Математическая физика, анализ, геометрия
1997, т. 4, № 3, с. 334–338

Устойчивость решения изодиаметральной задачи в геометрии Минковского

В.И. Дискант

Черкасский инженерно-технологический институт,
Украина, 257006, г. Черкассы, бульв. Шевченко, 460

Статья поступила в редакцию 23 февраля 1994 года

Доказана теорема: если $(D_B(X)/2)^n - V_B(X)/V_B(B_1) \le \varepsilon$, $0 \le \varepsilon$, $V_B(X) = V_B(B_1)$, то $\delta_B(X, B_1) \le 2\varepsilon^{1/n}$, где X – выпуклое тело в n-мерном пространстве Минковского $\tilde{M}^n$, B – нормирующее тело $\tilde{M}^n$, $B_1 = B \cap (-B)$, $D_B(X)$ – диаметр X, $V_B(X)$ – объем X, $\delta_B(X, B_1)$ – отклонение тел X и B_1 в $\tilde{M}^n$.

Пусть $\tilde{M}^n$ $(n \ge 2)$ – n-мерное пространство, наделенное геометрией Минковского, B – нормирующее тело $\tilde{M}^n$, $\mathbf{o}$ – внутренняя точка тела B такая, что пара $(B, \mathbf{o})$ определяет метрику Минковского ρ_B в $\tilde{M}^n$ [1]. Отметим, что точка $\mathbf{o}$, вообще говоря, не является центром симметрии тела B и потому метрика ρ_B не обладает свойством симметрии.

В настоящей работе изодиаметральная задача и устойчивость ее решения в $\tilde{M}^n$ будут рассмотрены в классе выпуклых тел пространства $\tilde{M}^n$. При этом под выпуклым телом в $\tilde{M}^n$ будем понимать выпуклый компакт $\tilde{M}^n$, под собственным телом $\tilde{M}^n$ – тело, имеющее внутренние точки.

Изодиаметральное неравенство в $\tilde{M}^n$ имеет вид

$$\Gamma_B(A) = \left(\frac{D_B(A)}{2}\right)^n - \frac{V_B(A)}{V_B(B_1)} \ge 0\,, \qquad (1)$$

в котором A – компактное тело пространства $\tilde{M}^n$, $D_B(A)$ – диаметр тела A в $\tilde{M}^n$, $V_B(A)$, $V_B(B_1)$ – объемы тел A и B_1 в $\tilde{M}^n$, $B_1 = (-B) \cap B$, где $(-B)$ – тело, симметричное телу B относительно $\mathbf{o}$ в $\tilde{M}^n$ [2]. Как показано в [2], равенство в (1) для собственного компактного тела A в $\tilde{M}^n$ имеет место тогда и только тогда, когда A положительно гомотетично телу B_1.

Изодиаметральная задача в классе выпуклых тел пространства $\tilde{M}^n$ состоит в следующем: среди выпуклых тел $\tilde{M}^n$, имеющих заданный диаметр

$D_0 > 0$, определить те тела, которые имеют наибольший объем. Изодиаметральная задача эквивалентна задаче: среди выпуклых тел $\tilde{M}^n$, имеющих заданный объем $V_0 > 0$, определить те тела, которые имеют наименьший диаметр. Решение этой задачи равносильно решению уравнения $\Gamma_B(X) = 0$ при $V_B(X) = V_0 > 0$, где X – выпуклое тело в $\tilde{M}^n$. Как следует из условия равенства в (1), решение уравнения $\Gamma_B(X) = 0$ при $V_B(X) = V_0 > 0$ существует и единственно. Им является тело B_0, положительно гомотетичное телу B_1, для которого $V_B(B_0) = V_0$. Это решение является и решением изодиаметральной задачи в $\tilde{M}^n$. В случае, если $V_0 = V_B(B_1)$, решением изодиаметральной задачи является тело B_1, которое, как и тело B, является собственным и выпуклым.

