Математическая физика, анализ, геометрия
1997, т. 4, № 1/2, с. 145–188

Скрещенное произведение в кэлеровой геометрии

С.И. Окрут

Харьковский государственный университет,
Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 5 января 1995 года

Для кэлеровых многообразий предлагается конструкция, аналогичная скрещенному произведению римановых многообразий. Кэлеров аналог имеет свойства, подобные скрещенному произведению: комплексную обратную геодезичность, параметризуемость функцией одной переменной при фиксированных сомножителях. Кэлеров аналог расслаивается на пару трансверсальных слоений, конформного вполне геодезического и слоения из родовых внешних квазисфер. Предлагаемая конструкция кэлерова f-продолжения является расширением класса комплексных пространственных форм.

Содержание

Введение

Значимость конструкции скрещенного произведения в римановой геометрии хорошо известна [1, гл.9; 2], так как она является естественным обобщением прямого произведения римановых метрик. Риманово многообразие $N = F \times M$, снабженное метрикой скрещенного произведения

$$ds^2 = dl^2 + h d\sigma^2 \tag{0.1}$$

римановых многообразиий (F, dl^2) на $(M, d\sigma^2)$, где h – положительная скрещивающая функция на F, является характерным примером полуприводимого риманова многообразия. Введенные Каганом субпроективные пространства и более общий класс римановых пространств, которые являются скрещенными произведениями произвольного риманова многообразия на вещественную пространственную форму, служит ближайшим обобщением класса вещественных пространственных форм в духе аксиомы p-плоскостей Картана [3].

Возникает естественный вопрос, что является аналогом скрещенного произведения в кэлеровой геометрии? Предложение 2.1 показывает, что скрещенное произведение кэлеровых метрик не приводит к кэлеровой метрике, за исключением тривиального случая прямого произведения. Цель этой работы – показать, что в кэлеровой геометрии все же есть операция, кэлерово f-продолжение из определения 2.4, во всех отношениях аналогичная скрещенному произведению в римановой геометрии. Идея поиска указанного аналога состояла в следующем. Прежде всего отметим, что скрещенные произведения характеризуются одним чисто синтетическим свойством (следствие 1.12), а именно, они допускают обратно геодезическую субмерсию на риманово многообразие, т.е. такую гладкую субмерсию, что прообраз всякого вполне геодезического подмногообразия является вполне геодезическим подмногообразием. Определим комплексный аналог этого свойства так. Будем говорить, что голоморфное отображение кэлеровых многообразий является комплексным обратно геодезическим, если прообраз всякого комплексного вполне геодезического подмногообразия является комплексным вполне геодезическим подмногообразием. Комплексный аналог скрещенного произведения естественно искать среди кэлеровых многообразий, допускающих комплексную обратно геодезическую субмерсию. Такой подход обеспечивает существование нетривиального комплексного аналога скрещенного произведения (теорема 2.20). Причем кэлеровы f-продолжения обладают аналогами всех свойств скрещенных произведений – это видно из теорем 2.21, 3.3 и описания структуры f-продолжений в терминах слоений из разд. 3. Теорема 4.17 показывает, что классом кэлеровых f-продолжений исчерпывается нетривиальный кэлеров аналог скрещенного произведения. Свойство обратной геодезичности и комплексной обратной геодезичности субмерсии удается с единых позиций охарактеризовать с помощью понятия конформной субмерсии из определения 1.1. Этому посвящены теоремы 1.11, 4.1 и 4.5.

С дифференциально-геометрической точки зрения конформные субмерсии рассматривались, по-видимому, впервые А. Грэем в [4], где для них были получены уравнения Гаусса–Кодацци–Риччи (теорема 3.3). Используемые в статье понятия и основные обозначения соответствуют принятым в [1, 5]. На протяжении всей статьи действуют следующие соглашения. Субмерсию из риманова многообразия с римановой метрикой g на многообразие M обозначим через π. В имеющемся прямом ортогональном разложении касательного пространства

$$T_xN = V_x + H_x \tag{0.2}$$

на вертикальное и горизонтальное подпространства соответствующие им символы V и H будут одновременно служить для обозначения операторов ортогонального проектирования на одноименно обозначенные распределения. Операторы V и H стандартным образом продолжаются на всю алгебру тензоров в каждой точке многообразия N [6, гл. 1, предложение 2.12]. И тензор K, в том числе вектор или форма, будет называться вертикальным (горизонтальным), если горизонтальная (вертикальная) компонента равна нулю, $HK = 0$ ($VK = 0$, соответственно). Все рассматриваемые отображения, тензорные поля и многообразия предполагаются гладкими, класса C^∞. Вертикальные поля обозначаются всюду через U, V, W, а базисные, т.е. проектируемые и горизонтальные, – через X, Y, Z. Последние также часто называются в литературе горизонтальными лифтами и, когда нужно подчеркнуть то обстоятельство, что базисное поле получено из векторного поля X заданного на базовом многообразии M, будем его обозначать через X^H. Проектируемость векторного поля P в случае связных слоев, что всегда предполагается выполненным, эквивалентна следующему свойству:

$$L_U P = [U, P] \in V\,. \tag{0.3}$$

Субмерсию принято называть плоской, если ее горизонтальное распределение является вполне интегрируемым.

1. Конформные субмерсии

Определение 1.1 Субмерсия π из риманова многообразия N на риманово многообразие M называется конформной, если ее дифференциал сохраняет угол между горизонтальными векторами X, Y и их образами $\pi_* X$, $\pi_* Y$.

Предложение 1.2 *Пусть g и g_M – римановы метрические тензоры в N и M, соответственно, а π – конформная субмерсия из N на M тогда и только тогда, когда существует функция f на N такая, что*

$$Hg = e^{2f} \pi^* g_M\,. \tag{1.1}$$

Доказательство. Обратное утверждение очевидно, а прямое явным образом сводится к стандартному упражнению из линейной алгебры, с помощью которого показывается, что линейный оператор, переводящий ортогональные векторы в ортогональные, является суперпозицией гомотетии с положительным коэффициентом e^{-f} и ортогонального оператора. Коэффициент e^f является в нашем случае функцией точки многообразия, а его гладкость следует из формулы $e^f = \|X\|/\|\pi_* X\|_M$, где X – базисное векторное поле. Тогда из определения горизонтальной компоненты тензора для риманова метрического тензора имеем

$$Hg(P, S) = g(HP, HS) = e^{2f} g_M(\pi_* P, \pi_* S), \tag{1.2}$$

что и доказывает предложение. ■

Предложение 1.3. *Пусть π субмерсия из риманова многообразия N на многообразие M. В M существует риманова метрика, относительно которой π является конформной субмерсией тогда и только тогда, когда на N существует функция f такая, что*

$$(L_U g)(X,Y) = 2df(U)g(X,Y), \tag{1.3}$$

где L_U – дифференцирование Ли.

Доказательство. Свойство (0.3) проектируемости базисных полей X и Y приводит к формуле

$$(L_U g)(X,Y) = Ug(X,Y), \tag{1.4}$$

а предложение 1.2 влечет

$$Ug(X,Y) = (Ue^{2f}) \cdot \pi^* g_M(X,Y) = 2(Uf) \cdot g(X,Y), \tag{1.5}$$

так как функция $r = (\pi^* g_M)(X,Y)$ для фиксированных базисных полей является базисной, т.е. $Ur = 0$. Необходимость доказана. Докажем достаточность. Из формул (1.3) и (1.4) следует, что $\ln g(X,Y) - 2f$ – базисная функция, т.е., положив $g_M(\pi_* X, \pi_* Y) := e^{-2f} g(X,Y)$, мы корректно определим риманову метрику на M, для которой π – конформная субмерсия. ■

Определение 1.4. *Пусть π конформная субмерсия, тогда функция f, фигурирующая в предложении 1.2, называется показателем конформности. Если эта функция базисная, $Uf = 0$ для любого U, то показатель будет называться горизонтальным, а если $Xf = 0$ для любого горизонтального вектора X, то – вертикальным.*

Очевидно, условие горизонтальности или вертикальности показателя конформности эквивалентно горизонтальности или вертикальности, соответственно, 1-формы, дифференциала показателя, df или его градиента $\mathrm{gr} f$.

Если показатель конформности – тождественный нуль, то субмерсия является римановой. Таким образом, конформная субмерсия есть обобщение римановой субмерсии. Случай горизонтальности показателя субмерсии f по сути тоже сводится к римановой субмерсии; достаточно выбрать на M конформно эквивалентную исходной риманову метрику $g_M := e^{2f} g_M$, и π из конформной субмерсии превращается в риманову. Случай вертикальности показателя конформности, хотя и включает в себя по-прежнему класс римановых субмерсий, однако уже не сводится к последним. Но все же, если многообразие N допускает конформную субмерсию, то на N существует риманова метрика, конформно эквивалентная исходной $g := e^{2f} g$, для которой

π становится римановой субмерсией. Все эти утверждения являются очевидными следствиями предложения 1.2, как и следующее утверждение.

Следствие 1.5. *Если база M субмерсии π, определенной на римановом многообразии N, оснащена двумя римановыми метриками g_1 и g_2, то π является конформной субмерсией относительно каждой из двух метрик базы тогда и только тогда, когда эти метрики конформно эквивалентные. При этом показатели конформности отличаются лишь на базисную функцию.*

Доказательство. Если g_1 и g_2 конформно эквивалентные, то из конформности субмерсии относительно одной из них и предложения 1.2 следует конформность субмерсии и относительно другой метрики базы. Обратное утверждение вытекает непосредственно из определения 1.1, так как условие конформности π в обеих метриках означает, что тождественное отображение на базе сохраняет углы между векторами относительно обеих метрик. ■

Пример 1.6. Скрещенное произведение (0.1) является примером метрики, допускающей плоскую конформную субмерсию со вполне геодезическими слоями и вертикальным показателем конформности. Роль этой субмерсии играет проекция на M.

Предложение 1.7 *Если субмерсия, определенная на римановом многообразии N, является плоской и конформной, со вполне геодезическими слоями и с вертикальным показателем конформности, то риманова метрика N локально является скрещенным произведением.*

Доказательство. Так как субмерсия – плоская, то локально N диффеоморфно $F \times B$, где B – это окрестность базы, а F – слой. Геодезичность вертикального слоения для плоской субмерсии по принципу двойственности влечет римановость горизонтального слоения, т.е. проекция на первый сомножитель служит римановой субмерсией. С учетом предложения 1.2 это и приводит к разложению вида (0.1) для метрики N. Из условия вертикальности показателя конформности следует, что функция h есть функция на F, точнее, полный прообраз функции на F. ■

Напомним, что для произвольной, необязательно римановой, субмерсии определены инварианты T и A O'Нейла, которые обладают свойствами, приведенными, например, в [4. разд. 2 и 3] или в [1, гл. 9]. В последующем будут использоваться такие свойства второго инварианта:

$$A_X U = H\nabla_X U, \quad A_X Y = V\nabla_X Y; \tag{1.6}$$

$$g(A_X Y, U) = -g(Y, A_X U). \tag{1.7}$$

Лемма 1.8. *Если π субмерсия, для инварианта A которой выполняется равенство*

$$A_X U = \omega(U) X, \tag{1.8}$$

где ω – вертикальная 1-форма, то π – плоская субмерсия такая, что

а) $(L_U g)(X,Y) = 2\omega(U) g(X,Y)$,

б) $d\omega(X,Y) = 0$.

Доказательство. а) Это точечное равенство с помощью первой формулы (1.6) легко проверяется для базисных полей X и Y, которые, как отмечалось, удовлетворяют свойству (0.3).

б) Пусть X и Y – горизонтальные взаимно ортогональные векторные поля. Применяя формулы (1.6), (1.7) и условие леммы, получим $g([X,Y],U) = 0$. А это уже влечет инволютивность горизонтального распределения, т.е. субмерсия – плоская. Отсюда и из вертикальности формы ω по формуле для внешнего дифференциала формы [6, гл. 1, предложение 3.11] следует равенство пункта б). ∎

Лемма 1.9. *Если π субмерсия со вполне геодезическими слоями, для которой*

$$1) \quad A_X U = \omega(U) X\,,$$

$$2) \quad (L_X \omega)(U) = 0\,,$$

где ω – вертикальная форма, тогда существует единственная, с точностью до гомотетии, риманова метрика базы, относительно которой π является плоской локально конформной субмерсией с вертикальным показателем конформности.

Доказательство. Геодезичность слоев позволяет для базисного поля X применить формулу $\nabla_W X = A_X W$, которая, совместно с условием 1) леммы, позволяет вычислить

$$R(U,W)X = (U\omega(W) - W\omega(U) - \omega([U,W]))X\,. \tag{1.9}$$

Из свойства кривизны $g(R(U,W)X,X) = 0$ теперь следует справедливость равенства (1.10). Из леммы 1.8 вытекает, что субмерсия π плоская. Поэтому любой вертикальный вектор U можно продолжить, до локально проектируемого векторного поля относительно той новой, локально определенной субмерсии, слоями которой служат интегральные многообразия горизонтального распределения. Для такого поля, учитывая (0.3), имеем равенство (1.11). Итак,

$$d\omega(U,W) = 0, \tag{1.10}$$

$$[U,X] = 0\,. \tag{1.11}$$

Совместно с условием 2) леммы это приводит к $d\omega(X,U)=0$, равенству, верному уже для векторов. Сравнивая (1.11) с (1.10) и заключением б) леммы 1.8, видим, что форма ω является замкнутой, а следовательно, по лемме Пуанкаре в окрестности каждой точки N найдется функция f, для которой $\omega = df$, и, очевидно, f – вертикальная. Теперь из леммы 1.8 а), предложения 1.3 и следствия 1.5 следует заключение леммы, так как вертикальные функции, если и разнятся на базисную функцию, то эта последняя может быть лишь константой. ■

Встречающееся в литературе понятие конформного слоения как слоения, вторая основная форма горизонтального распределения которого "омбилична", в свете формул (1.6) и леммы 1.9 эквивалентно тому, что проекция на локальный фактор является конформной субмерсией соответственно определению 1.1.

Лемма 1.10. *Пусть π конформная субмерсия с вертикальным показателем конформности из N на M. Если подмногообразие F в N является вполне геодезическим и одновременно полным прообразом некоторого подмногообразия W базы, тогда W также вполне геодезическое.*

Доказательство. Для произвольных векторных полей базы X, Y, Z на основании предложения 1.2 выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{X^H}Y^H, Z^H) &= X^H g(Y^H, Z^H) + Y^H g(X^H, Z^H) - Z^H g(X^H, Y^H) \\ &- g(X^H, [Y^H, Z^H]) - g(Y^H, [X^H, Z^H]) + g(Z^H, [X^H, Y^H]) \\ &= e^{2f} 2(\pi * g_M)((\nabla^M_X Y)^H, Z^H) = 2e^{2f} g_M(\nabla_X Y, Z)\,. \end{aligned}$$

Пусть X, Y векторные поля, касательные к W, а Z – нормальное. Так как подмногообразие F является полным прообразом подмногообразия W, то горизонтальные лифты полей X, Y являются касательными к F. Из условия конформности субмерсии Z^H является нормальным векторным полем к подмногообразию F в N. Следовательно, из вполне геодезичности F следует, что крайняя левая часть приведенной выше цепочки равенств нулевая. Тогда крайняя правая часть показывает, что вторая основная форма и для W тождественно нулевая. ■

Две аффинные связности на одном и том же многообразии называются проективно (или геодезически) эквивалентными, если их семейства геодезических совпадают. Для аффинных связностей с нулевым кручением хорошо известны (например [7, гл. 4, предложение 7.2]) различные критерии их проективной эквивалентности. Римановы метрики называются проективно эквивалентными, если проективно эквивалентны их римановы связности.

