Математическая физика, анализ, геометрия
1997, т. 4, № 1/2, с. 75–83

Ортогонально инвариантные римановы метрики на вещественных грассмановых многообразиях

С.Е. Козлов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Россия, 198904, г. Санкт-Петербург, ул. Библиотечная, 2
E-mail:zalg@pdmi.ras.ru

Статья поступила в редакцию 23 октября 1995 года

Дается полное описание в целом двухпараметрического семейства всех возможных $SO(4)$-инвариантных римановых метрик на вещественных грассмановых многообразиях $G_{2,4}$ и $G^+_{2,4}$. Формулируется некоторое экстремальное свойство, выделяющее каноническую метрику среди всех метрик такого семейства в случае многообразия $G^+_{2,4}$. На основе полученного дано новое, краткое геометрическое доказательство единственности (с точностью до постоянного множителя) инвариантных метрик на многообразиях $G_{p,n}$ и $G^+_{p,n}$ при $(p, n) \neq (2, 4)$ и указана эта метрика. Использовано вложение грассмановых многообразий в пространстве поливекторов $\Lambda_{p,n}$, рассматриваемое как евклидово пространство размерности $\binom{n}{p}$. Внутренние вопросы геометрии грассмановых многообразий решаются средствами внешней геометрии.

1.1. Рассмотрим n-мерное евклидово пространство V. Совокупность его p-мерных подпространств известным способом наделяется структурой $p(n-p)$-мерного гладкого многообразия $G_p(V)$, называемого грассмановым многообразием. Многообразие таких же, но ориентированных p-плоскостей обозначим $G^+_p(V)$. Многообразие $G_p(V)$ можно рассматривать как фактор-пространство многообразия $G^+_p(V)$, получающееся склеиванием противоположно ориентированных p-плоскостей. Тем самым, возникает двулистное накрытие

$$\sigma : G^+_p(V) \to G_p(V). \tag{1}$$

Группа $SO(V)$ естественно гладко и транзитивно действует на многообразиях из (1), коммутируя с преобразованием σ. Поэтому всякая $SO(V)$-инвариантная риманова метрика на одном из этих многообразий индуцирует $SO(V)$-инвариантную метрику на другом, причем накрытие σ становится римановым. Из общей теории однородных симметрических пространств [1] следует, что такая риманова метрика всегда существует и единственна (с точностью до постоянного неотрицательного множителя) для всех многообразий $G^+_{p,n}(G_{p,n})$, кроме многообразий $G^+_{2,4}(G_{2,4})$.

В работе [2] Лейхтвейс, независимо от [1], используя методы теории представления групп, доказал единственность ортогонально инвариантной метрики при $(p,n) \neq (2,4)$. Кроме того, локально, в некоторой системе координат, он получил явное выражение для такой метрики, а также формулу для двухпараметрического семейства этих метрик при $(p,n) = (2,4)$.

В настоящей работе дано полное геометрическое описание всех $SO(4)$-инвариантных римановых метрик на $G^+_{2,4}(G_{2,4})$. Заметим, что все меры объема, индуцированные этими метриками, пропорциональны в силу $SO(4)$-инва-
риантности. Это обстоятельство позволяет при помощи умножения на константу каждой метрики стандартизировать меру объема. Будет показано, что каноническая инвариантная метрика в случае $G^+_{2,4}$, т.е. метрика, приведенная в [2] для всех (p,n), придает многообразию $G^+_{2,4}$ наименьший диаметр по сравнению с остальными метриками, разумеется, при условии унификации объема.

Приведенное исследование случая $(p,n) = (2,4)$ позволяет легко доказать единственность $SO(V)$-инвариантной метрики для $(p,n) \neq (2,4)$.

1.2. Напомним некоторые свойства плюккерова вложения грассманова многообразия $G^+_{p,n}$ в пространство p-векторов $\Lambda_{p,n}$, построенного над евклидовым пространством V (см., например, [3]). Скалярное произведение в пространстве V канонически индуцирует евклидову структуру в $\Lambda_{p,n}$. Сопоставляя каждой ориентированной p-плоскости пространства V, проходящей через начало пространства V, единичный простой (разложимый) p-вектор ω, ассоциированный с этой плоскостью $\pi(\omega)$, получаем плюккерово вложение. Далее под грассмановым многообразием будем понимать его образ при описанном вложении, который можно представить в виде

$$G^+_{p,n} = K \cap S^N\,,$$

где K – конус простых p-векторов, а S^N – единичная сфера пространства $\Lambda_{p,n}$ размерности $\binom{n}{p} - 1$. Риманову метрику, возникающую на подмногообразии $G^+_{p,n}$ евклидова пространства $\Lambda_{p,n}$, назовем канонической и обозначим через g_0.