Единственность решения изодиаметральной задачи в $\tilde{M}^n$, т.е. единственность решения уравнения $\Gamma_B(X) = 0$ при $V_B(X) = V_B(B_1)$ в виде $X = B_1$, порождает вопрос об устойчивости этого решения в классе выпуклых тел $\tilde{M}^n$.

Для формулировки и доказательства теоремы устойчивости решения изодиаметральной задачи в $\tilde{M}^n$ введем понятия расстояния между выпуклыми телами и отклонения выпуклых тел в $\tilde{M}^n$.

Под расстоянием $\rho_B(A_1, A_2)$ между выпуклыми телами A_1 и A_2 в $\tilde{M}^n$ $(n \geq 1)$ будем понимать величину, определяемую равенством

$$\begin{aligned}\rho_B(A_1, A_2) \quad := \quad & \max\{ \sup_{a_1 \in A_1} \inf_{a_2 \in A_2} (\max(\rho_B(a_1, a_2), \rho_B(a_2, a_1))), \\ & \sup_{a_2 \in A_2} \inf_{a_1 \in A_1} (\max(\rho_B(a_1, a_2), \rho_B(a_2, a_1)))\}\,,\end{aligned}$$

где $\rho_B(a_1, a_2)$ – расстояние между точками a_1 и a_2 в $\tilde{M}^n$, а $\rho_B(a_2, a_1)$ – расстояние между точками a_2 и a_1 в $\tilde{M}^n$.

Под отклонением $\delta_B(A_1, A_2)$ выпуклых тел A_1 и A_2 в $\tilde{M}^n$ $(n \geq 1)$ будем понимать величину, определяеую равенством

$$\delta_B(A_1, A_2) := \inf_{\tilde{A}_2 \in \{A_2\}} \rho_B(A_1, \tilde{A}_2)\,,$$

где $\{A_2\}$ – множество выпуклых тел, которые получаются из A_2 параллельным переносом в $\tilde{M}^n$.

Содержание данной работы составляет следующая теорема устойчивости решения изодиаметральной задачи в классе выпуклых тел пространства $\tilde{M}^n$.

Теорема. *Если для выпуклого тела X в $\tilde{M}^n$ $(n \geq 2)$ с метрикой Минковского ρ_B выполняются условия*

$$\left(\frac{D_B(X)}{2}\right)^n - \frac{V_B(X)}{V_B(B_1)} \leq \varepsilon, \quad 0 \leq \varepsilon, \quad V_B(X) = V_B(B_1)\,,$$

то
$$\delta_B(X, B_1) \le 2\varepsilon^{1/n}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Предварительно заметим, что для точек x_1, $x_2 \in \tilde{M}^n$, как показано в [1], имеет место равенство
$$\rho_{B_1}(x_1, x_2) = \max(\rho_B(x_1, x_2), \rho_B(x_2, x_1)),$$
где ρ_{B_1} – метрика Минковского, определяемая парой $(B_1, \mathbf{o})$. Отсюда следует, что $D_B(A) = D_{B_1}(A)$, $\rho_B(A_1, A_2) = \rho_{B_1}(A_1, A_2)$, $\delta_B(A_1, A_2) = \delta_{B_1}(A_1, A_2)$ для выпуклых тел в A, A_1, A_2 в $\tilde{M}^n$.

В [1] было доказано следующее уточнение изодиаметрального неравенства (1) в $\tilde{M}^n$:
$$\left(\frac{D_B(A)}{2}\right)^n - \frac{V_B(A)}{V_B(B_1)} \ge \left(\frac{D_B(A)}{2} - q(A, B_1)\right)^n,$$
в котором A – выпуклое тело в $\tilde{M}^n$, $q(A, B_1)$ – коэффициент вместимости тела B_1 в тело A. Заменяя в этом неравенстве тело A на тело X, получим
$$\left(\frac{D_B(X)}{2}\right)^n - \frac{V_B(X)}{V_B(B_1)} \ge \left(\frac{D_B(X)}{2} - q(X, B_1)\right)^n.$$
Отсюда и из условий теоремы имеем
$$\left(\frac{D_B(X)}{2} - q(X, B_1)\right)^n \le \varepsilon \;\Rightarrow\; D_B(X) - 2q(X, B_1) \le 2\varepsilon^{1/n}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\mathbf{o}$ – начало координат в $\tilde{M}^n$.