Теорема 1.11 *Субмерсия π на риманово многообразие $M(\dim M > 1)$ является обратно геодезической лишь тогда, когда она плоская локально кон-*

формная субмерсия со вполне геодезическими слоями и вертикальным показателем конформности, относительно некоторой римановой метрики базы M, проективно эквивалентной исходной.

Доказательство. Пусть субмерсия является обратно геодезической. Выпустим из произвольной точки базы M m штук ($m = \dim M$) геодезических в направлениях линейно независимых в совокупности. Из свойства обратной геодезичности прообраз каждой геодезической оказывается вполне геодезическим подмногообразием. Пересечение построенных подмногообразий совпадет с вертикальным слоем, и, таким образом, слои субмерсии являются вполне геодезическими. Так как для любого горизонтального вектора X прообраз геодезической, выпущенной в направлении $\pi_* X$, является вполне геодезическим подмногообразием и слои субмерсии также вполне геодезические, то из уравнений Гаусса–Вейнгартена следует, что векторы $\nabla_U X$ и X коллинеарные. (Напомним, что в принятых нами обозначениях X – базисное поле.) Тогда

$$\nabla_U X = \lambda(U, X)X, \quad \lambda(U, X) = -\frac{g(A_X U, X)}{g(X, X)}. \tag{1.12}$$

Так как инвариант A является тензором, то λ в (1.12) на самом деле не зависит от величины вектора X, а зависит лишь от его направления. Применяя формулу (1.12) к паре неколлинеарных векторов X и Y в одной точке, получим

$$\nabla_U (X + Y) = \lambda(U, X + Y)(X + Y). \tag{1.13}$$

С другой стороны, из свойств ковариантной производной

$$\nabla_U (X + Y) = \lambda(U, X)X + \lambda(U, Y)Y, \tag{1.14}$$

и оказывается, что λ не зависит также от направления вектора X. Инвариант A является тензором, поэтому, положив вертикальную форму равной $\omega(U) = \lambda(U, X)$, приходим на основании первой формулы (1.12) к выполнению условия леммы 1.8 (поскольку для базисного поля $H\nabla_X U = H\nabla_U X$), из которого следует, в частности, что субмерсия плоская. Пусть U вертикальное векторное поле относительно π и одновременно локально проектируемое относительно новой локально определенной субмерсии на локальный фактор по слоям построенного горизонтального слоения для субмерсии π. Из равенства (1.11) следует, что для него выполняются следующие равенства: $\nabla_X U = \nabla_U X = H\nabla_U X$. Последнее из них обеспечивается геодезичностью вертикального слоения субмерсии π. Равенство крайних частей между собой и первая из формул (1.6) обеспечивают справедливость равенства (1.15).

Пусть теперь X и Y пара горизонтальных ортогональных между собой векторов. Так как вектор $R(U,Y)Y$ должен касаться подмногообразия, служащего прообразом геодезической выпущенной на базе в направлении $\pi_* Y$, то выполнено равенство

$$\nabla_X U = A_X U\,, \tag{1.15}$$

$$g(R(U,Y)Y,X) = 0\,. \tag{1.16}$$

Из свойств тензора кривизны равенство (1.16) эквивалентно следующему равенству: $g(R(Y,X)U,Y) = 0$. Формулы же (1.15), (1.8) и отсутствие кручения у римановой связности позволяют вычислить непосредственно $R(X,Y)U = X\omega(U)\cdot Y - Y\omega(U)\cdot X$. Сравнивая последние два равенства, получаем $X\omega(U) = 0$, а из-за того, что субмерсия плоская, то, с учетом равенства (1.11), это эквивалентно выполнению условия 2) леммы 1.9. Таким образом, все условия леммы 1.9 выполнены, и на M существует локально определенная по формуле из предложения 1.3 риманова метрика g_2, относительно которой π является конформной субмерсией с вертикальным показателем конформности. Выясним теперь, как эта метрика связана с исходной римановой метрикой g_1, относительно которой субмерсия обладала свойством обратной геодезичности.

Пусть γ – геодезическая в метрике g_1, тогда $\pi^{-1}\gamma$ – вполне геодезическое подмногообразие в N. Так как π конформная субмерсия с вертикальным показателем конформности относительно метрики g_2, то из леммы 1.10 заключаем, что γ геодезическая и в метрике g_2. Покажем теперь, что каждая геодезическая ν метрики g_2 является геодезической в метрике g_1. На основании предложения 1.7 и примера 1.6 можно сделать вывод о вполне геодезичности $\pi^{-1}\nu$ в N. Предположим теперь, что ν не является геодезической в g_1. Однако, конечно, существует геодезическая γ в метрике g_1, имеющая с ν общее касательное пространство в некоторой произвольной точке p кривой ν. Прообраз $\pi^{-1}\gamma$ – вполне геодезическое подмногообразие в N, касательное пространство к которому в точке q слоя $\pi^{-1}(p)$ совпадает с касательным пространством подмногообразия $\pi^{-1}\nu$. Из теоремы о локальной единственности вполне геодезического подмногообразия, касающегося заданного подпространства [8], для риманового многообразия заключаем, что построенные два подмногообразия π^{-1} и $\pi^{-1}\gamma$ совпадают в окрестности q, а следовательно, совпадают и их проекции ν и γ в некоторой окрестности точки p. Произвол в выборе точки p позволяет заключить, что ν является геодезической в метрике g_1. Таким образом, доказана проективная эквивалентность метрик g_1 и g_2.

Докажем обратное утверждение. Из предложения 1.7 следует, что тотальное пространство субмерсии N является локально оснащенным римановой метрикой скрещенного произведения. В скрещенном произведении проекция на второй сомножитель обладает свойством обратной геодезичности [3, формулы (1)–(3)], это нетрудно извлечь также из [1, предложение 9.104]. ∎

Комбинацией предложения 1.7 и теоремы 1.11 получаем следующее.

Следствие 1.12. *Скрещенные произведения римановых многообразий – это в точности те римановые многообразия, которые допускают обратно геодезическую субмерсию.*

Следствие 1.13. *Если π обратно геодезическая субмерсия на вещественную пространственную форму, то метрика N локально есть скрещенное произведение некоторого риманова многообразия на вещественную пространственную форму.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Хорошо известно [9], что проективно эквивалентной вещественной пространственной форме может служить лишь метрика вещественной пространственной формы. Остается применить теорему 1.11. ∎

2. Комплексные обратно геодезические субмерсии

Пусть далее N и M кэлеровы многообразия. Голоморфные субмерсии – это субмерсии, допускающие координатное представление голоморфными функциями нескольких переменных, что в случае комплексных многообразий эквивалентно равенству (2.1). В дальнейшем комплексная структура J (чтобы отметить интегрируемость почти комплексной структуры, назовем ее, как это иногда принято, комплексной структурой) на базе и на тотальном пространстве будет обозначаться одним символом. Голоморфность субмерсии немедленно влечет инвариантность относительно комплексной структуры вертикального распределения, а эрмитовость метрики g на N (т.е. $g(JP,Q) = -g(P,JQ)$) – инвариантность горизонтального распределения. Тогда

$$\pi_* J = J\pi_* \,, \tag{2.1}$$

$$JV = V, \quad JH = H. \tag{2.2}$$

Инвариантность горизонтального распределения и равенство (2.1) приводят к тому, что операторы горизонтального лифта и действия комплексной структуры перестановочны между собой, (2.3), поэтому в таких случаях скобки будут опускаться:

$$J(X^H) = (JX)^H \,. \tag{2.3}$$

Предложение 2.1. *Если π голоморфная плоская субмерсия, определенная на кэлеровом многообразии N со вполне геодезическими слоями, то кэлерово многообразие N – локально приводимое.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенства (2.3) и условия плоскости субмерсии выражение для дифференциала кэлеровой формы Φ, вычисленного из [6, гл. 1, предложение 3.11],

$$\begin{aligned} 3d\Phi(U,X,JY) &= U\Phi(X,JY) + X\Phi(JY,U) + JY\Phi(U,X) \\ &+\Phi(U,[X,JY]) + \Phi(X,[JY,U]) + \Phi(JY,[U,X]) \end{aligned} \tag{2.4}$$

после отбрасывания нулевых членов сводится к равенству $U\Phi(X,JY) = 0$, потому что кэлерова форма является замкнутой. (Напомним, что по-прежнему действует соглашение о базисности полей, обозначаемых X и Y.) Еще раз воспользовавшись проектируемостью этих полей, получим $(L_U g)(X,Y) = 0$. Это означает, что субмерсия является (локально) римановой. Совместно с геодезичностью слоев для плоской субмерсии это эквивалентно, по [1 с.332], приводимости N. ■

П р и м е р 2.2. Прямое произведение кэлеровых метрик допускает комплексную обратно геодезическую голоморфную субмерсию. Таковой, очевидно, служит проекция на любой из сомножителей.

П р и м е р 2.3. Комплексное проективное пространство $\mathbf{C}P^n$ с выколотой точкой допускает комплексную обратно геодезическую субмерсию. В качестве таковой можно выбрать субмерсию, ставящую в соответствие комплексной прямой в $\mathbf{C}^{n+1}$ ее эрмитово ортогональную, относительно фиксированной прямой (выколотой точки $\mathbf{C}P^n$), проекцию на $\mathbf{C}^n$.

Целью дальнейшего изложения является, прежде всего, построение целого семейства кэлеровых метрик, допускающих комплексную обратно геодезическую голоморфную субмерсию.

Определение 2.4. *Пусть кэлерова 2-форма Φ_M, определенная на M (локально), обладает кэлеровым потенциалом F_M, определенным в области $D \subset M$. И пусть $f(t)$ вещественная функция, определенная на некотором вещественном интервале с положительной производной $\dot{f}(t) = \frac{df}{dt}$. Определенную на открытом подмногообразии N из $\mathbf{C} \times D$ 2-форму*

$$\Phi = e^{2f}(-4i\dot{f}^{-1}\partial f \wedge \bar{\partial} f + \Phi M)\,, \tag{2.5}$$

$$t = \frac{1}{2}(w + \bar{w}) + F_M\,, \tag{2.6}$$

будем называть (локальным) кэлеровым f-продолжением формы Φ_M вдоль комплексной кривой. Здесь w – комплексная координата на кривой.

Если M кэлерово многообразие и Φ_M кэлерова форма, то всегда локально определен кэлеров потенциал F на M [5, с.117]. Определим взаимно сопряженные 1-формы типа (1,0) и (0,1):

$$\psi = -2i\partial F, \quad \bar{\psi} = 2i\bar{\partial} F, \tag{2.7}$$

которые, ввиду равенств

$$\bar{\partial}\psi = -\Phi_M, \quad \partial\psi = 0\,; \tag{2.8}$$

$$\partial\bar{\psi} = -\Phi_M, \quad \bar{\partial}\bar{\psi} = 0\,, \tag{2.9}$$

будем называть $\bar{\partial}$-потенциалом и ∂-потенциалом для M, соответственно. Связь дифференциалов разных типов приводится в [5, с. 97]:

$$\partial = \frac{1}{2}(d + id^c), \quad \bar{\partial} = \frac{1}{2}(d - id^c)\,, \tag{2.10}$$

где d^c – вещественный оператор, действующий на r-форму по формуле $d^c\varphi = (-1)^r JdJ\varphi$. Определим также 1-формы φ и φ^c, которые удовлетворяют равенствам, приведенным ниже:

$$\varphi = -dF, \quad \varphi^c = -d^cF = -JdF\,, \tag{2.11}$$

$$d\varphi^c = \Phi_M, \quad d^c\varphi^c = 0\,, \tag{2.12}$$

$$d^c\varphi = -\Phi_M, \quad d\varphi = 0\,. \tag{2.13}$$

Эти формы будем называть d- и d^c-потенциалом для Φ_M, соответственно. Обозначения эти, если специально не оговорено противное, сохраняются на протяжении всего последующего изложения. Для определенных выше потенциальных 1-форм имеется связь

$$\psi = -\varphi^c + i\varphi, \quad \bar{\psi} = -\varphi^c - i\varphi\,. \tag{2.14}$$

Если $z^k = x^k + iy^k$ – комплексные координаты на M, то примем обозначения:

$$F_k = \frac{\partial F}{\partial z^k}, \;\; F_{\bar{j}} = \frac{\partial F}{\partial \bar{z}^j}, \;\; F_{k,\bar{j}} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^k \partial \bar{z}^j}\,.$$

В случае f-продолжения формы φ, φ^c, ψ, $\bar{\psi}$ и Φ_M, определенные на D, поднимаются с помощью проекции в $\mathbf{C} \times D$.

Лемма 2.5. *Кэлерово f-продолжение Φ кэлеровой формы Φ_M является кэлеровой формой, и метрические коэффициенты ассоциированой с ней кэлеровой метрики g имеют в комплексных координатах следующее выражение*:

а) $g_{w\bar{w}} = \frac{1}{2}\dot{f}e^{2f}$, б) $g_{w\bar{\jmath}} = \dot{f}e^{2f}F_{\bar{\jmath}}$,

в) $g_{k\bar{\jmath}} = e^{2f}(F_{k,\bar{\jmath}} + \dot{f}F_kF_{\bar{\jmath}})$,

где $g_{w\bar{w}} = g(\frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial \bar{w}})$, $g_{w\bar{\jmath}} = g(\frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j})$, $g_{k\bar{\jmath}} = g(\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j})$, *а* z^k *– комплексные координаты на* M.

Доказательство. Прежде всего покажем, что сужение формы Φ из (2.5) в условиях леммы на касательное пространство дает вещественную форму. Из (2.10) появляется возможность переписать выражение для Φ в следующем виде:

$$\Phi = e^{2f}(-2\dot{f}^{-1}df \wedge d^cf + \Phi_M)\,. \tag{2.15}$$

Теперь вещественность Φ следует из вещественности f и Φ_M. Симметрическое дважды ковариантное тензорное поле g, ассоциированное с Φ, $g(P,Q) = \Phi(JP,Q)$, является римановой метрикой, так как из выражения (2.15) получаем

$$g(P,P) = e^{2f}(\dot{f}^{-1}((Pf)^2 + (JPf)^2) + \Phi_M(JP,P))\,.$$

В силу условия положительности производной $\dot{f}$ видим, что g – положительно определенное тензорное поле, т.е. g – риманов метрический тензор.