Всякий изоморфизм $A \in SO(V)$ однозначно распространяется до автоморфизма внешней алгебры $\Lambda(V)$, который обозначим той же буквой A. При этом сужение A на $\Lambda_{p,n}$ принадлежит $SO(\Lambda_{p,n})$ и переводит конус K в себя. Следовательно, сужение A на $G^+_{p,n}$ осуществляет изометрию грассманова многообразия, поэтому будем считать, что $A \in Iso(G^+_{p,n})$. Таким образом, каноническая риманова метрика на $G^+_{p,n}$ является $SO(V)$-инвариантной.

Как это обычно делается для подмногообразий линейных пространств и линейных отображений, отождествим касательные вектора пространства $T_\omega G^+_{p,n}$, $\omega \in G^+_{p,n}$ с элементами самого пространства $\Lambda_{p,n}$, а дифференциал $d_\omega A$ – с сужением A на $T_\omega G^+_{p,n}$.

1.3. Рассмотрим специальное представление многообразия $G^+_{2,4}$. Подробности можно найти в [4]. Ориентируем пространство V^4. В пространстве бивекторов $\Lambda_{2,4}$ действует линейный оператор Ходжа $*$ [3], который можно рассматривать как аналог векторного произведения в $\mathbb{R}^3$.

Линейный оператор $*$ самосопряжен и ортогонален, следовательно, его собственные числа равны ± 1. Кроме того, его след равен нулю, поэтому шестимерное пространство $\Lambda_{2,4}$ разлагается в прямую ортогональную сумму трехмерных собственных подпространств оператора Ходжа

$$\Lambda_{2,4} = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-, \quad \omega = \omega^+ + \omega^-, \quad *\omega^+ = \omega^+, \quad *\omega^- = -\omega^- . \tag{2}$$

Определим две двумерные сферы S^+ и S^-:

$$S^{+(-)} = \{\omega | \omega \in \Lambda^{+(-)}, \, |\omega| = \frac{1}{\sqrt{2}}\} .$$

В [4] показано, что грассманово многообразие $G^+_{2,4}$ можно представить в виде суммы Минковского этих сфер:

$$G^+_{2,4} = S^+ + S^- .$$

Таким образом, грассманово многообразие $G^+_{2,4}$ с канонической римановой метрикой g_0 является римановым произведением двух сфер:

$$G^+_{2,4} = S^+(\frac{1}{\sqrt{2}}) + S^-(\frac{1}{\sqrt{2}}) . \tag{3}$$

2.1 Теорема. *Пусть на многообразии $G^+_{2,4}$ задана $SO(4)$-инвариантная риманова метрика g. Тогда $G^+_{2,4}$ с этой метрикой разлагается в риманово произведение двух двумерных сфер*:

$$G^+_{2,4} = S^2_1(R_1) \times S^2_2(R_2) . \tag{4}$$

При $R_1 = R_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ метрика g совпадает с g_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть символы $< \cdot, \cdot >$, $|\cdot|$ относятся к метрике g_0. Покажем, что все слои $S^+ \times \omega^-$, $\omega^+ \times S^-$ в (3) g-изометричны сфере постоянного радиуса. Рассмотрим две пары $\omega \in G^+_{2,4}$, $X \in T_\omega G^+_{2,4}$ и $\tilde\omega \in G^+_{2,4}$, $\tilde X \in T_{\tilde\omega} G^+_{2,4}$. Причем $|X| = |\tilde X| = 1$, а векторы X и $\tilde X$ касаются слоев $S^+ \times \omega^-$ и $\omega^+ \times S^-$, соответственно. Из (2) следует

$$\omega = \omega^+ + \omega^-, \quad \omega^+ = \frac{1}{2}(\omega + *\omega), \quad \omega^- = \frac{1}{2}(\omega - *\omega)\,,$$

$$X = X^+ + X^-, \quad X^+ = \frac{1}{2}(X + *X), \quad X^- = \frac{1}{2}(X - *X)\,. \tag{5}$$

Аналогичные равенства справедливы для пары $\tilde\omega$, $\tilde X$. Пусть $\omega = e_1 \wedge e_2$, где $< e_i, e_j >= \delta_{ij}$. Касательный вектор X можно представить в виде

$$X = d\omega = de_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge de_2 = m_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge m_2\,,$$