Из определения $q(X, B_1)$, не умаляя общности, можем считать, что
$$q(X, B_1)B_1 \subset X.$$
Из этого включения следует, что
$$D_{B_1}(X) - 2q(X, B_1) \ge 0.$$
Так как $D_B(X) = D_{B_1}(X)$, то и $D_B(X) - 2q(X, B_1) \ge 0$. Следовательно,
$$0 \le D_B(X) - 2q(X, B_1) \le 2\varepsilon^{1/n}. \tag{2}$$
По условию теоремы $V_B(X) = V_B(B_1)$. Поэтому из включения $q(X, B_1)B_1 \subset X$ вытекает, что $q(X, B_1) \le 1$. Отсюда следует, что
$$q(X, B_1)B_1 \subset B_1.$$

Покажем теперь, что

$$X \subset (D_{B_1}(X) - q(X, B_1))B_1 \,. \tag{3}$$

Предположим противное, т.е. предположим, что найдется точка $x \in X$ такая, что $x \bar{\in} (D_{B_1}(X) - q(X, B_1))B_1$. Из (2) следует, что $D_{B_1}(X) - q(X, B_1) \geq q(X, B_1)$. Отсюда вытекает справедливость включения

$$q(X, B_1)B_1 \subset (D_{B_1}(X) - q(X, B_1))B_1 \,.$$

Тогда луч l, выходящий из точки x и проходящий через начало координат $\mathbf{o}$, пересекает границу тела $q(X, B_1)B_1$ в точках $q(X, B_1)\bar{b}_1$ и $-q(X, B_1)\bar{b}_1$, а границу тела $(D_{B_1}(X) - q(X, B_1))B_1$ в точках $(D_{B_1}(X) - q(X, B_1))\bar{b}_1$ и $-(D_{B_1}(X) - q(X, B_1))\bar{b}_1$, где $\bar{b}_1$ – точка границы тела B_1 такая, что векторы $\overline{ob_1}$ и $\overline{ox}$ имеют одинаковые направления. Из предположений $\bar{x} \in X$, $\bar{x} \bar{\in} (D_{B_1}(X) - q(X, B_1))B_1$ и включения $q(X, B_1))B_1 \subset X$ следует, что для отрезков $[(D_{B_1}(X) - q(X, B_1))\bar{b}_1, -q(X, B_1)\bar{b}_1]$ и $[\bar{x}, -q(X, B_1)\bar{b}_1]$ справедливы включения

$$[(D_{B_1}(X) - q(X, B_1))\bar{b}_1, -q(X, B_1)\bar{b}_1] \subset [\bar{x}, -q(X, B_1)\bar{b}_1] \subset X \,. \tag{4}$$

При этом левые концы этих отрезков не совпадают. Так как длина отрезка $[(D_{B_1}(X) - q(X, B_1))\bar{b}_1, -q(X, B_1))\bar{b}_1]$ в метрике ρ_{B_1} равна $D_{B_1}(X)$, то из левого включения в (4) имеем

$$\rho_{B_1}(\bar{x}, -q(X, B_1)\bar{b}_1) > \rho_{B_1}((D_{B_1}(X) - q(X, B_1))\bar{b}_1, -q(X, B_1)\bar{b}_1) = D_{B_1}(X) \,.$$

Из правого включения в (4) видим, что последнее неравенство противоречит определению величины $D_{B_1}(X)$, тем самым (3) доказано.

