

Течение вязкой несжимаемой жидкости с распределенными источниками массы по бесконечно длинным каналам с проницаемыми стенками

И.Е. Тарапов

*Харьковский государственный университет,
Украина, 310077, г. Харьков, п.л. Свободы, 4*

Статья поступила в редакцию 5 июня 1996 года

Рассмотрен ряд случаев течения несжимаемой вязкой жидкости с непрерывным распределением источников массы по каналам с отсосом или вдувом через проницаемые стенки. Даны точные решения для течений между параллельными пластинами и двумя соосными цилиндрами, либо движущимися вдоль осей, либо вращающимися для разных случаев вдува и отсоса через границы.

Основная система уравнений движения среды с непрерывно распределенными источниками массы, импульса и энергии исследовалась в [1]. Как одно из практических применений этой системы здесь рассмотрено течение несжимаемой вязкой жидкости с внутренними источниками массы по бесконечным каналам с проницаемыми стенками, через которые может вдуваться или отсасываться среда, т.е. когда, следовательно, имеется возможность влиять на баланс масс внутри канала.

Что касается различных случаев течения вязких сред у проницаемых границ, то уже первые исследования (по-видимому, это [2, 3]) стимулировали целый ряд работ как по течениям в каналах с проницаемыми стенками, так и в пограничном слое с отсосом или вдувом. Обзор этих работ и подробная библиография приведены в монографии [4].

В задачах, рассмотренных в настоящей статье, помимо обобщения на случай распределенных источников массы и косоуго вдува (отсоса) через стенки канала, получены более общие решения, не связанные с автомодельностью, для разных случаев течения в каналах. При этом, однако, всюду предполагается, что ни распределение источников, ни вдув (отсос) среды не меняются вдоль канала.

Будем исходить из следующей основной системы уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости с непрерывно распределенными источниками массы, которая записана в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= Qq(\xi^1, \xi^2), \\ [Qq\vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{v}] Re &= \left(Pp - \frac{1}{3}Qq \right) + \Delta \vec{v}, \\ \vec{v} \Big|_{S_0} &= \vec{v}_0; \quad \vec{v} \Big|_{S_1} = \vec{v}_1; \quad \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=0} = p_{01} = \text{const}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $Q = q_0 L (\rho v^0)^{-1}$; $P = p_0 L (\mu v^0)^{-1}$, $Re = \rho v^0 L \mu^{-1}$ — безразмерные параметры (Re — число Рейнольдса), составленные из плотности ρ и вязкости μ среды, масштаб: длины L , скорости v^0 , интенсивности q_0 источников массы и давления p_0 ; S_0, S_1 — контуры стенок канала в его поперечном сечении, ограничивающие плоскую область σ поперечного сечения канала, где движется жидкость; \vec{v}_0, \vec{v}_1 — скорости среды на стенках канала; ξ^1, ξ^2 — координаты в плоскости поперечного сечения, а x — безразмерная координата вдоль оси канала. Предполагается, что распределенный непрерывно импульс либо равен нулю, либо имеет потенциал, который включен в p .

Если исключить из рассмотрения начальный участок достаточно длинного канала, то можно указать точное решение задачи (1) вида

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \left[u_0(\xi^1, \xi^2) + x u_1(\xi^1, \xi^2) \right] \vec{i}_x + \vec{w}(\xi^1, \xi^2), \\ Pp &= \text{const} + p_{01}x + p_{02} \frac{x^2}{2} + p_1(\xi^1, \xi^2), \end{aligned} \quad (2)$$

где постоянная p_{02} , функции u_0, u_1, p_1 и лежащий в плоскости поперечного сечения вектор $\vec{w}(\xi^1, \xi^2)$ определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{w} &= u_1 + Qq, \\ [u_0(u_1 + Qq) + \vec{w} \cdot \vec{u}_0] Re &= p_{01} + \Delta u_0, \\ [Qq u_1 + u_1^2 + \vec{w} \cdot \vec{u}_1] Re &= p_{02} + \Delta u_1, \\ [Qq \vec{w} + (\vec{w} \cdot \vec{w})] Re &= \left(p_1 - \frac{1}{3}Qq \right) + \Delta \vec{w}. \end{aligned} \quad (3)$$

При этом вектор \vec{w} , как следует из последнего уравнения (3), должен удовлетворять условию

$$Q \operatorname{rot}(q\vec{w}) - Re \operatorname{rot}[\vec{w}, \operatorname{rot} \vec{w}] = \Delta \operatorname{rot} \vec{w}. \quad (4)$$

В дальнейшем мы ограничимся случаем потенциального вектора \vec{w} , параллельного q , так что условие (4) будем считать выполненным. Здесь операторы относятся к плоскости поперечного сечения, где выбрана система координат (ξ^1, ξ^2) , s — дуга на контурах S_0 и S_1 , а граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} u_0 \Big|_{S_0} &= v_{0x}; \quad u_0 \Big|_{S_1} = v_{1x}; \quad u_1 \Big|_{S_0} = u_1 \Big|_{S_1} = 0; \\ \vec{w} \cdot \vec{n} \Big|_{S_0} &= \alpha_0(s); \quad \vec{w} \cdot \vec{n} \Big|_{S_1} = \alpha_1(s); \quad w_\tau \Big|_{S_0} = v_{0\tau}; \quad w_\tau \Big|_{S_1} = v_\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