Эрмитовость g или, что эквивалентно, Φ, т.е. $\Phi(JP,JQ) = \Phi(P,Q)$, немедленно следует из эрмитовости Φ_M и эрмитовости внешнего произведения форм типа (1,0) и (0,1). Докажем замкнутость Φ. Для этого перепишем формулу (2.15) в виде

$$\Phi = e^{2f}(-2\dot{f}(t)dt \wedge (dv - \varphi^c) + \Phi_M)\,. \tag{2.16}$$

Здесь $dv = Jdu$, а $u = \frac{1}{2}(w+\bar{w})$. Поскольку $d\dot{f} = \ddot{f}dt$, то $d\Phi = 2e^{2f}\dot{f}dt \wedge (-2\dot{f}(t)dt \wedge (dv - \varphi^c) + \Phi_M) + e^{2f}(2\dot{f}dt \wedge (-d\varphi^c) + d\Phi_M) = 0$, так как φ^c – это, по (2.12), d-потенциал кэлеровой формы Φ_M. Используя выражения

$$\partial f = \frac{1}{2}\dot{f}(dw + i\psi), \quad \bar{\partial} f = \frac{1}{2}\dot{f}(d\bar{w} - i\bar{\psi}) \tag{2.17}$$

для Φ, можно дать и представление в комплексных координатах:

$$\Phi = e^{2f}(-\dot{f}(idw \wedge d\bar{w} + dw \wedge \bar{\psi} - \psi \wedge d\bar{w} + i\psi \wedge \bar{\psi}) + \Phi_M)\,. \tag{2.18}$$

Отсюда, используя связь метрических коэффициентов с компонентами формы Φ [10, с. 147] и формулы (2.7), получаем равенства а)–в).

Определение 2.6. *Многообразие N, (локально) оснащенное формой Φ кэлерова f-продолжения, будет называться в дальнейшем (локально) кэлеровым f-продолжением многообразия M вдоль комплексной кривой.*

Определение 2.7. *Субмерсией f-продолжения вдоль кривой будет называться отображение, задаваемое в комплексных координатах следующим* *образом:* $\pi(w,z) = (z)$, *здесь, как и в последующем,* $z = (\ldots, z^k, \ldots)$ *– мультикоордината на* M. *Функцию же* f *будем называть функцией продолжения.*

Очевидно, π на самом деле гладкая субмерсия и даже голоморфная. Введем следующие обозначения для 1-форм:

$$\omega = df = \dot f(du - \varphi), \quad \omega^c = J\omega = \dot f(dv - \varphi^c)\,. \tag{2.19}$$

Двойственные этим формам векторные поля $\mathrm{gr} f$ и $\mathrm{gr}^c f = J\mathrm{gr} f$, соответственно, выражаются через векторные поля типа (1,0) и (0,1) $\mathrm{gr}^{1,0} f$ и $\mathrm{gr}^{(0,1)} f$, которые назовем (1,0)-градиентом и (0,1)-градиентом, соответственно:

$$\mathrm{gr} f = \mathrm{gr}^{1,0} f + \mathrm{gr}^{(0,1)} f, \quad \mathrm{gr}^c f = i(\mathrm{gr}^{1,0} f - \mathrm{gr}^{(0,1)} f)\,. \tag{2.20}$$

Двойственные относительно эрмитовой метрики градиентам типа (1,0) и (0,1) формы суть ∂f и $\bar\partial f$.

Следствие 2.8. *Кэлерова метрика* g *кэлерова* f*-продолжения вдоль кривой имеет следующее выражение:* $g = e^{2f}(\dot f^{-1}(\omega^2 + (\omega^c)^2) + g_M)$, *где* g_M *– кэлерова метрика на* M.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся связью между кэлеровой метрикой и ассоциированной с ней кэлеровой формой. Применим представление Φ из (2.15) и воспользуемся обозначениями (2.19). ■

Следствие 2.9. *Метрические коэффициенты кэлерова продолжения в координатах* $u, v; \ldots x^k, y^k \ldots$ *имеют следующие выражения*:

а) $g_{uu} = g_{vv} = e^{2f}\dot f$;

б) $g_{uv} = 0$.

До конца следующего параграфа через N будем обозначать кэлерово f-продолжение кэлерова многообразия M. Примем соглашение, что индексы a, b, c меняются от 1 до $2m$, а индексы i, j, k – от 1 до m, $\dim_c M = m$. В последующем, в теореме 2.20, будет показано, что субмерсия f-продолжения является комплексной обратно геодезической. Для того, чтобы установить этот факт, приведем ряд лемм вычислительного характера. Пусть H, V операторы горизонтального и вертикального проектирования относительно субмерсии π. По линейности они продолжаются на комплексифицированную тензорную алгебру $\mathbf{T}_C(M)$. До конца раздела через X, Y будем обозначать векторные поля вида (2.21), где компоненты X^a зависят лишь от координат на M. Через Z и $\bar Z$ обозначим проектируемые векторные поля типа (1,0) и (0,1) (дифференциал субмерсии также допускает продолжение по линейности на комплексификацию касательного расслоения) вида (2.21), причем компоненты этих полей также зависят лишь от координат на M:

$$X = X^a \frac{\partial}{\partial x^a}\,, \quad Z = Z^k \frac{\partial}{\partial z^k}\,, \quad \bar Z = \bar Z^k \frac{\partial}{\partial \bar z^k}\,. \tag{2.21}$$

Лемма 2.10. *Базисные относительно π векторные поля на N представляются следующим образом*:

а) $X^H = X + \varphi(X)\frac{\partial}{\partial u} + \varphi^c(X)\frac{\partial}{\partial v}$,

б) $Z^H = Z - i\psi(Z)\frac{\partial}{\partial w}$, $\quad \bar{Z}^H = \bar{Z} + i\bar{\psi}(\bar{Z})\frac{\partial}{\partial \bar{w}}$.

Доказательство. Так как ψ и $\bar{\psi}$ горизонтальные на N (ввиду того, что все рассмотрения носят координатный характер, то всюду, где это не приводит к недоразумениям, будем одинаково обозначать как форму, так и ее кодифференциал относительно субмерсии), то из проектируемости базисного поля $\bar{Z}^H$ и определения Φ равенство $\Phi(\bar{Z}^H, \frac{\partial}{\partial \bar{w}}) = 0$ эквивалентно равенству $d\bar{w}(\bar{Z}^H) = i\bar{\psi}(\bar{Z})$. Аналогично получается равенство $dw(Z^H) = -i\psi(Z)$. Последние две формулы и означают справедливость пункта б). Выражение пункта а) следует из б), если положить $X = Z + \bar{Z}$, так как имеется связь (2.14). ■

Лемма 2.11. *Градиенты всех типов функции продолжения f являются вертикальными*:

а) $\mathrm{gr}^{1,0} f = e^{-2f}\frac{\partial}{\partial w}$,

б) $\mathrm{gr}^{0,1} f = e^{-2f}\frac{\partial}{\partial \bar{w}}$,

в) $\mathrm{gr} f = e^{-2f}\frac{\partial}{\partial u}$,

г) $\mathrm{gr}^c f = e^{-2f}\frac{\partial}{\partial v}$.

Доказательство. Из леммы 2.10 непосредственными вычислениями легко проверить, что $Z^H f = \bar{Z}^H f = 0$, т.е. f вертикальная относительно π функция, а следовательно, вертикальны и все типы градиентов. Применяя формулы (2.17) и (2.18) и определение градиента типа (1,0), получим

$$-\frac{i}{2}\dot{f} = -i\frac{\partial f}{\partial \bar{w}} = -ig(\mathrm{gr}^{1,0} f, \frac{\partial}{\partial \bar{w}}) = \Phi(\mathrm{gr}^{1,0}, \frac{\partial}{\partial \bar{w}}) = -\frac{i}{2}e^{2f} dw(\mathrm{gr}^{1,0} f),$$

откуда следует равенство а); равенство б) получается аналогично при двояком вычислении $\Phi(\frac{\partial}{\partial w}, \mathrm{gr}^{0,1} f)$. Равенства в) и г) вытекают из формул (2.20) и равенств а), б). ■

Следствие 2.12. а) *Формы ω и ω^c, определенные в (2.19), являются вертикальными относительно π.*

б) *Вертикален также квадрат нормы градиента $||\mathrm{gr} f||^2 = e^{-2f}\dot{f}$.*

Следствие 2.13. $[\mathrm{gr} f, \mathrm{gr}^c f] =$
$-2i[\mathrm{gr}^{1,0} f, \mathrm{gr}^{0,1} f] = -2i\dot{f}e^{-2f}\mathrm{gr}^c f = -2||\mathrm{gr} f||^2 \mathrm{gr}^c f$.

Следствие 2.14. $H\Phi = e^{2f}\Phi_M$.

Лемма 2.15. *Пусть W произвольное вертикальное векторное поле вида $W = A\frac{\partial}{\partial u} + B\frac{\partial}{\partial v}$, где A, B зависят лишь от координат u, v, тогда*:

а) $[W, X^H] = 0$,

б) $[X^H, Y^H] = [X, Y]^H + 2\Phi(X^H, Y^H)\mathrm{gr}^c f$,

в) $[Z_1^H, Z_2^H] = [Z_1, Z_2]^H$,

г) $[\bar{Z}_1^H, \bar{Z}_2^H] = [\bar{Z}_1, \bar{Z}_2]^H$,

д) $[Z_1^H, \bar{Z}_2^H] = [Z_1, \bar{Z}_2]^H + 2\Phi(Z_1^H, \bar{Z}_2^H)\mathrm{gr}^c f$.

Доказательство. Формула а) очевидна, так как в формуле а) леммы 2.10 видно, что компоненты при вертикальных векторных полях зависят лишь от координат базы M, ну и, конечно же, $[X, W] = 0$ по построению X и W. Непосредственное вычисление по формулам леммы 2.10, б) приводит к выражению

$$[Z_1^H, Z_2^H] = [Z_1, Z_2]^H - 2i\partial\psi(Z_1, Z_2)\frac{\partial}{\partial w},$$

применение равенств (2.8) дает формулу в), а г) получается аналогично. Из определения ∂- и $\bar{\partial}$-дифференциалов [10, с. 121] нетрудно получить следующие выражения

$$2\bar{\partial}\psi(\bar{Z}_2, Z_1) = \bar{Z}_2\psi(Z_1) - \psi([\bar{Z}_2, Z_1]), \quad 2\partial\bar{\psi}(Z_1, \bar{Z}_2) = Z_1\bar{\psi}(\bar{Z}_2) - \bar{\psi}([Z_1, \bar{Z}_2]).$$

Используя эти выражения и равенства (2.8) и (2.9), после непосредственных вычислений получаем равенство

$$\begin{aligned}[Z_1^H, \bar{Z}_2^H] &= [Z_1, \bar{Z}_2]^{1,0} - i\psi([Z_1, \bar{Z}_2])\frac{\partial}{\partial w} + 2i\Phi_M(Z_1, \bar{Z}_2)\frac{\partial}{\partial w} \\ &+ [Z_1, \bar{Z}_2]^{0,1} + i\bar{\psi}([Z_1, \bar{Z}_2])\frac{\partial}{\partial \bar{w}} - 2i\Phi_M(Z_1, \bar{Z}_2)\frac{\partial}{\partial \bar{w}}.\end{aligned}$$

Теперь, применяя равенства б) леммы 2.10, выражения (2.20) и равенства в), г) леммы 2.11, приходим к равенству д). Равенство же б) следует из уже доказанных пунктов в)–д), если положить $X = Z_1 + \bar{Z}_1$, а $Y = Z_2 + \bar{Z}_2$. ■

Определение 2.16. *Вертикальное слоение относительно субмерсии π кэлерова f-продолжения обозначим через $\mathcal{V}$. Отображение $f : N \to \mathbf{R}$ является субмерсией и определяет вертикальное слоение $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}\}$ (гиперслоение). Пересечение слоев $\mathcal{L}, \mathcal{V}$ определяет одномерное слоение (поток) $\mathcal{P}$; ортогональный к гиперслоению $\mathcal{L}$ поток обозначим через $\mathcal{F}$.*

Лемма 2.17. *Пусть здесь $U = \frac{\partial}{\partial u}$, $V = \frac{\partial}{\partial v}$, а W произвольный вертикальный вектор. Тогда*:

а) $\nabla_U U = qU$,

б) $\nabla_V V = -qU$,

в) $\nabla_U V = \nabla_V U = qV$,

г) $\nabla_W X^H = \omega(W)X^H + \omega^c(W)JX^H$,

д) $\nabla_{X^H} Y^H = (\nabla^M_X Y)^H - g(X^H, Y^H)\mathrm{gr} f + g(X^H, JY^H)\mathrm{gr}^c f$,
где $q = \dot f + \frac{1}{2}\ddot f \dot f^{-1}$.

Доказательство. Связность Леви–Чевита на кэлеровом мнгообразии полностью определяется кэлеровой формой

$$\begin{aligned} 2\Phi(\nabla_P Q, S) &= P\Phi(Q,S) + Q\Phi(P,S) + JS\Phi(P,JQ) \\ &\quad -\Phi(JP,[Q,JS]) - \Phi(JQ,[P,JS]) - \Phi(S,[P,Q])\,. \end{aligned}$$

Применительно к выбору векторов U и V в нашем случае, оператор комплексной структуры действует так: $JU = V, JV = -U$. По лемме 2.15, а), после применения формулы (2.22), получим

$$2\Phi(\nabla_U U, X^H) = JX^H\Phi(U,V) = -JX^H(e^{2f}\dot f) = 0\,;$$

здесь использовались следствия 2.12, б) и выражение $\Phi(U,V) = -e^{2f}\dot f$, вытекающие из определения Φ в формуле (2.15). Аналогично можно показать, что вертикальны и производные $\nabla_U V$ и $\nabla_V V$. Вычисляя по формуле (2.22) с учетом последнего выражения, получим следующее: $2\Phi(\nabla_U U, U) = V\Phi(U,V) = 0$, кроме того, $2\Phi(\nabla_U U, V) = U\Phi(U,V) = -2e^{2f}\dot f\omega(U) - e^{2f}\ddot f(du - \varphi)(U) = -2e^{2f}(\dot f^2 + \frac{1}{2}\ddot f) = 2q\Phi(U,V)$. Из невырожденности кэлеровой формы следует теперь равенство а). Подобными вычислениями несложно установить и равенства б), в).

Из предыдущего ясно, что у ковариантной производной $\nabla_W X^H$ отсутствует вертикальная компонента. Вычислим ее горизонтальную компоненту по формуле (2.22) с применением следствия 2.13 и леммы 2.15:

$$\begin{aligned} 2\Phi(\nabla_W X^H, Y^H) &= 2\omega(W)\Phi(X^H,Y^H) - \Phi(JW, 2\Phi(X^H, JY^H)\mathrm{gr}^c f) \\ &= 2\omega(W)\Phi(X^H,Y^H) + 2g(W,\mathrm{gr}^c f)\Phi(JX^H, Y^H)\,. \end{aligned}$$

Равенство г) следует теперь из невырожденности кэлеровой формы, так как по определению ω^c – это форма, двойственная относительно g c-градиенту.