где m_1, $m_2 \in \pi^\perp(\omega)$. Из этого равенства легко следует, что за счет поворота базиса e_1, e_2 в площадке $\pi(\omega)$ можно добиться, чтобы векторы m_1 и m_2 стали перпендикулярными. Поэтому при удачном выборе базиса e_1, e_2 в площадке $\pi(\omega)$ для вектора X имеет место разложение

$$X = \lambda_1 n_1 \wedge e_2 + \lambda_2 e_1 \wedge n_2\,, \tag{6}$$

где векторы e_1, e_2, n_1, n_2 образуют ортонормированный положительно ориентированный базис в $\mathbb{R}_4$. Из (5) следует

$$\omega^+ = \frac{1}{2}(e_1 \wedge e_2 + n_1 \wedge n_2), \quad \omega^- = \frac{1}{2}(e_1 \wedge e_2 - n_1 \wedge n_2)\,, \tag{7}$$

$$X^+ = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}(n_1 \wedge e_2 - e_1 \wedge n_2), \quad X^- = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}(n_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge n_2)\,.$$

Так как вектор X касается слоя $S^+ \times \omega^-$, то $X^- = 0$, что эквивалентно равенству $\lambda_1 = -\lambda_2$. Вектор X единичный, значит, $X = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(n_1 \wedge e_2 - e_1 \wedge n_2)$. Аналогичное разложение имеет место и для вектора $\tilde X$ в некотором базисе $\tilde e_1$, $\tilde e_2$, $\tilde n_1$, $\tilde n_2$. Рассмотрим преобразование $A \in SO(4)$, переводящее базис e, n в базис $\tilde e$, $\tilde n$. Оно совмещает пару ω, X с парой $\tilde\omega$, $\pm\tilde X$. Если имеет место знак минус, то для совмещения исходных пар достаточно применить преобразование из $SO(4)$, соответствующее повороту $\tilde e_1$, $\tilde e_2$ в $\pi(\tilde\omega)$ на угол π.

Таким образом, любые два единичных в стандартной метрике вектора, касающиеся слоев S^+, можно ортогонально совместить. В силу $SO(4)$-инвариантности метрики, скалярное произведение $g(X,X)$ на таких векторах постоянно. Аналогично рассматриваются слои S^-. Откуда

$$g(X,X) = \mu^{+(-)} < X, X >, \quad X \in T_\omega S^{+(-)}, \quad \mu^{+(-)} > 0\,. \tag{8}$$

Из (3), (8) следует, что каждый слой $S^{+(-)}$ изометричен сфере радиуса $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mu^{+(-)})^{\frac{1}{2}}$.

Осталось показать, что в любой точке $\omega \in G^+_{2,4}$ слои $S^+ \times \omega^-$ и $\omega^+ \times S^-$ ортогональны в метрике g. Рассмотрим касательные к этим слоям векторы ω_i^+ и ω_i^-, $i = 1, 2$. Положим, что в стандартной метрике они ортогональны и равны по длине $1/\sqrt{2}$. Сумма любых двух векторов из Λ^+ и Λ^- длины $1/\sqrt{2}$ дает элемент многообразия $G^+_{2,4}$. Поэтому, с учетом (8) и $SO(4)$-инвариантности метрики g, выражение

$$|(\cos u\omega_1^+ + \sin u\omega_2^+) + (\cos v\omega_1^- + \sin v\omega_2^-)|_g^2 = \frac{1}{2}(\mu^+ + \mu^-)$$

$$+2(\cos u \cos v g(\omega_1^+, \omega_1^-) + \cos u \sin v g(\omega_1^+, \omega_2^-)$$

$$+ \sin u \cos v g(\omega_2^+, \omega_1^-) + \sin u \sin v g(\omega_2^+, \omega_2^-))$$

не зависит от u и v. Отсюда следует, что $g(\omega_i^+, \omega_i^-) = 0$. Значит, слои g-ортогональны.

2.2. В произведении (3) снабдим слои S^+ метрикой сферы радиуса R_1, а слои S^- – метрикой сферы радиуса R_2. Иными словами,

$$g(X,X) = 2R_1^2 < X, X >,\ X \in T_\omega S^+;\ g(Y,Y) = 2R_2^2 < Y, Y >,\ Y \in T_\omega S^-,$$

$$g(X,Y) = 0\,. \tag{9}$$

Теорема. *Риманова метрика g на*

$$G^+_{2,4} = S^+(R_1) \times S^-(R_2) \tag{10}$$

$SO(4)$-инвариантна.