Кроме того, из уравнения непрерывности, проинтегрированного по области σ , следует связь между скоростями вдува (отсоса) по нормали к контуру $\alpha_0(s)$, $\alpha_1(s)$ и q , а именно

$$\int_{S_0} \alpha_0(s) ds - \int_{S_1} \alpha_1(s) ds = \int_{\sigma} (u_1 - Qq) d\sigma. \quad (6)$$

Постоянные v_{0x} , v_{1x} отличны от нуля при относительном движении стенок канала вдоль его оси x , а $v_{0\tau}$, $v_{1\tau}$ — при их относительном движении в плоскости поперечного сечения, в частности при вращении вокруг оси канала. Функции $q(\xi^1, \xi^2)$, $\alpha_0(s)$, $\alpha_1(s)$, постоянная p_0 считаются заданными.

Решение, подобное (3), рассмотрено в [3] для случая $q = 0$.

В вышеприведенной постановке задачи нетрудно проанализировать случай косоугольного вдува (отсоса), т.е. когда на неподвижных стенках канала заданы скорости вдува (отсоса), которые имеют как нормальные $\alpha_0(s)$, $\alpha_1(s)$, так и касательные компоненты, сориентированные по оси канала, в виде $\beta_0(s) + x\gamma_0(s)$, $\beta_1(s) + x\gamma_1(s)$. Для этого случая граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} u_0 \Big|_{S_0} &= \beta_0; \quad u_0 \Big|_{S_1} = \beta_1; \quad u_0 \Big|_{S_0} = \gamma_0; \\ u_1 \Big|_{S_1} &= \gamma_1; \quad \vec{w} \cdot \vec{n} \Big|_{S_0} = \alpha_0; \quad \vec{w} \cdot \vec{n} \Big|_{S_1} = \alpha_1. \end{aligned}$$

В нашем рассмотрении ключевым является следующее нелинейное дифференциальное уравнение 3-го порядка, которое получается из третьего уравнения системы (3) подстановкой в него u_1 из первого:

$$\begin{aligned} \Delta \operatorname{div} \vec{w} &= p_{02} + \operatorname{Re} \left\{ \vec{w} \cdot \operatorname{div} \vec{w} - (\operatorname{div} \vec{w})^2 + 3Qq \operatorname{div} \vec{w} \right. \\ &\quad \left. - Q\vec{w} \cdot q - 2(Qq)^2 \right\} + Q\Delta q. \end{aligned} \quad (7)$$

Четыре граничных условия (для u_1 и \vec{w}) позволяют, проинтегрировав уравнение (7), определить необходимое решение и постоянную p_{02} . По полученному $\vec{w}(\xi^1, \xi^2)$ (и, следовательно, $u_1(\xi^1, \xi^2)$) функции $u_0(\xi^1, \xi^2)$ и $p_1(\xi^1, \xi^2)$ определяются из второго и четвертого уравнений системы (3).

В общем случае, как видно из решения (2), возможный дисбаланс масс канала из-за несогласованности проницаемости стенок и мощности источников массы компенсируется продольным потоком, возрастающим (убывающим) вдоль оси канала по линейному закону, что позволяет сохранить неизменным расстояние между стенками. В случае, когда механизм вдува (отсоса) ориентирован под углом к нормали на стенках канала, так что $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = 0$, то даже при отсутствии внутренних источников массы ($Q = 0$) можно создать продольный поток жидкости, возрастающий (убывающий) по длине канала.

Практический интерес представляет частный случай решения системы (3), когда удастся сохранить неизменной вдоль канала продольную скорость потока за счет согласования проницаемостей стенок с мощностью внутренних источников массы. Этот частный случай точного решения в дальнейшем будем называть "случаем продува", и для него в (3) надо положить $u_1 = p_{02} = 0$. Таким образом, для случая продува имеем из (3) и (7)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{w} &= Qq; \quad \operatorname{div} (u_0 \operatorname{Re}(u_0 \vec{w})) = p_{01}; \\ \left(p_1 - \frac{1}{3} Qq \right) &= \Delta \vec{w} - [Qq \vec{w} + (\vec{w} \cdot \vec{w}) \operatorname{Re}]; \\ Q \int_{\sigma} q d\sigma &= \int_{S_1} \alpha_1(s) ds - \int_{S_0} \alpha_0(s) ds. \end{aligned} \quad (8)$$

Этот частный случай весьма часто допускает интегрирование в конечном виде и поэтому может быть аналитически исследован. Несмотря на то, что здесь вдуваемая масса среды не остается в основном продольном потоке, последний, как оказывается, претерпевает существенные изменения. Так, появляются его зависимость от числа Re , а также возможность уменьшить силу трения на стенке, через которую поперечный поток поступает в канал, и увеличить – на стенке, откуда поток уносится.