По следствию 2.14 и лемме 2.15, б) $2\Phi(\nabla_{X^H} Y^H, Z^H) = 2e^{2f}\Phi_M(\nabla^M_X Y, Z)$; здесь ∇^M – ковариантная производная связности Леви–Чевита кэлерова многообразия M. Применяя снова следствие 2.14, заключаем, что горизонтальной составляющей для $\nabla_{X^H} Y^H$ является $(\nabla^M_X Y)^H$. Для получения вертикальной составляющей в д) достаточно воспользоваться метричностью связности Леви–Чевита и применить формулу г). ■

Пусть ν и ξ единичные векторные поля вдоль потоков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{P}$, соответственно. Согласно следствию 2.8, их можно определить так:

$$\nu = e^{-f}\dot f^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial u}, \quad \xi = e^{-f}\dot f^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial v}\,. \tag{2.22}$$

Следствие 2.18. а) $\nabla_\nu \nu = 0$,

б) $\nabla_\xi \xi = k\nu$, *где* $k = -e^{-f}\dot f^{-\frac{1}{2}}(\dot f + \frac{1}{2}\ddot f \dot f^{-1})$.

Предложение 2.19. *Пусть* R *тензор кривизны для кэлерова* f*-продолжения* N *кэлерова многообразия* M *вдоль кривой, а* R^M *– тензор кривизны для* M. *Тогда*

а) $R(\nu,\xi)\xi = e^{-2f}(-\frac{1}{2}\dddot f \dot f^{-2} + \frac{1}{2}\ddot f^2 \dot f^{-3} - \ddot f \dot f^{-1})\nu$,

б) $R(\nu,\xi)X^H = 2d\omega^c(\nu,\xi)\cdot JX^H$,

в) $R(X^H,Y^H)Z^H = (R^M(X,Y)Z)^H - \|\mathrm{gr} f\|^2(g(Z^H,Y^H)X^H - g(Z^H,X^H)Y^H + g(Z^H,JY^H)JX^H - g(Z^H,JX^H)JY^H + 2g(X^H,JY^H)JZ^H)$,

г) $R(W,X^H)Y^H = \frac{1}{2}\ddot f \dot f^{-2}((\omega(W)g(X^H,JY^H) - \omega^c(W)g(X^H,Y^H))\mathrm{gr}^c f - (\omega(W)g(X^H,Y^H) + \omega^c(W)g(X^H,JY^H))\mathrm{gr} f)$.

Доказательство. а). Так как ν и ξ единичные взаимно ортогональные векторные поля, касающиеся двумерного вполне геодезического слоения, то из следствия 2.18, а) немедленно получаем, что $\nabla_\nu\xi = 0$, а из пункта б) того же следствия получаем $\nabla_\xi \nu = -k\xi$, при этом функция k определяется следствием 2.18. Наконец, из полученного следует, что $[\nu,\xi] = \xi$. После подстановки в формулу $R(\nu,\xi)\xi = (\nu k)\nu - k^2\nu$ формулы $\nu k = e^{-2f}(\dot f + \frac{3}{4}\ddot f^2 \dot f^{-3} - \frac{1}{2}\dddot f \dot f^{-2})$ получаем равенство а).

б). Этот пункт следует немедленно из пункта г) леммы 2.17.

в). Из лемм 2.17, г), д), 2.11, в), г) и 2.15, а) находим $\nabla_{X^H}\nabla_{Y^H}Z^H = (\nabla_X\nabla_Y Z)^H - X^H g(Y^H,Z^H)\mathrm{gr} f - g(Y^H,Z^H)\|\mathrm{gr} f\|^2 X^H + X^H g(Y^H,JZ^H)\mathrm{gr}^c f + g(Y^H,JZ^H)\|\mathrm{gr} f\|^2 JX^H - g(X^H,(\nabla_Y Z)^H)\mathrm{gr} f + g(X^H,J(\nabla_Y Z)^H)\mathrm{gr}^c f$. Из лемм 2.15, б) и 2.17, г), д) находим $\nabla_{[X^H,Y^H]}Z^H = (\nabla_{[X,Y]}Z)^H + 2\Phi(X^H,Y^H)\|\mathrm{gr} f\|^2 \cdot JZ^H - g([X,Y]^H,Z^H)\mathrm{gr} f + g([X,Y]^H,JZ^H)\mathrm{gr}^c f$. Используя метричность связности, после вычислений приходим к в).

г). Применяя лемму 2.17, г), д), получим $\nabla_{X^H}\nabla_W Y^H = X^H\omega(W)Y^H + \omega(W)((\nabla_X Y)^H - g(X^H,Y^H)\mathrm{gr} f + g(X^H,JY^H)\mathrm{gr}^c f) + X^H\omega^c(W)JY^H + \omega^c(W)\cdot(J(\nabla_X Y)^H - g(X^H,Y^H)\mathrm{gr}^c f - g(X^H,JY^H)\mathrm{gr} f)$. Из лемм 2.17, а), в), 2.11, в), г)

$$\nabla_W \mathrm{gr} f = \dot f^{-1}(\omega(W)(-\dot f + \frac{1}{2}\ddot f \dot f^{-1})\mathrm{gr} f + \omega c(W)(\dot f + \frac{1}{2}\ddot f \dot f^{-1})\mathrm{gr}^c f)\,.$$

Воспользуемся леммой 2.17, д), предыдущим равенством и параллельностью комплексной структуры: $\nabla_W\nabla_{X^H}Y^H = \omega(W)(\nabla_X Y)^H + \omega^c(W)J(\nabla_X Y)^H - (2\omega(W)g(X^H,Y^H) + g(X^H,Y^H)\omega(W)\dot f^{-1}(-\dot f + \frac{1}{2}\ddot f \dot f^{-1}) + g(X^H,JY^H)\omega^c(W)\dot f^{-1}(\dot f + \frac{1}{2}\ddot f \dot f^{-1}))\mathrm{gr} f + (2\omega^c(W)g(X^H,JY^H) + g(X^H,JY^H)\omega(W)\dot f^{-1}(-\dot f + \frac{1}{2}\ddot f \dot f^{-1}) -$

$g(X^H, Y^H)\omega^c(W)\dot{f}^{-1}(\dot{f} + \frac{1}{2}\ddot{f}\dot{f}^{-1}))\mathrm{gr}^c f$. Используя лемму 2.15, а) и полученные выражения, после вычислений тензора кривизны приходим к равенству пункта г). ∎

Теорема 2.20. *Голоморфная субмерсия π кэлерова f-продолжения является комплексной обратно геодезической субмерсией.*

Доказательство. Пусть E вполне геодезическое комплексное подмногообразие в M. Горизонтальные лифты касательных к E векторных полей совместно с вертикальными векторными полями составляют систему образующих касательных векторных полей к полному прообразу подмногообразия E. Тогда из леммы 2.17 следует, что $\pi^{-1}(E)$ вполне геодезическое подмногообразие в кэлеровом f-продолжении N. ∎

Различным функциям продолжения f могут отвечать локально изометричные кэлеровы f-продолжения. Следующая теорема показывает, что классы неизометричных продолжений параметризуются одной функцией вещественной переменной. Напомним, что вполне вещественная бисекционная кривизна $B(p)$ определяется так:

$$B(p) = g(R(Q, JQ)JS, S), \tag{2.23}$$

где p – вполне вещественная плоскость в касательном пространстве, натянутая на ортонормальные векторы Q и S, т.е. $g(Q, JS) = g(Q, S) = 0$, $\|Q\| = \|S\| = 1$. В случае, когда J-инвариантные плоскости e и q взаимно ортогональные, $e = Q \wedge JQ$, $q = S \wedge JS$, тогда $H(e, q) = B(p)$, где $H(e, q)$ – голоморфная бисекционная кривизна, введенная Гольдбергом и Кобаяси.

Теорема 2.21. *Пусть $\kappa(t)$ произвольная вещественно-вещественная функция, определенная в окрестности, например, нуля. Тогда для любой точки z_0 кэлерова многообразия M существует кэлерово локальное f-продолжение вдоль кривой такое, что вполне вещественная бисекционная кривизна вдоль кривой $\pi^{-1}(z_0)$ в смешанных секциях совпадет с этой наперед заданой функцией*, т.е. $B(W \wedge X) = \kappa(t)$.

Доказательство. Из предложения 2.19 нетрудно найти вполне вещественную бисекционную кривизну по формуле (2.24):

$$B(W \wedge X) = -\ddot{f}\dot{f}^{-1}e^{-2f}\,. \tag{2.24}$$

Для функции f имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\ddot{f} + \kappa(t)e^{2f}\dot{f} = 0\,; \tag{2.25}$$

его решение, отвечающее положительному значению производной в нуле $\dot{f} > 0$, приводит к функции f, для которой локальное f-продолжение вдоль кривой кэлеровой формы на M дает, согласно лемме 2.5, кэлерову форму на комплексном многообразии $K \times D$. Здесь K – некоторый круг в $\mathbf{C}$ с центром, лежащим на прямой $\mathrm{Re}w = -F_M(z_0)$, а D – окрестность в M. Для так полученного кэлерова f-продолжения вполне вещественная бисекционная кривизна смешанных площадок совпадает с κ. ■

Следствие 2.22. *Вполне вещественная бисекционная кривизна в смешанных секциях* $\kappa = B(W \wedge X) = -\ddot{f}\dot{f}^{-1}e^{-2f}$ *есть лишь функция точки, т.е. не зависит от выбора* W *и* X*; при этом эта функция – базисная.*

Сохраним обозначение κ до конца следующего раздела.

Следствие 2.23. *Существуют неплоские комплексные обратно геодезические субмерсии с произвольной кэлеровой базой и любой размерностью слоя.*

Доказательство. Так как суперпозиция двух субмерсий, обладающих свойством комплексной обратной геодезичности, также обладает этим свойством, то из теорем 2.19 и 2.20 вытекает утверждение следствия. ■

Хотя автору не представляется возможным дать столь же краткую формулу для кэлеровой метрики, полученной многократным продолжением вдоль комплексных кривых, однако эта итеративная процедура все же допускает представление полученной в итоге кэлеровой формы в конечном виде через кэлеров потенциал начальной метрики.

Предложение 2.24. *Пусть* F_M *кэлеров потенциал многообразия* M*. Тогда кэлеров потенциал многообразия* N*, являющийся кэлеровым* f*-продолжением* M*, представляется в следующем виде*:

$$F_N(t) = \int_0^t e^{2f(p)}\, dp, \tag{2.26}$$

где $t = u + F_M$ *– функция на* N *из определения* 2.4.

Доказательство. Найдем дифференциал функции F_N, определенной по формуле (2.27), $dF_N = e^{2f(t)}dt = e^{2f}(du - \varphi)$. Теперь можно вычислить следующее: $d^cF_N = JdF_N = e^{2f}(dv - \varphi^c)$. Здесь φ, φ^c – кэлеровы d, d^c-потенциалы для M. Далее, $dd^cF_N = 2e^{2f}\dot{f}(du - \varphi) \wedge (dv - \varphi^c) - e^{2f}\Phi_M$. Применяя формулу (2.16), видим, что $-dd^cF_N = \Phi$, т.е. F_N действительно кэлеров потенциал для N. ■

3. Геометрия кэлеровых продолжений вдоль кривой

Прежде всего покажем, что класс кэлеровых продолжений включает в себя метрики постоянной голоморфной кривизны.

Лемма 3.1. *Пусть* R *– тензор римановой кривизны произвольного кэлерова многообразия, касательное пространство которого разлагается в прямую* *ортогональную сумму подпространств V и H (вертикального и горизонтального), причем $R(X,Y,Z,U) = R(U,V,W,X) = 0$ для любых вертикальных U,V,W и горизонтальных X,Y,Z векторов. Тогда*

$$k(P\wedge JP) = k(X\wedge JX)\|X\|^4 + (2B(X\wedge U)$$

$$+4k(X\wedge JU))\|X\|^2\|U\|^2 + k(U\wedge JU)\|U\|^4 .$$

Здесь P – произвольный вектор, а U,X – его вертикальная и горизонтальная составляющие.

Доказательство. Вычисляя секционную кривизну площадки $P\wedge JP$, достаточно воспользоваться стандартными свойствами тензора римановой кривизны и его дополнительными свойствами, обусловленными кэлеровостью метрики $R(JA,JB) = R(A,B)$, $JR(A,B) = R(A,B)J$ ■

Из предложения 2.19 вытекают равенства следующей леммы.

Лемма 3.2. *Для кэлерова f-продолжения многообразия M вдоль кривой имеют место следующие выражения для секционной кривизны*:
а) $k(X\wedge JX) = e^{-2f}(k^M(X\wedge JX) - 4\dot f)$,
б) $k(U\wedge JU) = e^{-2f}(-\frac{1}{2}\dddot f\dot f^{-2} + \frac{1}{2}\ddot f^2\dot f^{-3} - \ddot f\dot f^{-1})$,
в) $k(X\wedge W) = \frac{\kappa}{2}$.

Теорема 3.3. *Всякая комплексная пространственная форма N может быть локально получена в результате кэлерова f-продолжения комплексной пространственной формы на единицу меньшей размерности, причем существует такая положительная константа A, что функция продолжения необходимо имеет следующий вид*:

$$f = \frac{1}{4}c_M t - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{c_M}(1 + Ac_N\exp\frac{c_M}{2}t) + \frac{1}{2}\ln A, \tag{3.1}$$

где c_N, c_M – постоянные голоморфных кривизн на N и M ($c_M\neq 0$).

Доказательство. Предположим, что существует f-продолжение комплексной формы M, дающее комплексную форму N. Тогда из леммы 3.2, а) следует, что функция продолжения должна удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\dot f = \frac{1}{4}(c_M - c_N e^{2f})\,. \tag{3.2}$$

Формула (3.1) дает общее решение этого уравнения. Дифференцируя последовательно (3.2), получим $\ddot f = -\frac{1}{2}c_N e^{2f}\dot f, \dddot f = -\frac{1}{2}c_N e^{2f}\dot f(2\dot f - \frac{1}{2}c_N e^{2f})$. Откуда, во-первых, по следствию 2.22 заключаем, что $c_N = 2\kappa$, а, во-вторых, по лемме 3.2, б) $k(\nu\wedge\xi) = c_N$. Из предложения 2.19 нетрудно видеть, что для тензора римановой кривизны кэлерова f-продолжения выполнено условие леммы 3.1. В свете предыдущего голоморфная секционая кривизна, вычисленная по лемме 3.1, $k(P \wedge JP) = c_N(\|X\|^2 + \|U\|^2)^2 = c_N$, т.е. она оказывается постоянной и равной c_N. ■

Следствие 3.4. *а) Метрика постоянной неотрицательной голоморфной кривизны может быть получена как f-продолжение комплексной пространственной формы лишь положительной голоморфной кривизны.*

б) Если $c_N < 0$, то c_M может быть любым, причем в случае $c_M = 0$ функция продолжения определяется формулой (3.3), где B – положительный параметр:

$$f = \frac{1}{2}\ln 2 - \ln(B + c_N t)\,. \tag{3.3}$$

Доказательство. а) Утверждение следует из формулы (3.2) и условия положительности производной функции продолжения из определения 2.4.

б) Для любого c_M, не равного нулю, можно выбрать положительный параметр A так, чтобы выражение под знаком логарифма в (3.1) было положительным в некоторой окрестности произвольного t_0. Если же $c_M = 0$, то уравнение (3.3) есть общее решение уравнения (3.2) на функцию продолжения. ■

Определение кэлерова f-продолжения носит аналитический характер и привязано к локальным координатам. В последующих утверждениях дается описание кэлерова продолжения в терминах геометрических свойств слоений $\mathcal{V}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{P}$ из определения 2.16.