Из (3) и условия теоремы $V_B(X) = V_B(B_1)$ следует, что

$$D_{B_1}(X) - q(X, B_1) \geq 1 \,.$$

Поэтому

$$B_1 \subset (D_{B_1}(X) - q(X, B_1))B_1 \,.$$

В результате получаем следующие две цепочки включений:

$$G_1 = q(X, B_1)B_1 \subset X \subset (D_{B_1}(X) - q(X, B_1))B_1 = G_2 \,,$$

$$G_1 = q(X, B_1)B_1 \subset B_1 \subset (D_{B_1}(X) - q(X, B_1))B_1 = G_2 \,.$$

Тогда

$$\delta_{B_1}(X, B_1) \leq \rho_{B_1}(X, B_1) \leq \rho_{B_1}(G_1, G_2) = \sup_{\bar{g}_2 \in G_2} \inf_{\bar{g}_1 \in G_1} \rho_{B_1}(\bar{g}_1, \bar{g}_2) \,.$$

Рассмотрим случай $G_1 \neq G_2$. Случай $G_1 = G_2$ не представляет интереса. Если $\bar{g}_2 \in G_1$, то $\inf\limits_{\bar{g}_1 \in G_1} \rho_{B_1}(\bar{g}_1, \bar{g}_2) = 0$. Если же $\bar{g}_2 \bar{\in} G_1$, то $\bar{g}_2 = p\bar{b}_1$, где $\bar{b}_1$ – точка на границе тела B_1 и $p \geq q(X, B_1)$. В этом случае

$$\inf_{\bar{g}_1 \in G_1} \rho_{B_1}(\bar{g}_1, \bar{g}_2) \leq \rho_{B_1}(q(X, B_1)\bar{b}_1, p\bar{b}_1) = p - q(X, B_1)\,.$$

Тогда, пользуясь определением G_2, получим

$$\begin{aligned} \rho_{B_1}(G_1, G_2) &= \sup_{\bar{g}_2 \in G_2} \inf_{\bar{g}_1 \in G_1} \rho_{B_1}(\bar{g}_1, \bar{g}_2) \\ &\leq \sup_{p\bar{b}_1 \in G_2} (p - q(X, B_1)) = D_{B_1}(X) - 2q(X, B_1)\,. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\delta_B(X, B_1) = \delta_{B_1}(X, B_1) \leq D_{B_1}(X) - 2q(X, B_1) \leq 2\varepsilon^{1/n}\,.$$

Список литературы

[1] *В.И. Дискант*, Уточнения изодиаметрального неравенства в геометрии Минковского. — Мат. физ., анализ, геом. (1994), т. 1, № 2, с. 216.

[2] *W. Barthell und H. Pabel*, Das isodiametrischen Problem der Minkowski-Geometrie. — Result. Math. (1987), Bd. 12, No. 3/4, S. 252–267.

Stability of isodiametric problem solution in the Minkowski geometry

V.I. Diskant

The theorem is proved: if $(D_B(X)/2)^n - V_B(X)/V_B(B_1) \leq \varepsilon$, $0 \leq \varepsilon$, $V_B(X) = V_B(B_1)$, then $\delta_B(X, B_1) \leq 2\varepsilon^{1/n}$, where X – convex body in n-dimensional space of Minkowski $\tilde{M}^n$, B – normed body $\tilde{M}^n$, $B_1 = B \cap (-B)$, $D_B(X)$ – diameter X, $V_B(X)$ – volume X, $\delta_B(X, B_1)$ – deflection of bodies X and B_1 in $\tilde{M}^n$.

Стійкість розв'язання ізодіаметральної задачі в геометрії Мінковського

В.І. Діскант

Доведено теорему: якщо $(D_B(X)/2)^n - V_B(X)/V_B(B_1) \leq \varepsilon$, $0 \leq \varepsilon$, $V_B(X) = V_B(B_1)$, то $\delta_B(X, B_1) \leq 2\varepsilon^{1/n}$, де X – опукле тіло в n-вимірному просторі Мінковського $\tilde{M}^n$, B – нормуюче тіло $\tilde{M}^n$, $B_1 = B \cap (-B)$, $D_B(X)$ – діаметр X, $V_B(X)$ – об'єм X, $\delta_B(X, B_1)$ – відхилення тіл X і B_1 в $\tilde{M}^n$.