Доказательство. Пусть пара ω, X совмещается с парой $\tilde{\omega}$, $\tilde{X}$ некоторым преобразованием $A \in SO(4)$. Рассмотрим разложение (6) для вектора X. Положим $(\tilde{e}, \tilde{n}) = A(e, n)$. Тогда для вектора $\tilde{X}$ имеет место разложение (6) с теми же коэффициентами λ_1, λ_2, но в базисе с волной. Векторы $X^{+(-)}$, $\tilde{X}^{+(-)}$ касаются слоев произведения (10), поэтому ортогональны в метрике g. Из (7), (9) следует

$$g(X,X) = g(X^+, X^+) + g(X^-, X^-)$$

$$= \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right) g(n_1 \wedge e_2 - e_1 \wedge n_2, n_1 \wedge e_2 - e_1 \wedge n_2)$$

$$+ \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right) g(n_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge n_1, n_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge n_2)$$

$$= R_1^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + R_2^2(\lambda_1 + \lambda_2)^2 = g(\tilde{X}, \tilde{X}) .$$

Такую метрику будем обозначать $g[R_1, R_2]$. При этом $g_0 = g\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Заметим, что параметры λ, μ из формулы (7) работы [2] связаны с параметрами R_1, R_2 соотношениями $\lambda = R_1^2 + R_2^2$, $\mu = R_1^2 - R_2^2$.

Из теорем разд. 2.1, 2.2 следует, что все $SO(4)$-инвариантные римановы метрики на $G_{2,4}^+$ описываются двухпараметрическим семейством (10). Метрики этого семейства не выдерживают действия более широкой группы $O(4)$. Действительно, преобразование $A \in O(4)$, заданное равенствами $\tilde{e}_1 = e_1$, $\tilde{e}_2 = e_2$, $\tilde{n}_1 = n_1$, $\tilde{n}_2 = n_2$, переводит слой S^+ в слой S^-. Поэтому для $O(4)$-инвариантной метрики g непременно $\mu^+ = \mu^-$, и риманова метрика g пропорциональна стандартной.

Формула (10) и накрытие (1) дают описание соответствующего двухпараметрического семейства метрик на $G_{2,4}$.

3. В семействе (4) метрики с одинаковым отношением $R_1 : R_2$ гомотетичны. Выберем в каждом классе гомотетичных метрик ту, которая дает меру объема канонической метрики g_0. Для этого достаточно приравнять полные объемы многообразия $G_{2,4}^+$ с метриками $g[R_1, R_2]$ и g_0, что эквивалентно равенству $R_1 R_2 = \frac{1}{2}$. Таким образом, семейство

$$g[t] = g\left[t, \frac{1}{2t}\right], \quad t > 0 , \tag{11}$$

является параметризацией набора всех $SO(4)$-инвариантных римановых метрик на грассмановом многообразии $G_{2,4}^+$ с общей мерой объема метрики $g_0 = g\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = g\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Любая другая $SO(4)$-инвариантная метрика гомотетична одной из метрик семейства (11).

Следующая теорема дает простой геометрический критерий, выделяющий каноническую метрику g_0 из прочих метрик семейства (11).

Теорема. *Многообразие $G_{2,4}^+$ с канонической метрикой g_0 обладает наименьшим диаметром среди всех метрик семейства* (11).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Всякая геодезическая γ на произведении двух римановых многообразий является произведением геодезических сомножителей γ_1 и γ_2. При этом $L^2(\gamma) = L^2(\gamma_1) + L^2(\gamma_2)$. Поэтому диаметр $\mathcal{D}^+[R_1, R_2]$ многообразия $G_{2,4}^+$ в метрике $g[R_1, R_2]$ равен

$$\mathcal{D}^+[R_1, R_2] = (\mathcal{D}^2(S^2(R_1)) + \mathcal{D}^2(S^2(R_2)))^{\frac{1}{2}} = \pi(R_1^2 + R_2^2)^{\frac{1}{2}} .$$

Следовательно, $\min_{t>0}\mathcal{D}^+(t) = \min_{t>0}\pi(t^2 + \frac{1}{4t^2}) = \pi = \mathcal{D}^+(\frac{1}{\sqrt{2}})$. □

4. Пусть $\omega \in G_{p,n}^+$, $n = p + q$ и $\{e_i\}_{i=1}^p$, $\{n_\alpha\}_{\alpha=1}^q$ – ортонормированные базисы площадок $\pi(\omega)$ и $\pi^\perp(\omega)$, ассоциированных с p-вектором $\omega = e_1 \wedge \cdots \wedge e_p$.