Предложение 3.5. *Проекция π для кэлерова f-продолжения является голоморфной конформной субмерсией с вертикальным показателем конформности f и с вполне геодезическими слоями.*

Доказательство. Конформность π вытекает из следствия 2.14, причем функция продолжения является показателем конформности. Лемма 2.11 влечет также вертикальность показателя конформности f. Вполне геодезичность слоев следует из леммы 2.17, а), б).

Внешняя сфера – это вполне омбилическое подмногообразие с постоянной средней кривизной, т.е. с параллельным в нормальной связности вектором средней кривизны. Чен и Яно [8, 11, 12] назвали гиперповерхность в римановом пространстве квазиомбилической, если все главные кривизны $\mu, \lambda, \ldots, \lambda$ совпадают, за исключением может быть одной. В свете этих понятий естественно назвать гиперповерхность внешней квазисферой, если она квазиомбилическая и ее главные кривизны постоянные. Главную кривизну λ из наглядных соображений будем называть главной кривизной в направлении параллели, а главную кривизну μ – в направлении меридиана.

Родовым подмногообразием L кэлерова многообразия N называют [11, с. 66] CR-подмногообразие, содержащие инвариантное относительно почти комплексной структуры распределение D, коразмерность которого в L совпадает с коразмерностью L в N. Следуя [11], напомним понятие сасакиевой $(\varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ структуры на нечетномерном многообразии. Пусть φ – тензорное поле типа (1,1), ξ – векторное поле, η – 1-форма, а g – метрический тензор. Говорят, что $(\varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ – почти контактная структура, если для любого вектора Q

$$\varphi^2 Q = -Q + \eta(Q)\xi, \quad \varphi\xi = 0, \quad \eta(\varphi Q) = 0, \quad \eta(\xi) = 1. \tag{3.4}$$

Если на многообразии почти контактной структуры выполняются равенства

$$g(\varphi Q, \varphi S) = g(Q, S) - \eta(Q)\eta(S), \quad \eta(Q) = g(Q, \xi), \tag{3.5}$$

то почти контактная структура называется метрической.

Предложение 3.6. *Для кэлерова продолжения функция продолжения f служит римановой субмерсией, слои которой являются:*

а) внешними квазисферами с главными кривизнами $-\|\mathrm{gr} f\|$ и k (из следствия 2.18);

б) родовыми подмногообразиями, допускающими почти контактную метрическую структуру относительно индуцированной метрики.

Доказательство. Следствие 2.12, б) и определение 2.4 кэлерова продолжения показывают, что дифференциал функции продолжения всюду невырожденный, т.е. f является субмерсией на кривую. Из определения 2.16 и следствия 2.12, а) форма ω является горизонтальной относительно слоения $\mathcal{L}$. Если риманову метрику этой кривой задать в виде

$$dl^2 = \frac{dq}{d\theta}(\theta) e^{2\theta} d\theta^2 \tag{3.6}$$

(здесь θ – координата на кривой, а $t = q(\theta)$ – обратная к $\theta = f(t)$ функция, то, по следствию 2.8 и определению формы ω из (2.19), заключаем, что отображение $\theta = f((w + \bar{w})/2 + F_M)$ есть риманова субмерсия.

а) Из леммы 2.17, д) и следствия 2.18, б) видим, что у вертикальных слоев L имеется не более двух различных главных кривизн $\lambda = -\|\mathrm{gr} f\|$ и $\mu = k$. По лемме 2.11, функция t на кэлеровом продолжении из определения 2.4 – постоянная на каждом слое L. Поэтому из выражений для k и $\|\mathrm{gr} f\|$, приведенных в следствиях 2.18 и 2.12, соответственно, видим, что обе главные кривизны – постоянные вдоль слоев, что и означает параллельность вектора средней кривизны гиперповерхности L.

б) Из равенства (2.2) следует, что каждый слой L является родовым CR-подмногообразием, а в качестве инвариантного распределения D выступает горизонтальное распределение H субмерсии продолжения π. Из определения векторного поля ξ в (2.23) легко видеть, что, положив по определению

$$\varphi X := JX, \quad \varphi\xi := 0, \quad \eta := \frac{\omega^c}{\|\mathrm{gr} f\|} e^{f(t_0)} \dot{f}^{\frac{1}{2}}(t_0)(dv - \varphi^c), \tag{3.7}$$

мы удовлетворим все равенства из (3.4). Чтобы получить сужение кэлеровой метрики из N на некоторый слой L, воспользуемся следствием 2.8. Положив $f = c$, некоторой константе, получим

$$g_L = \eta^2 + e^{2f(t_0)} g_M \,. \tag{3.8}$$

Легко видеть, что для индуцированной римановой метрики выполняются равенства (3.5). Отметим, что производная и градиент функции f вычисляются в выражении (3.7) при $t = t_0$, соответствующем выбранному слою $f(t_0) = c$. ■

Следствие 3.7. *Среди слоев L нет ни одного вполне геодезического.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следствие 2.12, б) показывает, что главная кривизна $-\|\mathrm{gr} f\|$ обязательно не нуль. ■

Следствие 3.8. *Слои $\mathcal{L}$ минимальные подмногообразия, а f гармоническая функция на кэлеровом f-продолжении лишь тогда, когда $f(t) = -\frac{1}{2}\ln(C-2t) + B$, где C, B произвольные константы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения вектора средней кривизны гиперповерхности

$$H = \frac{\nu}{n}\mathrm{tr} A_\nu = \left((\frac{1}{n} - 1)\|\mathrm{gr} f\| + \frac{1}{n}k \right)\nu \,, \tag{3.9}$$

где A_ν – оператор Вейнгартена нормали ν, а n в этом выражении – размерность слоения. Формула для f доказываемого следствия есть общее решение для уравнения минимальности $H = 0$, сводящегося после подстановки выражений для главных кривизн к дифференциальному урвнению $\ddot{f} = 2\dot{f}^2$. Хорошо известно, например, из [13], что гармоничность для римановых субмерсий эквивалентна минимальности слоев этой субмерсии. ■

Следствие 3.9. *Слои $\mathcal{L}$ являются омбилическими лишь тогда, когда вполне вещественная бисекционная кривизна в смешанных секциях равна нулю, а это, в свою очередь, эквивалентно тому, что функция продолжения допускает представление $f = Ct + B$, где C, B – константы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приравнивая главные кривизны между собой, приходим к уравнению $\ddot{f}\dot{f}^{-1} = 0$. По следствию 2.22 это и означает, что $\kappa = 0$. ■

Следствие 3.10. *Слои слоения $\mathcal{L}$ являются почти контактными метрическими многообразиями постоянной φ-секционной кривизны лишь тогда, когда база M является комплексной пространственной формой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению φ-секционной кривизны [11, с. 17] и определению почти контактной метрической структуры слоя L из предложения 3.6 φ-секционная кривизна совпадет с секционной кривизной $k_L(X \wedge JX)$ в метрике слоя. Здесь X – вектор из горизонтального распределения H субмерсии π, а следовательно, касательный к L. Применим уравнение Гаусса к подмногообразию L. Из леммы 3.2, а) и предложения 3.6, а) получим

$$e^{-2f}(k_M(X \wedge JX) - 4\dot{f}) = k_L(X \wedge JX) - \|\mathrm{gr} f\|^2 .$$

Воспользуемся теперь выражением для градиента из леммы 2.11, б):

$$k_L(X \wedge JX) = e^{-2f} k_M(X \wedge JX) - 3\|\mathrm{gr} f\|^2 .$$

А так как функция продолжения и модуль ее градиента по построению слоения $\mathcal{L}$ – постоянные на каждом слое L, то доказываемое следствие становится очевидным. ■

Пусть на римановом многообразии M имеется разложение (3.10) касательного расслоения в прямую сумму взаимно ортогональных распределений. Пусть π субмерсия из риманова многообразия N на M и H – ее горизонтальное распределение. Определим в (3.11) подпространства H_k в TN как горизонтальные и однозначно проектируемые на подпространства Q_k, т.е.

$$TM = Q_1 \oplus \ldots \oplus Q_p \,, \tag{3.10}$$

$$H_k = \pi_*^{-1} Q_k \cap H \,. \tag{3.11}$$

Определение 3.11. *Субмерсия π называется конформной относительно разложения (3.10), если каковы бы ни были $X_k, Y_k \in H_k$, угол между X_k и Y_j равен углу между $\pi_* X_k$* и *$\pi_* Y_j$.*

Пусть P_k тензорное поле типа (1,1), определяемое в каждой точке как ортопроектор на подпространство Q_k. Продолжая его с касательного пространства на всю тензорную алгебру, определим $g_k := P_k g$. Следующий критерий доказывается аналогично предложению 1.2.

Предложение 3.12. *Пусть g и g_M римановы метрические тензоры в N и M, соответственно. Субмерсия π – конформна относительно разложения (3.10) лишь тогда, когда существуют функции $f_k (k = 1, \ldots, p)$ на N такие, что*

$$Hg = e^{2f_1} \pi^* g_1 + \cdots + e^{2f_p} \pi^* g_p \, .$$

Очевидно, если разложение (3.10) состоит из одного единственного подпространства, совпадающего со всем касательным пространством, то конформная относительно такого тривиального разложения субмерсия окажется конформной субмерсией в смысле определения 1.1.

Определение 3.13. *Функцию f_k из предложения 3.12 будем называть показателем конформности, отвечающим распределению Q_k.*

Из предложения 3.6 следует, что в каждом слое L имеется разложение в прямую ортогональную сумму $TL = D \oplus P$ распределений, где P – одномерное рапределение, ассоциированное со слоением $\mathcal{P}$ и суженное на слой L, что допустимо, согласно определению 2.16, а D – сужение горизонтального распределения H субмерсии π на L.

Предложение 3.14. *Любой слой L слоения $\mathcal{L}$ может служить базой субмерсии σ, определенной на кэлеровом f-продолжении N и обладающей следующими свойствами:*

а) σ – конформная относительно разложения $TL = D \oplus P$ субмерсия с вертикальными показателями конформности;

б) ее вертикальными слоями, являющимися геодезическими кривыми, служит слоение $\mathcal{F}$;

в) σ – почти контактная субмерсия, т.е. $\sigma_* J = \varphi \sigma_*, \omega^c / \|\mathrm{gr} f\| = e^h \sigma^* \eta$, где h – показатель конформности, отвечающий P.

Доказательство. Выбрав любой слой L, определим субмерсию σ так. Точке q из N с координатами $(u, v; \bar{z})$ поставим в соответствие точку пересечения $\sigma(q)$ кривой из потока $\mathcal{F}$, проходящей через q, со слоем L. Ее координаты $(t_0 - F_M(\bar{z}), v; \bar{z})$, где t_0 – константа, задающая слой L.

а) Из следствия 2.8, формулы (3.8) и предложения 3.12 немедленно следует, что σ – конформная относительно разложения $TL = D \oplus P$ субмерсия, причем с показателями конформности $f(t) - f(t_0)$ и $h = f(t) - f(t_0) + \frac{1}{2} \ln \dot{f}(t) - \frac{1}{2} \ln \dot{f}(t_0)$ для D и P, соответственно.

б) По построению субмерсии σ ее вертикальными слоями являются координатные линии по u, т.е. слои совпадают со слоями $\mathcal{F}$. Их геодезичность вытекает из следствия 2.18, а).

в) Первая формула следует из определения тензорного поля φ в (3.7), так как $J\xi = -\nu$ и по построению субмерсии $\sigma_* \xi = \xi | L$, $\sigma_* \nu = 0$. Вторая формула получается непосредственным вычислением полного прообраза формы η:

$$e^h\sigma^*\eta = e^{f(t)}\dot f^{\frac{1}{2}}(t)(dv-\varphi^c) = \omega^c/\|\mathrm{gr} f\|\,. \tag{3.12}$$

■

Следствие 3.15. *Слоения $\mathcal{L}$ и $\mathcal{F}$ кэлерова f-продолжения дополнительны, ортогональны, и каждый слой из $\mathcal{F}$ принадлежит некоторому слою из $\mathcal{V}$, т.е. $\pi|_L \circ \sigma = \pi$.*

Предложение 3.16. *Пусть N кэлерово f-продолжение. Тогда диагональное произведение $r = f\Delta\pi : N \to \mathbb{R}\times M$ обладает следующими свойствами:*

а) вертикальное слоение для субмерсии r совпадает с $\mathcal{P}$;

б) r есть риманова субмерсия, если $\mathbb{R}\times M$ наделено римановой метрикой скрещенного произведения $dl^2 \times_{e^{2\theta}} g_M$, где dl^2 определяется по формуле (3.6)*;*

в) слои субмерсии r (кривые) имеют постоянную кривизну k (выражение для k приведено в следствии 2.18) и нулевые кручения и высшие кривизны.

Доказательство. а) Прообраз точки относительно r – пересечение $f^{-1}(*)\cap\pi^{-1}(*)$, что по определению 2.16 и есть слой из $\mathcal{P}$.

б) Так как слои $\mathcal{P}$ – это координтные кривые вдоль v, то горизонтальная проекция относительно субмерсии r метрического тензора легко находится из следствия 2.8:

$$Hg = e^{2f}\dot f(du-\varphi)^2 + e^{2f(t)}g_M = r^*(e^{2f(\theta)}\frac{dq}{d\theta}(\theta)d\theta^2 + e^{2\theta}g_M) = r^*(dl^2\times_{e^{2\theta}} g_M),$$

при этом $t = q(\theta)$, как и прежде, обратная к $\theta = f(t)$ функция.

в) Кручение и высшие кривизны для слоев $\mathcal{P}$ равны нулю, так как слои $\mathcal{P}$ лежат в слоях $\mathcal{V}$, вполне геодезических двумерных подмногообразиях (предложение 3.5). Из выражения для кривизны слоев $\mathcal{P}$, приведенного в следствии 2.1,8 следует, что $\xi k = 0$. ■

Следствие 3.17. *Сужение $\pi|L$ на каждый слой L есть риманова субмерсия на M, если риманову метрику на M положить равной $e^{2f(t_0)}g_M$, где t_0 – значение функции t на выбранном слое L.*

Доказательство. Сужение римановой субмерсии r на слой $r^{-1}(\{*\}\times M) = L$ является римановой субмерсией. Так как суперпозиция римановых субмерсий есть риманова субмерсия, то достаточно воспользоваться тем обстоятельством, что проекция в прямом произведении римановых многообразий на любой из сомножителей – риманова субмерсия. ■

Теорема 3.18. *Пусть π голоморфная конформная субмерсия кэлеровых многообразий N на M, $\dim_c N = \dim_c M + 1$, с вертикальным показателем* *конформности f, который служит римановой субмерсией на кривую. При этом*

$$\pi^*\varphi = du - e^{-2f}\|\mathrm{gr} f\|^{-2} df\,, \tag{3.13}$$

где φ кэлеров d^c-потенциал M, а u – плюригармоническая функция. Тогда N локально является кэлеровым f-продолжением M вдоль кривой.

