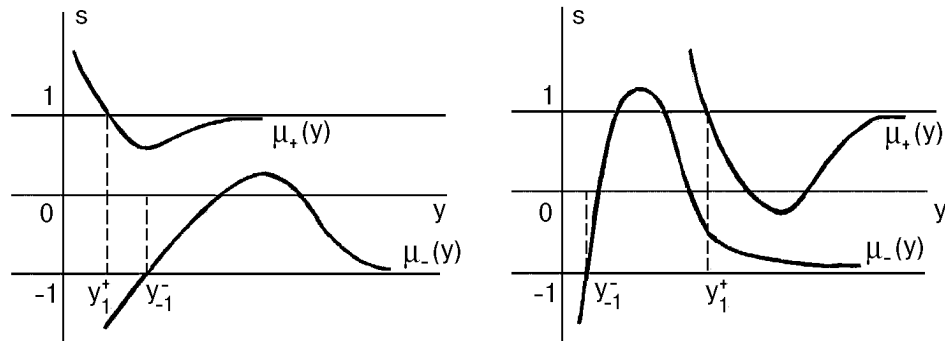
б) $4EE_0 > e^2$, тогда $\mu_{\pm}(y)$ определены при $y \in (0, y') \cup (y'', +\infty)$,

где $y' < y''$ – решения уравнения $\frac{e^2y}{y^2} = 4EE_0$.

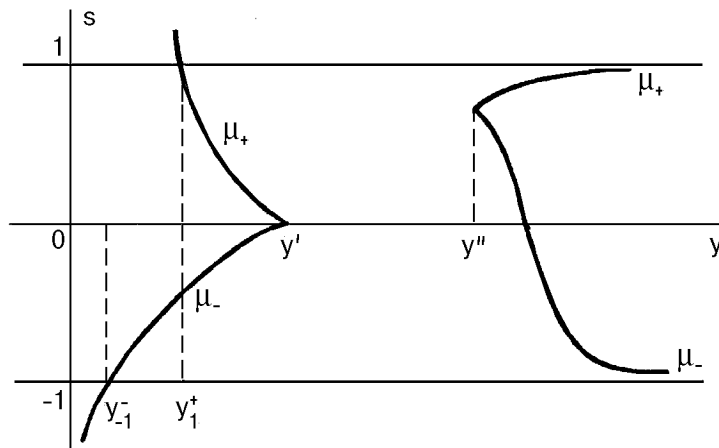
Кроме того, в зависимости от E и E_0 функции $\mu_+(y)$ и $\mu_-(y)$ могут вести себя по-разному (каждая – аналогично рис. 1,а, б). Тем не менее легко проверить некоторые основные свойства $\mu_{\pm}(y)$, справедливые при любых E и E_0 :

- 1) $\mu_-(y) \leq \mu_+(y)$ на всей области определения;
- 2) $\lim_{y \rightarrow 0} \mu_{\pm}(y) = \pm\infty$;
- 3) $\mu_{\pm}(y) = \pm 1 \mp \frac{\ln y}{y} + O(\frac{1}{y})$, $(y \rightarrow +\infty)$;
- 4) существуют и единственны такие y_1^+ и y_{-1}^- , что $\mu_{\pm}(y_{\pm 1}^{\pm}) = \pm 1$.

На рис. 2 представлены некоторые возможные варианты поведения этих функций, отвечающие ситуациям а) и б).



a



б

Рис. 2

Однако большое количество возникающих здесь вариантов удастся свести, по сути дела, к одному, ибо, как видно из предыдущего (исследование случая 2), все интегралы по y , берущиеся в конечных пределах, дают нулевой вклад в асимптотику величины Δ при $\beta \rightarrow +\infty$, а вид встречающихся функций в случае 3 вполне аналогичен тем, которые возникали ранее. Поэтому достаточно выбрать некое фиксированное A , которое было бы больше всех чисел y_{-1}^- , y_1^+ , y' , y'' , и искать лишь асимптотику такого выражения:

$$\iint_{\Omega} |H(s, y)| ds dy$$

$$\propto \left| \int_A^{+\infty} dy \left[\int_{-1}^{\mu_-(y)} H(s, y) ds + \int_{\mu_+(y)}^1 H(s, y) ds - \int_{\mu_-(y)}^{\mu_+(y)} H(s, y) ds \right] \right|. \quad (\text{П.17})$$

Вычисления, полностью аналогичные проведенным в случае 2, позволяют найти предел выражения (П. 17) при $\beta \rightarrow +\infty$, который оказывается равным

$$\frac{1}{4} \pi d^2 |v_0| |E_0 + E + 2|,$$

что с учетом знаков E_0 и E в данном случае вновь дает то, что требовалось.

Таким образом, доказательство теоремы завершено.

Список литературы

- [1] *В.Д. Гордевский*, Приближенное бимодальное решение нелинейного уравнения Больцмана для твердых сфер. — *Мат. физ., анализ, геом.* (1995), т. 2, № 2, с. 168–176.
- [2] *S.M. Deshpande and R. Narasimha*, The Boltzmann collision integrals for a combination of Maxwellians. — *J. Fluid Mech.* (1969), v. 36, No 3, p. 545–554.
- [3] *R. Narasimha and S.M. Deshpande*, Minimum error solutions of the Boltzmann equation for shock structure. — *J. Fluid Mech.* (1969), v. 36, No 3, p. 555–570.

A criterium of smallest of the difference for bimodal solution of the Boltzmann equation

V.D. Gordevsky

For an explicit approximate solution of the Boltzmann equation in the form of a spatially-inhomogeneous linear combination of two Maxwellians with different mass velocities an exact low-temperature asymptotic of the difference between the left and right sides of the equation in the sense of integral metric is calculated. Necessary and sufficient conditions of tending of this difference to zero are derived by choosing values of parameters entering into the solution.

Критерій мализни відхилу для бімодального розв'язку рівняння Больцмана

В.Д. Гордевський

Для явного наближеного розв'язку рівняння Больцмана у вигляді просторово-неоднорідної лінійної комбінації двох максвеліанів з різними масовими швидкостями обчислено точну низькотемпературну асимптотику відхилу між лівою та правою частинами рівняння в сенсі інтегральної метрики. Здобуто необхідні та достатні умови прямування до нуля цього відхилу завдяки вибору значень параметрів, що входять у розв'язок.