Положим $e_{i\alpha}(t) = \cos te_i + \sin tn_\alpha$, $\omega_{i\alpha}(t) = e_1 \wedge \dots \wedge e_{i-1} \wedge e_{i\alpha}(t) \wedge e_{i+1} \wedge \dots \wedge e_p$, $\omega_{i\alpha}(0) = \omega$. Векторы $\eta_{i\alpha} = \omega'_{i\alpha}(0) = e_1 \wedge \dots \wedge e_{i-1} \wedge n_\alpha \wedge e_{i+1} \wedge \dots \wedge e_p$ образуют ортонормированный (в канонической метрике) базис касательного пространства $T_\omega G^+_{p,n}$.

Теорема. *Пусть на грассмановом многообразии $G^+_{p,n}$, $n = p + q$ при $(p, n) \neq (2, 4)$ задана $SO(n)$-инвариантная риманова метрика g. Тогда эта метрика пропорциональна канонической.*

Доказательство. Достаточно показать, что все векторы $\eta_{i\alpha}$ имеют одинаковую g-длину и g-ортогональны. Фиксируем вектор η_{11}. Преобразование $A(\varphi) \in SO(n)$, определенное требованиями: $n_1 \to (n_1 \cos\varphi + n_\alpha \sin\varphi)$, $n_\alpha \to (-n_1 \sin\varphi + n_\alpha \cos\varphi)$, $\alpha \neq 1$, $e_i \to e_i$, $n_\beta \to n_\beta$, $\beta \neq 1, \alpha$, переводит p-вектор η_{11} в p-вектор

$$\eta(\varphi) = \cos\varphi\eta_{11} + \sin\varphi\eta_{1\alpha} = (\cos\varphi n_1 + \sin\varphi n_\alpha) \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_p\,.$$

Так как метрика g ортогонально инвариантна, то

$$g(\eta(\varphi), \eta(\varphi)) = \mu < \eta(\varphi), \eta(\varphi) >, \quad \mu > 0\,.$$

Откуда

$$g(\eta_{11}, \eta_{11}) = g(\eta_{1\alpha}, \eta_{1\alpha}), \quad g(\eta_{11}, \eta_{1\alpha}) = 0, \quad 2 \leq \alpha \leq q\,.$$

Аналогично доказывается, что

$$g(\eta_{11}, \eta_{11}) = g(\eta_{i1}, \eta_{i1}), \quad g(\eta_{11}, \eta_{i1}) = 0, \quad 2 \leq i \leq p\,.$$

Рассмотрим вектор $\eta_{i\alpha}$, i, $\alpha \neq 1$. Если такого вектора нет, то наше утверждение уже доказано. Не нарушая общности, будем считать, что $i = \alpha = 2$. Обозначим через V линейную оболочку $L(e_1, e_2, n_1, n_2)$. Будем считать, что базис e, n положительно ориентирован. Положим $V^\top = L(e_3, \dots, e_p)$, $V^N = L(n_3, \dots, n_q)$. Исходное пространство $\mathbb{R}^n$ разлагается в прямую ортогональную сумму

$$\mathbb{R}^n = V \oplus V^\top \oplus V^N\,.$$

На грассмановом многообразии $G^+_2(V) \subset \Lambda_2(V)$ введем риманову метрику $\bar{g}$, полагая для $\bar{X} \in T_\omega G^+_2(V)$

$$\bar{g}(\bar{X}, \bar{X}) = g(\bar{X} \wedge \tau, \bar{X} \wedge \tau), \quad \tau = e_3 \wedge \dots \wedge e_p\,. \tag{12}$$

Каждому элементу $\bar{A} \in SO(V)$ сопоставим преобразование $A = \bar{A} \times$ $\times id(V^\top) \times id(V^N) \in SO(\mathbb{R}^n)$. Из $SO(n)$-инвариантности метрики g следует

$$\begin{aligned} &\bar{g}(\bar{A}(\bar{X}), \bar{A}(\bar{X})) = g((\bar{A}(\bar{X}) \wedge \tau, \bar{A}(\bar{X}) \wedge \tau) \\ &= g(A(\bar{X} \wedge \tau), A(\bar{X} \wedge \tau)) = \bar{g}(\bar{X}, \bar{X})\,. \end{aligned}$$