Доказательство. Обозначим $\omega = df$, $\omega^c = J\omega$. Вертикальность показателя конформности и голоморфность субмерсии позволяют заключить, что ω^c также вертикальная форма. Оператор J – ортогональный, и слои субмерсии вещественно двумерные подмногообразия, поэтому $Vg = (\omega^2 + (\omega^c)^2)/\|\mathrm{gr} f\|^2$, где g кэлероваметрика на N. Из условия конформности субмерсии и предыдущего равенства находим метрику на N: $g = (\omega^2 + (\omega^c)^2)/\|\mathrm{gr} f\|^2 + e^{2f}\pi^* g_M$. Полученное равенство перепишется для ассоциированных с g и g_M кэлеровых форм в следующем виде:

$$\Phi = -\frac{2}{\|\mathrm{gr} f\|^2}\omega \wedge \omega^c + e^{2f}\pi^*\Phi_M\,. \tag{3.14}$$

Из равенства (3.12) и определения (2.11) потенциальной формы следует, что для функции $t = u + \pi^* F_M$ (F_M – кэлеров потенциал для M) имеет место равенство (3.15). Так как субмерсия f является римановой, то модуль градиента f – постоянная вдоль слоев функция, т.е. зависит лишь от f. Следовательно, f является функцией лишь от t, и равенство (3.15) эквивалентно равенству (3.16):

$$dt = e^{-2f}\|\mathrm{gr} f\|^{-2} df\,, \tag{3.15}$$

$$\dot f(t) = e^{2f}\|\mathrm{gr} f\|^2\,. \tag{3.16}$$

Всякая плюригармоническая функция u является вещественной частью некоторой голоморфной функции $w = u + iv$ [14, с. 26]. Таким образом, для функции t имеет место представление (2.6), а равенство (3.14) после подстановки в него выражения для квадрата модуля градиента из равенства (3.16) превращается в равенство (2.15), эквивалентное (2.5). Положительность производной в равенстве (3.16) показывает, что все условия определения 2.4 выполнены. ■

4. Голоморфные конформные субмерсии

Следующая теорема служит аналогом прямого утверждения теоремы 1.11 в кэлеровом случае.

Теорема 4.1. *Всякая голоморфная конформная субмерсия π кэлеровых многообразий с вертикальным показателем конформности и вполне геодезическими слоями является комплексной обратно геодезической субмерсией.*

Доказательство. Из замкнутости кэлеровой формы Φ многообразия N, на котором определена субмерсия π, по формуле (2.4) получаем

$$0 = 3d\Phi(JU, X, JY) = JU\Phi(X, JY) + \Phi(JU, [X, JY]), \qquad (4.1)$$

если учесть: голоморфность субмерсии, обстоятельство, что векторные поля X и Y базисные, а U – вертикальное, и выполнение свойства проектируемости (0.3). Применим формулу (2.22) к нашей тройке полей: $2\Phi(\nabla_U X, Y) = U\Phi(X, Y) - \Phi(JU, [X, JY])$. Воспользовавшись формулой (4.1), последнее равенство представим в таком виде:

$$2\Phi(\nabla_U X, Y) = U\Phi(X, Y) + JU\Phi(X, JY)\,. \qquad (4.2)$$

Поскольку $\Phi(X, Y) = g(X, JY)$, то предложение 1.3 в случае кэлерова многообразия N означает, что

$$(L_U\Phi)(X, Y) = 2df(U)\Phi(X, Y)\,, \qquad (4.3)$$

где f — показатель конформности субмерсии. А так как $L_U\Phi(X, Y) = U\Phi(X, Y)$, то формулы (4.2), (4.3) означают, что $\Phi(\nabla_U X, Y) = df(U)\Phi(X, Y) + df(JU)\cdot\Phi(X, JY)$. Невырожденность кэлеровой формы, базисность векторного поля X и первое равенство из (1.6) позволяют получить выражение для инварианта субмерсии A

$$H\nabla_U X = A_X U = \omega(U)X + \omega^c(U)JX, \qquad (4.4)$$

где $\omega = df$, $\omega^c = Jdf$. Снова применим формулу (2.22) и воспользуемся условием вертикальности показателя конформности, тогда

$$2\Phi(\nabla_{X^H} Y^H, Z^H) = e^{2f}\cdot 2\Phi_M(\nabla^M_X Y, Z) = 2\Phi((\nabla^M_X Y)^H, Z^H)\,.$$

Здесь ∇^M – ковариантная производная кэлерова многообразия M. Сравнивая крайние выражения, заключаем, что

$$H\nabla_{X^H} Y^H = (\nabla^M_X Y)^H\,. \qquad (4.5)$$

Пусть теперь W – комплексное вполне геодезическое подмногообразие в M, α – вторая основная форма для подмногообразия $\pi^{-1}(W)$ в N, X,Y – горизонтальные векторы относительно π, касательные к $\pi^{-1}(W)$. Из формул (4.4),(4.5) следует, что $\alpha(U, X) = 0$ и $\alpha(X, Y) = 0$, соответственно. Из вполне геодезичности слоев следует $\alpha(U, V) = 0$. Таким образом, $\pi^{-1}(W)$ вполне геодезично в N. ■

В этом разделе будет доказана теорема 4.5, обратная приведенной выше, но при условии,что база субмерсии – комплексная пространственная форма. Более того, если размерность тотального пространства лишь на единицу больше базы, то будет показано, что тотальное пространство является в этом случае кэлеровым f-продолжением комплексной формы. Сравнение этого результата с теоремой 1.11 будет означать, что кэлеровым аналогом скрещенного произведения комплексной кривой на комплексную форму служит кэлерово f-продолжение вдоль кривой. Но предварительно придется привести несколько утверждений технического характера. Всюду в дальнейшем, помимо уже принятых соглашений, M – это комплексная пространственная форма.

Лемма 4.2. *Если π комплексная обратно геодезическая субмерсия из кэлерова многообразия N на комплексную пространственную форму $M (1 < m = \dim_c M)$, то существуют вертикальные 1-формы ω и ω^c такие, что*

$$\nabla_U X = A_X U = \omega(U)X + \omega^c(U)JX\,, \tag{4.6}$$

где векторное поле X – горизонтальное, U – вертикальный вектор относительно субмерсии π, причем $J\omega = \omega^c$, а A – инвариант О'Нейла субмерсии π.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Хорошо известно, что для любого вектора $\pi_* X$ из произвольного касательного пространства $T_p M$ комплексной формы существует комплексное вполне геодезическое подмногообразие W, проходящее через p, касательное пространство которого в этой точке натянуто на вектора $\pi_* X$ и $J\pi_* X$. Выбрав m штук комплексных взаимно ортогональных подпространств из некоторого касательного пространства $T_p M$ базы, выпустим вполне геодезические двумерные подмногообразия, касательные пространства которых совпадают в точке p с выбранными подпространствами. Так как, по условию, прообразы комплексных вполне геодезических – вполне геодезические подмногообразия в N и пересечение вполне геодезических есть снова вполне геодезическое подмногообразие, то получаем, что слои субмерсии являются вполне геодезическими подмногообразиями.

Условие комплексной обратной геодезичности означает, что ковариантная производная $\nabla_U X$ проектируется в линейную оболочку векторов $\pi_* X$ и $J\pi_* X$. Следовательно,

$$H\nabla_U X = \nabla_U X = f(U,X)X + h(U,X)JX\,. \tag{4.7}$$

Здесь первое равенство обеспечивается геодезичностью слоев, а f и h – пока что гладкие функции, зависящие от векторного поля X и вектора U. Из базисности поля X следует, что $H\nabla_U X = H\nabla_X U = A_X U$, т.е. f и h зависят также лишь от значения поля X в точке. В некоторой точке N выберем для произвольного вектора X вектор Y (горизонтальный) так, чтобы три вектора Y, X, JX были некомпланарные. Используя линейность тензора A, т.е. $A_{X+Y}U = A_X U + A_Y U$, и формулу (4.7), получим следующее:

$$f(U, X+Y) = f(U,X), \qquad h(U, X+Y) = h(U,X)\,.$$

Отсюда следует, что f и h не зависят от выбора комплексной плоскости, которой принадлежит вектор X. Так как по X тензор A однороден, т.е. $A_{\lambda X}U = \lambda A_X U$, то

$$f(U,\lambda X) = f(U,X), \quad h(U,\lambda X) = h(U,X)\,,$$

и эти функции не зависят от величины вектора X, а могут зависеть только от расположения прямой, натянутой на X в плоскости $L(X,JX)$. Пусть теперь Z принадлежит плоскости, натянутой на векторы X, JX. Из предыдущего следует, что $f(U,Z) = f(U,Y) = f(U,X)$, и аналогичную цепочку равенств можно составить для функции h. Таким образом, f и h не зависят от вектора X вовсе. А поскольку от U они зависят линейно, то, положив, по определению,

$$\omega(U) = f(U), \quad \omega(X) = 0, \quad \omega^c(U) = h(U), \quad \omega^c(X) = 0, \tag{4.8}$$

получаем равенство (4.6). И последнее утверждение леммы следует из параллельности комплексной структуры и голоморфности субмерсии:

$$H\nabla_X JU = \omega(JU)X + \omega^c(JU)JX = JH\nabla_X U = \omega(U)JX - \omega^c(U)X\,.$$

Гладкость построенных 1-форм при наличии разложения (4.6) обеспечивается гладкостью первоначально выбранного поля X и кэлеровой структуры на N. ∎

Следствие 4.3. *Если для субмерсии выполнено заключение леммы 4.2, то слои субмерсии вполне геодезические подмногообразия.*

Доказательство. Уже первое тождество в (4.6) означает равенство нулю оператора Вейнгартена для каждого слоя субмерсии. ∎

Лемма 4.4. *Пусть инвариант О'Нейла A голоморфной субмерсии удовлетворяет равенствам (4.6). Тогда существует локально определенная в окрестности каждой точки вертикальная функция f такая, что $\omega = df$.*

Доказательство. Пусть U, W вертикальные, а X горизонтальное векторные поля, тогда по лемме 4.2

$$\begin{aligned} \nabla_U\nabla_W X &= U\omega(W)X + \omega(W)(\omega(U)X + \omega^c(U)JX) \\ &\quad + U\omega^c(W)JX + \omega^c(W)J(\omega(U)X + \omega^c(U)JX)\,, \quad (4.9) \\ \nabla_{[U,W]}X &= \omega([U,W])X + \omega^c([U,W])JX\,. \quad (4.10) \end{aligned}$$

Воспользовавшись свойством тензора римановой кривизны $0 = R(U,W,X,X)$ и вычислив его с применением формул (4.9), (4.10), получим

$$0 = (U\omega(W) - W\omega(U) - \omega([U,W])\|X\|^2 = d\omega(U,W)\|X\|^2\,.$$

Пусть теперь X, Y базисные, а W вертикальное векторные поля. Применяя лемму 4.2, следствие 4.3 и параллельность J, вычислим:

$$\begin{aligned}
H\nabla_W\nabla_X Y &= \omega(W)H\nabla_X Y + \omega^c(W)JH\nabla_X Y, \\
H\nabla_X\nabla_W Y &= X\omega(W)\cdot Y + \omega(W)H\nabla_X Y + X\omega^c(W)\cdot JY \\
&\quad +\omega^c(W)JH\nabla_X Y, \\
H\nabla_{[W,X]}Y &= \nabla_{[W,X]}Y = \omega([W,X])Y + \omega^c([W,X])JY, \\
HR(W,X)Y &= -(X\omega(W) + \omega([W,X]))Y - (X\omega^c(W) + \omega^c([W,X]))JY.
\end{aligned}$$

А так как $R(W,X,Y,Y) = 0$, то последнее равенство означает, что $X\omega(W) - \omega([X,W]) = 0$. Учитывая вертикальность формы ω в равенствах (4.6), последнее равенство приводит к равенству $d\omega(X,W) = 0$.

Теперь воспользуемся формулой (4.1), метричностью связности, леммой 4.2 и эрмитовостью метрики g:

$$\begin{aligned}
\Phi([X,Y],W) &= W\Phi(X,Y) = Wg(X,JY) \\
&= \omega(W)g(X,JY) + \omega^c(W)g(JX,JY) \\
&\quad +\omega(W)g(X,JY) - \omega^c(W)g(X,Y) \\
&= 2\omega(W)g(X,JY)\,. \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Сравнивая крайние части цепочки равенств при $W = V[X,Y]$, приходим к заключению, что $\omega([X,Y])g(X,JY) = 0$. Откуда получаем, что если Y принадлежит распределению $L(X,JX)$, то $\omega([X,Y]) = 0$, если же Y ортогонален этому распределению в некоторой точке, то (4.11) показывает, что в этой точке $\Phi([X,Y],W) = 0$ для любого вектора W. Невырожденность кэлеровой формы позволяет в итоге заключить, что $\omega([X,Y]) = 0$. Учитывая вертикальность формы ω, получаем, что это эквивалентно равенству $d\omega(X,Y) = 0$.

Суммируя полученное выше, приходим к заключению: форма ω является замкнутой. Из леммы Пуанкаре следует существование локально определенной функции f такой, что $df = \omega$. Ее вертикальность обусловлена, конечно, вертикальностью формы ω. ∎

Теорема 4.5. *Всякая комплексная обратно геодезическая субмерсия из односвязного кэлерова многообразия на комплексную пространственную форму размерности больше чем 1 является конформной субмерсией с вертикальным показателем конформности и вполне геодезическими слоями относительно некоторой кэлеровой метрики базы постоянной голоморфной кривизны.*

Доказательство. Из цепочки равенств (4.11), в принятых соглашениях об обозначениях векторных полей, можно получить $(L_W g)(X,JY) = Wg(X,JY) = 2\omega(W)g(X,JY)$. Существование римановой метрики базы g_M, относительно которой субмерсия π является конформной, следует теперь из лемм 4.2 и 4.4, следствия 4.3 и предложения 1.3, так как односвязность тотального пространства субмерсии обеспечивает глобальное существование функции f из леммы 4.4. Вообще говоря, риманова метрика g_M может и не совпадать с исходной кэлеровой метрикой g_c постоянной голоморфной кривизны. Эрмитовость g_M следует из формул (1.1) и (2.3), поскольку π – голоморфная субмерсия. Чтобы показать кэлеровость метрики g_M, достаточно установить параллельность комплексной структуры базы относительно римановой связности ∇^M метрики g_M. Сравнение крайних частей цепи равенств (1.14) позволяет получить в случае конформной субмерсии с вертикальным показателем конформности следующую связь ковариантных производных:

$$H\nabla_{X^H}Y^H = (\nabla^M_X Y)^H\,. \tag{4.12}$$

Теперь параллельность комплексной структуры на N совместно с равенствами (4.12) и (2.3) приводит к равенствам

$$\begin{aligned}(\nabla^M_X JY)^H &= H\nabla_{X^H}(JY)^H = H\nabla_{X^H}JY^H = HJ\nabla_{X^H}Y^H \\ &= JH\nabla_{X^H}Y^H = J(\nabla^M_X Y)^H = (J\nabla^M_X Y)^H\,.\end{aligned}$$

Сравнивая цепочки равенств, приходим к заключению, что J параллельна относительно ∇^M. Из леммы 1.10 следует, что всякое комплексное вполне геодезическое подмногообразие в исходной кэлеровой метрике g_c является вполне геодезическим и в построенной кэлеровой метрике g_M. Яно и Моги [12] ввели в 1955 г. определение кэлерова многообразия M, удовлетворяющего аксиоме голоморфных $2p$-плоскостей $(0 < p < \dim_c M)$. Это такое кэлерово многообразие, что через каждую точку $x \in M$ и произвольное $2p$-мерное комплексное подпространство E из касательного пространства T_xM проходит вполне геодезическое подмногообразие, имеющее E своим касательным пространством в точке x. В [12] показано, что аксиома голоморфных плоскостей однозначно характеризует класс комплексных пространственных форм. Выше было показано, что g_M удовлетворяет аксиоме голоморфных плоскостей, так как g_c ей удовлетворяет. Таким образом, g_M является также метрикой постоянной голоморфной кривизны. ■

Следствие 4.6. *В предположениях леммы 4.4 существует локально определенная в окрестности любой точки функция f такая, что* $\mathrm{gr} f$, $\mathrm{gr}^c f = J\mathrm{gr} f$ *– векторные поля, двойственные относительно римановой метрики, 1-формам ω, ω^c, соответственно.*

Следствие 4.7. *В предположениях леммы 4.4 $d\omega^c$ – эрмитова форма, т.е. $Jd\omega^c = d\omega^c$.*

Доказательство. Согласно выражениям (2.10), $d\omega^c = dd^c f = 2i\partial\bar\partial f$. ■

Введем обозначения для следующих единичных векторных полей:

$$\nu = \mathrm{gr} f / \|\mathrm{gr} f\|, \quad \xi = J\nu \,. \tag{4.13}$$

Следующая лемма доставляет необходимое условие вполне геодезичности слоев субмерсии кэлерова многообразия в терминах кэлеровой формы.