Следовательно, метрика $\bar g$ $SO(V)$-инвариантна на $G_2^+(V)$ и, по теореме 2.1, имеет вид (10). Векторы $\bar X^{+(-)} = n_1 \wedge e_2 \mp e_1 \wedge n_2$ касаются слоев в произведении (10) (для $G_2^+(V)$) и имеют одинаковую каноническую длину. Так как $(p,n) \neq (2,4)$, то векторы $\bar X^{+(-)} \wedge \tau$ можно ортогонально совместить. Действительно, их совмещает преобразование $A \in SO(n)$:

$$\tilde n_2 = -n_2, \quad \tilde e_3 = -e_3, \ \tilde e_i = e_i, \ \tilde n_\alpha = n_\alpha, \ i \neq 3, \ \alpha \neq 2 \text{ при} \dim V^\top \geq 1\,,$$

или

$$\tilde e_1 = -e_1, \ \tilde n_3 = -n_3, \ \tilde e_i = e_i, \ \tilde n_\alpha = n_\alpha, \ i \neq 1, \ \alpha \neq 3 \text{ при} \dim V^N \geq 1\,.$$

Из (12) получаем, что $\bar g(\bar X^+) = \bar g(\bar X^-)$, следовательно, метрика $\bar g$ в (10) на $G_2^+(V)$ пропорциональна канонической и

$$g(\eta_{11}, \eta_{22}) = \bar g(n_1 \wedge e_2, e_1 \wedge n_2) = 0,$$
$$g(\eta_{11}, \eta_{11}) = \bar g(e_1 \wedge n_2, e_1 \wedge n_2) = \bar g(n_1 \wedge e_2, n_1 \wedge e_2) = g(\eta_{22}, \eta_{22})\,.$$

Такие же соотношения, разумеется, справедливы и для любой другой пары $\eta_{i\alpha}$, $\eta_{j\beta}$ при $(i,\alpha) \neq (j,\beta)$, что и завершает доказательство теоремы. ■

Список литературы

[1] *E. Cartan*, Oeuvres completes. — Partie I, Vols. 1, 2. Gauthier-Villars, Paris (1952).

[2] *K. Leichtweiss* Zur Riemannschen Geometrie in Grassmannschen Mannigfaltigkeiten. — Math. Z. (1961), Bd. 76, No. 4, S. 334–366.

[3] *Г. Федерер.* Геометрическая теория меры. Наука, Москва (1987).

[4] *С. Е. Козлов*, Ортогонально совместимые бивекторы. — Укр. геом. сб. (1984), вып. 27, с. 68–75.

Orthogonal invariant Riemannian metrics on the real Grassmann manifolds

S.E. Kozlov

A full description of the 2-parameter family of all possible $SO(4)$-invariant Riemannian metrics on the real Grassmann manifolds $G_{2,4}$ and $G^+_{2,4}$ is given and an extremal property characterizing the canonical metric on $G^+_{2,4}$ is described. On the basis of these results, we give a new short geometrical proof of the uniqueness (up to the constant factor) of invariant metrics on $G_{p,n}$ and $G^+_{p,n}$ for $(p,n) \neq (2,4)$ and construct these metrics. We use the embeddings of the Grassmann manifolds in the polivector space $\Lambda_{p,n}$ (which can be identified as the Euclidean $\binom{n}{p}$-space), which allows us to solve the problems of intrinsic geometry of Grassmann manifolds by methods of exterior geometry.

Ортогонально інваріантні ріманові метрики на дійсних грассманових многовидах

С.О. Козлов

Дається повний опис у цілому двопараметричної сім'ї усіх можливих $SO(4)$-інваріантних ріманових метрик на дійсних грассманових многовидах $G_{2,4}$ та $G^+_{2,4}$. Формулюється певна екстремальна властивість, яка вилучає канонічну метрику з-поміж усіх метрик такої сім'ї у випадку многовиду $G^+_{2,4}$. На основі здобутого подано нове стисле доведення єдиності (з точністю до сталого множника) інваріантних метрик на многовидах $G_{p,n}$ та $G^+_{p,n}$ з $(p,n) \neq (2,4)$ і зазначена ця метрика. Використано вкладення грассманових многовидів у просторі полівекторів $\Lambda_{p,n}$, що розглядається як евклідів простір вимірності $\binom{n}{p}$. Внутрішні питання геометрії грассманових многовидів розв'язуються за допомогою засобів зовнішньої геометрії.