Лемма 4.8. *Для голоморфной субмерсии со вполне геодезическими слоями на кэлеровом многообразии* $(L_X\Phi)(U,W) = 0$.

Доказательство. Интегрируемость почти комплексной структуры означает, что $J[JX,W] = -J[X,JW] + [JX,JW] - [X,W]$. Применяя эту формулу в следующих вычислениях, получим

$$\begin{aligned}(L_{JX} g)(U,W) &= -JX\Phi(U,JW) + \Phi([JX,U],JW) + \Phi(U,J[JX,W]) \\ &= -(L_{JX}\Phi)(U,JW) - \Phi(U, J[X,JW] + [X,W]) \,. \end{aligned} \tag{4.14}$$

В принятых соглашениях об обозначениях векторных полей из условия леммы следует справедливость следующего равенства:

$$V[X,W] = V\nabla_X W \,. \tag{4.15}$$

Отсюда следует, что $V(J[X,JW] + [X,W]) = VJ\nabla_X JW + V\nabla_X W = 0$, так как J – параллельна, а субмерсия голоморфная. Применяя полученный результат в (4.14), видим, что последнее слагаемое в крайней правой части цепочки равенств равно нулю. Итак, получаем равенство $(L_{JX} g)(U,W) = -(L_{JX}\Phi)(U,JW)$. Как известно из [15, теорема 5.23], равенство нулю левой части последнего тождества служит критерием того, что слои субмерсии вполне геодезичны. ■

Лемма 4.9. *Пусть инвариант О'Нейла A голоморфной субмерсии кэлерова многообразия удовлетворяет равенствам (4.6). Тогда в некоторой окрестности каждой точки выполняется следующее равенство*:

$$[X^H, Y^H] = [X,Y]^H + 2\Phi(X^H, Y^H)\mathrm{gr}^c f \,.$$

Доказательство. Учитывая π-связность горизонтальных лифтов векторных полей и их проекций, достаточно доказать равенство леммы лишь для вертикальной компоненты. Сравнение крайних равенств в их цепочке (4.11) и следствие 4.6 позволяют получить следующее:

$$\Phi([X^H, Y^H], W) = 2\omega(W)\Phi(X^H, Y^H) = 2\Phi(X^H, Y^H)\Phi(\mathrm{gr}^c f, W) \,,$$

где W – произвольный вектор. Теперь лемма следует из невырожденности кэлеровой формы. ■

Лемма 4.10. *Пусть $\pi : N \mapsto M$ голоморфная субмерсия кэлерова многообразия, причем* $\dim_c M > 1$. *Пусть инвариант О'Нейла этой субмерсии удовлетворяет равенствам (4.6). Тогда верно следующее*:

а) *для горизонтальных векторов* X и Y $d\omega^c(X,Y) = -\Phi(X,Y)\|\mathrm{gr} f\|^2$;

б) $\|\mathrm{gr} f\|$ – *вертикальная функция, где* $\|\mathrm{gr} f\| = \|\omega\|$.

Доказательство. а) Пусть векторные поля X, Y – это горизонтальные лифты, совпадающие с заданными по условию векторами в некоторой точке. Применим [6, гл. 1, предложение 3.11] и лемму 4.9:

$$d\omega^c(X,Y) = -\frac{1}{2}\omega^c([X,Y]) = -\Phi(X,Y)\omega^c(\mathrm{gr} f)\,.$$

а) Этот пункт следует теперь из следствия 4.6.

б) В произвольной точке $p \in N$ для любого горизонтального вектора X выберем горизонтальные векторы Y и $Z = JY$ так, чтобы они были ортогональны вектору X. Продолжим все эти векторы до базисных полей. Из точности оператора внешнего дифференцирования получаем следующее равенство:

$$0 = d^2\omega^c(X,Y,Z) = \mathfrak{S}_{X,Y,Z}(X d\omega^c(Y,Z) + d\omega^c(X,[Y,Z]))\,.$$

(Здесь символом $\mathfrak{S}$ обозначается циклическая сумма.) Воспользуемся равенством пункта а), замкнутостью кэлеровой формы Φ и леммой 4.9, тогда последнее выражение преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{S}_{X,Y,Z}(d\omega^c(X, V[Y,Z]) - \Phi(Y,Z)\cdot X\|\mathrm{gr} f\|^2)\\ &= \mathfrak{S}_{X,Y,Z}\Phi(Y,Z)(2d\omega^c(X,\mathrm{gr}^c f) - X\|\mathrm{gr} f\|^2\,.\end{aligned}$$

Применяя формулу для внешнего дифференцирования, следствие 4.6 и вполне геодезичность слоев субмерсии, получим

$$\begin{aligned}&2d\omega^c(X,\mathrm{gr}^c f) - X\|\mathrm{gr} f\|^2 = \omega^c([\mathrm{gr}^c f, X])\\ &= g(\mathrm{gr}^c f, \nabla_{\mathrm{gr}^c f} X - \nabla_X \mathrm{gr}^c f) = -X\|\mathrm{gr} f\|^2/2\,.\end{aligned}$$

Подставив полученное выражение в предыдущую формулу, в рассматриваемой точке p имеем следующее: $0 = -\Phi(Y,JY)X\|\mathrm{gr} f\|^2/2$. ∎

Лемма 4.11. *Пусть инвариант О'Нейла A голоморфной субмерсии кэлерова многообразия на базу, комплексная размерность которой больше 1, удовлетворяет равенствам (4.6). Тогда* $d\omega^c(W,X) = 0$ *для любых векторов: W вертикального и X горизонтального.*

Доказательство. По определению дифференцирования Ли, учитывая связь кэлеровой формы с метрикой, получим следующее:

$$(L_X\Phi)(\mathrm{gr} f, \mathrm{gr}^c f) = -X\|\mathrm{gr} f\|^2 + g([X,\mathrm{gr} f],\mathrm{gr} f) + g(\mathrm{gr}^c f, [X,\mathrm{gr}^c f])\,.$$

Воспользуемся леммой 4.10, б) и следствием 4.6:

$$(L_X\Phi)(\mathrm{gr}f,\mathrm{gr}^c f)=\omega([X,\mathrm{gr}f])+\omega^c([X,\mathrm{gr}^c f])\,. \tag{4.16}$$

Из вертикальности формы ω и лемм 4.10, б) и 4.4 следует, что $\omega([X,\mathrm{gr}f])= X\omega(\mathrm{gr}f)-\mathrm{gr}f\omega(X)-2d\omega(X,\mathrm{gr}f)=0$. Поэтому

$$(L_X\Phi)(\mathrm{gr}f,\mathrm{gr}^c f)=\omega^c([X,\mathrm{gr}^c f])=-2d\omega^c(X,\mathrm{gr}^c f)\,. \tag{4.17}$$

Из леммы 4.8 и следствия 4.7 вытекает следующее:

$$d\omega^c(X,\mathrm{gr}^c f)=0,\quad d\omega^c(Y,\mathrm{gr}f)=0\,. \tag{4.18}$$

Наконец, если вектор W ортогонален к $\mathrm{gr}f$ и $\mathrm{gr}^c f$, то $\omega(W)=\omega^c(W)=0$. Поэтому для базисного векторного поля X имеем

$$2d\omega^c(W,X)=-\omega^c([W,X])=-g(\mathrm{gr}^c f,[W,X])\,.$$

Учитывая равенство (4.16), метричность связности и эрмитовость метрического тензора, получим продолжение последовательности равенств:

$$\begin{aligned} g(\mathrm{gr}^c f,\nabla_X W) &= -g(J\nabla_X\mathrm{gr}f,W)=-g(\mathrm{gr}f,\nabla_X JW)=-g(\mathrm{gr}f,[X,JW])\\ &= -\omega([X,JW])=2d\omega(X,JW)-X\omega(JW)=0\,. \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из леммы 4.4 и выбора W. ∎

Лемма 4.12. *Пусть инвариант О'Нейла A голоморфной субмерсии кэлерова многообразия на базу, комплексная размерность которой больше 1, удовлетворяет равенствам (4.6). Тогда тензор кривизны многообразия N удовлетворяет следующим равенствам*:

а) $R(U,W)X=2d\omega^c(U,W)JX$,

б) $R(X,Y)U=g(JX,Y)(\nabla_U\mathrm{gr}^c f+\nabla_{JU}\mathrm{gr}f)$,

в) $R(U,X)W=d\omega^c(U,JW)X+d\omega^c(U,W)JX$,

г) $R(X,U)Y=g(X,Y)\nabla_U\mathrm{gr}f+g(JX,Y)\nabla_U\mathrm{gr}^c f+(\omega(U)g(X,Y)$
$+\,\omega^c(U)g(JX,Y))\mathrm{gr}f+(\omega(U)g(JX,Y)-\omega^c(U)g(X,Y))\mathrm{gr}^c f$,

где, как и прежде, U, W – вертикальные векторы, а X,Y – горизонтальные.

Доказательство. Продолжим X,Y до базисных полей, а U – до вертикального поля.

а) Этот пункт немедленно следует из формул (4.9), (4.10) и выражения для внешнего дифференциала, не раз применявшегося выше.

б) Применим равенство (4.6) и следствие 4.3. Тогда получим $HR(X,U)Y= H(\nabla_X(\omega(U)Y+\omega^c(U)JY)-H\nabla_U(H\nabla_X Y+V\nabla_X Y)-\omega([X,U])Y-\omega^c([X,U])JY$

$= X\omega(U)Y + X\omega^c(U)JY - \omega([X,U])Y - \omega^c([X,U])JY = 2d\omega^c(X,U)JY = 0$. Последние два равенства следуют из вертикальности 1-форм ω и ω^c, замкнутости формы ω, по лемме 4.4, и из леммы 4.11. Таким образом, $HR(X,U)Y = 0$. Отсюда и из I-го тождества Бьянки следует, что

$$HR(X,Y)U = HR(X,U)Y - HR(Y,U)X = 0\,. \tag{4.19}$$

Для нахождения вертикальной составляющей значения тензора кривизны на выбранной тройке векторов воспользуемся алгебраическими свойствами тензора кривизны, пунктом а), выражением для внешнего дифференциала 1-формы, следствием 4.6, метричностью связности Леви–Чевита и отсутствием у нее кручения:

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)U,W) &= g(R(U,W)X,Y) = 2d\omega^c(U,W)g(JX,Y) = (U\omega^c(W) \\ &-W\omega^c(U) - \omega^c([U,W]))g(JX,Y) = (Ug(\mathrm{gr}^c f,W) - Wg(\mathrm{gr}^c f,U) \\ &-\omega^c(\nabla_U W) + \omega^c(\nabla_W U))g(JX,Y) = (g(\nabla_U \mathrm{gr}^c f,W) \\ &-g(\nabla_W \mathrm{gr}^c f,U))g(JX,Y) = g(JX,Y)g(\nabla_U \mathrm{gr}^c f + \nabla_{JU}\mathrm{gr} f,W)\,. \end{aligned}$$

Последнее в цепочке равенство, доказывающее пункт б), следует из параллельности комплексной структуры и симметричности гессиана функции, [5, с. 53].

$$\mathrm{hes} f(W,V) = g(\nabla_W \mathrm{gr} f,V) = (\nabla_W \omega)(V)\,. \tag{4.20}$$

в), г) Отсутствие вертикальной составляющей правой части равенства пункта в) вытекает из следствия 4.3 и алгебраических свойств тензора кривизны. Воспользуемся свойством (0.3) базисных полей.

$$\begin{aligned} R(U,X)W &= HR(U,X)W = \nabla_U A_X W - A_X \nabla_U W \\ &= ((\nabla_U\omega)(W) + \omega(U)\omega(W) - \omega^c(U)\omega^c(W))X \\ &\quad +((\nabla_U\omega^c)(W) + \omega^c(U)\omega(W) + \omega(U)\omega^c(W))JX\,. \end{aligned}$$

Полученное представление для $R(U,X)W$ допускает упрощение. Из алгебраических свойств тензора кривизны, представленного в предыдущей формуле, и следствия 4.6 получим следующее:

$$\begin{aligned} &g(R(X,U)Y,W) = g(R(U,X)W,Y) \\ &= g(X,Y)g(\nabla_U \mathrm{gr} f + \omega(U)\mathrm{gr} f - \omega^c(U)\mathrm{gr}^c f,W) \\ &+ g(JX,Y)g(\nabla_U \mathrm{gr}^c f + \omega^c(U)\mathrm{gr} f + \omega(U)\mathrm{gr}^c f,W)\,. \end{aligned} \tag{4.21}$$

В I-м тождестве Бьянки используем полученное выражение вместо второго и третьего слагаемых и выражение из пункта б):

$$\begin{aligned} 0 &= g(R(X,Y)U + R(Y,U)X + R(U,X)Y,W) \\ &= g(JX,Y)g(\nabla_{JU}\mathrm{gr} f - \nabla_U \mathrm{gr}^c f - 2\omega(U)\mathrm{gr}^c f - 2\omega^c(U)\mathrm{gr} f,W)\,. \end{aligned}$$

Применяя в последнем выражении симметричность гессиана функции (4.20), получим следующее тождество:

$$g(\nabla_U \mathrm{gr}^c f, W) + 2\omega^c(W)\omega(U) = -g(\nabla_W \mathrm{gr}^c f, U) - 2\omega^c(U)\omega(W)\,.$$

Таким образом, корректно определена вертикальная 2-форма Ψ:

$$\Psi(U,W) = g(\nabla_U \mathrm{gr}^c f, W) + 2\omega^c(W)\omega(U) = d\omega^c(U,W) + 2\omega\wedge\omega^c(U,W)\,. \quad (4.22)$$

Последнее равенство следует из кососимметричности Ψ и выражения для внешнего дифференцирования из [6, гл. 3, следствие 8.6], которое применительно к рассматриваемому случаю дает следующее:

$$2d\omega^c(U,W) = (\nabla_U\omega^c)(W) - (\nabla_W\omega^c)(U)\,. \quad (4.23)$$

Здесь учитывалась также двойственность векторного поля $\mathrm{gr}^c f$ к внешней 1-форме ω^c по следствию 4.6. Из равенства (4.22) следует

$$d\omega^c(U,W) = (\nabla_U\omega^c)(W) + \omega^c(U)\omega(W) + \omega^c(W)\omega(U)\,. \quad (4.24)$$

Применяя следствие 4.6, параллельность комплексной структуры и последнее равенство, нетрудно получить

$$d\omega^c(U,JW) = (\nabla_U\omega)(W) + \omega(U)\omega(W) - \omega^c(U)\omega^c(W)\,. \quad (4.25)$$

Полученное выше выражение для $R(U,X)W$ совместно с двумя последними равенствами доказывают пункт в). Так как из алгебраических свойств тензора кривизны и пункта б) следует, что горизонтальная компонента $R(X,U)Y$ нулевая, то равенство (4.21) доказывает пункт г). ■

Следствие 4.13. *Пусть выполнены предположения леммы 4.12. Тогда*

а) $g(\nabla_U \mathrm{gr}^c f + \nabla_{JU}\mathrm{gr} f, W) = 2d\omega^c(U,W)$,

б) $R(X,Y,U,W) = 2g(JX,Y)d\omega^c(U,W)$,

в) *вполне вещественная бисекционная кривизна* $B(X\wedge W) = 2d\omega^c(JW,W)$ *в смешанных секциях зависит лишь от вертикальной секции* $W\wedge JW$, *здесь* W *– единичный вектор.*

Доказательство. а) Равенство следует из алгебраических свойств тензора кривизны и пунктов а), б) леммы 4.12.

б) Равенство из этого пункта есть следствие пункта б) леммы 4.12.

в) В равенстве из пункта б) выберем горизонтальный вектор X единичным, а $Y = JX$. ■

Лемма 4.14. *Пусть голоморфная субмерсия* $\pi : N \to M$ *кэлеровых многообразий,* $2 < \dim_c N = \dim_c M + 1$, *обладает инвариантом О'Нейла* A, *удовлетворяющим равенствам (4.6) с невырожденной 1-формой ω. Тогда в окрестности каждой точки*

$$d\omega^c = -\frac{\kappa}{\|\mathrm{gr} f\|^2}\omega \wedge \omega^c - e^{2f}\|\mathrm{gr} f\|^2 \pi^* \Phi_M,$$

где $df = \omega$, Φ_M – кэлерова форма для многообразия M, а $\kappa = B(X \wedge W)$ – вполне вещественная бисекционная кривизна в смешанных секциях, являющаяся функцией на N.

Доказательство. Пусть $P = U + X$, $Q = W + Y$ – разложение векторов на вертикльную и горизонтальную составляющие. На основании леммы 4.11

$$d\omega^c(P, Q) = d\omega^c(U, W) + d\omega^c(X, Y)\,. \tag{4.26}$$

Из следствия 4.13, б), выбрав горизонтальный вектор Z единичным, получим следующее:

$$d\omega^c(U, W) = \frac{1}{2\|\mathrm{gr} f\|^2} g(R(Z, JZ)(\omega(U)\nu + \omega^c(U)\xi), \omega(W)\nu + \omega^c(W)\xi)\,,$$

где ν и ξ – из равенства (4.13). Так как вертикальная секция в случае одномерных слоев единственная, то, по следствию 4.13, в), из предыдущей формулы находим

$$d\omega^c(U, W) = -\frac{\kappa}{\|\mathrm{gr} f\|^2}\omega \wedge \omega^c(U, W)\,. \tag{4.27}$$

Лемма 4.10, а), вертикальность 1-форм ω и ω^c совместно с равенствами (4.26), (4.27) приводят к следующей формуле:

$$d\omega^c(P, Q) = -\frac{\kappa}{\|\mathrm{gr} f\|^2}\omega \wedge \omega^c(P, Q) - \|\mathrm{gr} f\|^2 \Phi(X, Y)\,. \tag{4.28}$$

Из леммы 4.4, равенств (4.11) и теоремы 4.5 следует, что π локально является конформной субмерсией с вертикальным показателем f относительно некоторой кэлеровой метрики базы g_M. Конформность субмерсии совместно с голоморфностью приводит к

$$\Phi(X, Y) = H\Phi(P, Q) = e^{2f}\pi^*\Phi_M(P, Q)\,.$$

Подставляя полученное выражение в равенство (4.28), приходим к утверждению леммы. ■

Следствие 4.15. *В предположениях леммы 4.14 верно следующее*:

а) $d\|\mathrm{gr} f\|^2 = -(\kappa + 2\|\mathrm{gr} f\|^2)\omega$,

б) *дифференциал функции смешанной бисекционной кривизны κ коллинеарен форме ω.*

Доказательство. а) Из точности внешнего дифференцирования, его перестановочности с кодифференциалом субмерсии и замкнутости кэлеровой формы по лемме 4.14 получаем следующее:

$$0 = d^2\omega^c = -d\frac{\kappa}{\|\mathrm{gr} f\|^2} \wedge \omega \wedge \omega^c + \frac{\kappa}{\|\mathrm{gr} f\|^2}\omega \wedge d\omega^c - d\left(e^{2f}\|\mathrm{gr} f\|^2\right) \wedge \pi^*\Phi_M.$$

В эту формулу подставим во втором слагаемом выражение для $d\omega^c$ из леммы 4.15. После преобразований имеем

$$d\frac{\kappa}{\|\mathrm{gr} f\|^2} \wedge \omega \wedge \omega^c = -\left(d(e^{2f}\|\mathrm{gr} f\|^2) + \kappa e^{2f}\omega\right) \wedge \pi^*\Phi_M\,. \tag{4.29}$$

В последней формуле расположена слева, как минимум, дважды вертикальная форма, а справа – дважды горизонтальная, так как форма $\pi^*\Phi_M$ – базисная. Таким образом, и слева, и справа на самом деле стоит нулевая форма. Правая часть формулы (4.29) после дифференцирования дает следующее равенство:

$$(d\|\mathrm{gr} f\|^2 + (\kappa + 2\|\mathrm{gr} f\|^2)\omega) \wedge \pi^*\Phi_M = 0.$$

Теперь утверждение пункта а) следует из невырожденности кэлеровой формы.

б) Продифференцировав обе части равенства пункта а), получим $(d\kappa + 2d\|\mathrm{gr} f\|^2) \wedge \omega = 0$. Теперь утверждение пункта б) следует из утверждения пункта а). ■

Лемма 4.16. *В предположениях леммы 4.14 существуют локально определенные плюригармонические на кэлеровом многообразии N функции u, v такие, что*

а) $dv = e^{-2f}\|\mathrm{gr} f\|^{-2}\omega^c + \pi^*\varphi^c$,

б) $du = -Jdv = e^{-2f}\|\mathrm{gr} f\|^{-2}\omega + \pi^*\varphi$,

где φ, φ^c – d^c- и d-потенциалы кэлеровой формы Φ_M многообразия M.

Доказательство. а) С помощью леммы 4.14 и следствия 4.15 вычислим дифференциал следующей 1-формы:

$$d\frac{e^{-2f}\omega^c}{\|\mathrm{gr} f\|^2} = \left(-\frac{2e^{-2f}}{\|\mathrm{gr} f\|^2}df + \frac{e^{-2f}(\kappa + 2\|\mathrm{gr} f\|^2)}{\|\mathrm{gr} f\|^4}\omega\right) \wedge \omega^c$$
$$-\frac{e^{-2f}}{\|\mathrm{gr} f\|^2}\left(\frac{\kappa}{\|\mathrm{gr} f\|^2}\omega \wedge \omega^c + e^{2f}\|\mathrm{gr} f\|^2\pi^*\Phi_M\right) = -\pi^*\Phi_M\,.$$

Учитывая определение (2.13) d^c-потенциала для кэлеровой формы Φ_M многообразия M и перестановочность внешнего дифффеpенциала с кодифференциалом субмерсии, из сравнения крайних частей полученной цепочки равенств получаем следующее тождество:

$$d\left(\frac{e^{-2f}\omega^c}{\|\mathrm{gr}f\|^2} + \pi^*\varphi^c\right) = 0\,.$$

По лемме Пуанкаре существует локально определенная функция v такая, что выполняется равенство пункта а). Докажем плюригармоничность функции v. Согласно формулам (2.12), определению d^c-дифференциала от 1-формы и следствию 4.6

$$d^c dv = -JdJ(e^{-2f}\|\mathrm{gr}\|^{-2}\omega^c) = Jd(e^{-2f}\|\mathrm{gr}f\|^{-2}\omega)\,.$$

А так как дифференциалы f и $\|\mathrm{gr}f\|$ коллинеарны точной форме ω в соответствии с леммой 4.4 и следствием 4.15, то $d^c dv = 0$, что и означает плюригармоничность функции.

б) J-образ дифференциала любой плюригармонической функции есть дифференциал снова плюригармонической функции, если J – комплексная структура. Поэтому равенство пункта б) следует из равенства пункта а). ■

Теорема 4.17. *Пусть $\pi : E \to M$ комплексная обратно геодезическая субмерсия из кэлерова многообразия на комплексную пространственную форму, причем $2 < \dim_c E = \dim_c M + 1$. Тогда многообразие E содержит в себе всюду плотное открытое множество P, которое локально является либо кэлеровым f-продолжением некоторой кэлеровой метрики g_M постоянной голоморфной кривизны на M, либо прямым произведением некоторой кэлеровой кривой на (M, g_M).*

Доказательство. На основании теоремы 4.5 π локально является конформной субмерсией с вертикальным показателем конформности f относительно метрики g_M постоянной голоморфной кривизны на M. Пусть Φ_M кэлерова форма, ассоциированная с этой метрикой. Применим лемму 4.2 и рассмотрим в E подмножество N, в точках которого 1-форма ω из равенства (4.6) – невырожденная. N – открытое множество. Так как следствие 4.15, а) означает постоянство модуля градиента f вдоль слоев f =const, то функция f является римановой субмерсией в некоторой окрестности каждой точки из N. На основании леммы 4.16 для сужения на N субмерсии π на кэлерово многообразие M, оснащенное метрикой g_M, выполнены все условия применимости теоремы 3.18. Из этой теоремы следует, что кэлерово многообразие N локально является кэлеровым f-продолжением и π служит субмерсией этого продолжения. Обозначим через O множество точек из E, в некоторой окрестности которых 1-форма ω из леммы 4.2 вырождается в тождественно нулевую. По лемме 4.9, сужение субмерсии π на O является плоской субмерсией, а следовательно, из предложения 2.1, в точках из O многообразие является локально приводимым, а π служит римановой субмерсией на сомножитель (M, g_M). ■

Следствие 4.18. *В предположениях теоремы 4.17 на кэлеровом многообразии N, открытом множестве из E, имеется гиперслоение $\mathcal{L}$ из внешних квазисфер, которые являются родовыми подмногообразиями, допускающими почти контактную метрическую структуру относительно индуцированной метрики постоянной φ-секционной кривизны, а во внутренности O дополнения к N имеется слоение из кэлеровых подмногообразий постоянной голоморфной кривизны.*

Доказательство. На основании леммы 4.2 форма ω определяет на N распределение коразмерности 1. На основании леммы 4.4 это распределение вполне интегрируемое, и пусть $\mathcal{L}$ – это ассоциированное с ним гиперслоение. Теперь становится очевидным, что утверждение следствия является комбинацией предыдущей теоремы, предложения 3.6 и следствия 3.10. ■

В заключение следует отметить, что в работе не затронут вопрос существования глобального кэлерова аналога скрещенного произведения. В свете выше сказанного на этот вопрос имеется немедленный ответ в случае, когда кэлеров потенциал F является глобально определенным и построение кэлерова f-продолжения возможно над всей базой M в целом.

Список литературы

[1] *А. Бессе*, Многообразия Эйнштейна. Т 2. Мир, Москва (1990), 384 с.

[2] *Н.Г. Камышанский, А.С. Солодовников*, Полуприводимые аналитические пространства "в целом". — Успехи мат. наук (1980), т. 35, № 5, с. 3–51.

[3] *С.И. Окрут*, Римановы многообразия с обобщенной аксиомой плоскостей. — Укр. геометр. сб. (1992), вып. 35, с. 103–110.

[4] *A. Gray*, Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions. — Math. Mech. (1967), v. 16, No. 7, p. 715–737.

[5] *А. Бессе*, Многообразия Эйнштейна. Т 1. Мир, Москва (1990), 318 с.

[6] *Ш. Кобаяси, К. Номидзу*, Основы дифференциальной геометрии. Т 1. Наука, Москва (1981), 344 с.

[7] *Ш. Кобаяси*, Группы преобразований в дифференциальной геометрии. Наука, Москва (1986), 244 с.

[8] *B.-Y. Chen*, Geometry of submanifolds. Marcel Dekker, New York (1973), 267 p.

[9] *И.А. Схоутен, Д.Я. Стройк*, Введение в новые методы дифференциальной геометрии. Т 2. Изд-во иностр. лит., Москва (1948), 289 с.

[10] *Ш. Кобаяси, К. Номидзу*, Основы дифференциальной геометрии. Т 2. Наука, Москва (1981), 416 с.

[11] *К. Яно, М. Кон*, CR-подмногообразия в келеровом и сасакиевом многообразиях. Мир, Москва (1990), 192 с.

[12] *K. Yano, I. Mogi*, On real representations of Kaehlerian manifolds. — Ann. Math. (1955), v. 61, p. 170–189.

[13] *J. Eells, J.M. Sampson*, Harmonic mappings of Riemannian manifolds. — Am. J. Math. (1964), v. 64, p. 109–160.

[14] *Б.В. Шабат*, Введение в комплексный анализ. Наука, Москва (1985), 464 с.

[15] *Ph. Tonder*, Foliations on Riemannien manifolds. Marcel Dekker, New York (1973), 267 p.

Warped product in kählerian geometry

S.I. Okrut

A contruction for the kählerian manifolds similar to the warped product of the riemannian manifolds is proposed. The kählerian analog has the properties similar to the warped product: a complex inverse geodesication, a parametrization by one variable function with fixed factors, fibers of pair transverse foliates, a conformal totally geodesic one and a foliate of generic external quasispheres. The proposed kählerian f-continuation construction is the extension of the complex space form set.

Схрещений здобуток у келеровій геометрії

С.І. Окрут

Для келерових многовидів пропонується конструкція, яка аналогічна схрещеному здобутку риманових многовидів. Келеров аналог має властивості, що подібні схрешеному здобутку: комплексну зворотню геодезичність, параметризуємість функцією однієї зміни при фіксованих співмножниках. Келеров аналог розшаровується на пару трансверсальних розшарувань, конформного цілком геодезичного та розшарування з родових зовнішних квазисфер. Запропонована конструкція, келерово f-продовження, є поширенням класу комплексних просторових форм.