Общий случай точного решения поставленной задачи, который сводится, как это следует из (7) и (3), к интегрированию нелинейного уравнения третьего порядка и двух линейных уравнений, а также случай продува иллюстрируются ниже на ряде конкретных примеров.

1. Течение между параллельными проницаемыми пластинами

Пусть между двумя проницаемыми бесконечными пластинами $y = 0$ и $y = L$, верхняя из которых имеет скорость $\beta_1 v^0$ и на которой задана по-

перечная скорость вдува (отсоса) $\alpha_1 = const$, а нижняя движется со скоростью $\beta_0 v^0$ и имеет скорость вдува (отсоса) $\alpha_0 = const$, находится вязкая несжимаемая жидкость с непрерывно распределенными источниками массы интенсивности $q = q(y)$.

Тогда имеем из (3), (5)–(7)

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{i}_y w(y); \quad div \vec{w} = w = u_1 + Qq(y); \\ u_0 &= p_{01} + Re[wu_0 + u_0(2Qq - w)]; \\ p_1 &= \frac{1}{3}Qq + w - Re[ww + Qqw]; \end{aligned} \quad (9)$$

$$w = p_{02} + Re(w^2 + 3Qqw - Qqw - 2Q^2q^2) + Qq; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} u_0 \Big|_{y=0} &= \beta_0; \quad u_0 \Big|_{y=1} = \beta_1; \quad u_1 \Big|_{y=1} = u_1 \Big|_{y=0} = 0; \\ w \Big|_{y=0} &= \alpha_0; \quad w \Big|_{y=1} = \alpha_1; \quad w \Big|_{y=0} = Qq(0); \quad w \Big|_{y=1} = Qq(1); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\alpha_1 - \alpha_0 = Q \int_0^1 q(y) dy - \int_0^1 u_1(y) dy. \quad (12)$$

Уравнение (10) может быть численно проинтегрировано для каждого случая задания $q(y)$, и при четырех граничных условиях (11) определены функция $w(y)$ и постоянная p_{02} .

При $Re \ll 1$, разлагая решение в ряд по степеням Re , получаем, например, нулевое приближение решения в виде

$$w^{(0)} = \alpha_0 + \left(\alpha_1 - \alpha_0 - Q \int_0^1 q(y) dy \right) y^2 (3 - 2y) + Q \int_0^y q(\xi) d\xi;$$

$$u_0^{(0)} = \frac{1}{2} p_{01} y(y - 1) + \beta_0 + (\beta_1 - \beta_0)y; \quad u_1 = \frac{1}{2} p_{02}^{(0)} y(y - 1);$$

$$p_{02}^{(0)} = 12 \left(\alpha_1 - \alpha_0 - Q \int_0^1 q dy \right);$$

$$p_1^{(0)}(y) = p_1^{(0)}(0) - p_{02}^{(0)} y + Q(q(y) - q(0)) + \frac{1}{3} Q \int_0^y q(\xi) d\xi.$$

Для режима продува ($u_1 = p_{02} = 0$) имеем точное решение (9)–(11) в виде

$$w(y) = \alpha_0 + Q \int_0^y q(\xi) d\xi; \quad \alpha_1 \quad \alpha_0 = Q \int_0^1 q(y) dy;$$

$$u_0(y) = \frac{e^{Re \varphi(y)}}{F_1(1)} \left\{ \beta_0 \int_y^1 e^{-Re \varphi(\xi)} d\xi + \beta_1 e^{-Re \varphi(1)} F_1(y) \right. \\ \left. p_{01} [F_2(1) F_1(y) - F_2(y) F_1(1)] \right\},$$

где

$$\varphi(y) = \alpha_0 y + Q \int_0^y dy \int_0^y q(\xi) d\xi;$$

$$F_1(y) = \int_0^y e^{-Re \varphi(\xi)} d\xi; \quad F_2(y) = \int_0^y \xi e^{-Re \varphi(\xi)} d\xi.$$

Напряжение трения в потоке пропорционально функции $u_0(y)$, и, например, для случая $q = 0$ значение этой функции на стенках равно

$$u_0(0) = \frac{k(\beta_0 - \beta_1)}{1 - e^k} - \frac{p_{01}}{k} \left(1 + \frac{k}{1 - e^k} \right);$$

$$u_0(1) = \frac{k(\beta_0 - \beta_1) e^k}{1 - e^k} - \frac{p_{01}}{k} \left(1 + \frac{k e^k}{1 - e^k} \right),$$

где $k = Re \alpha_0 = Re \alpha_1$.

Отношение силы трения при продуве к силе трения в отсутствие продува на верхней (с оттоком) пластине (I) и нижней (II) в зависимости от притока жидкости представлено на рис. 1: куэттовское течение ($p_{01} = 0$) — пунктир, пуазейлевское течение ($\beta_0 = \beta_1 = 0$) — сплошные линии.

Таким образом, при продуве сила трения на пластине, через которую жидкость уносится из потока, возрастает, а на пластине, через которую вдувается в основной поток, экспоненциально убывает.

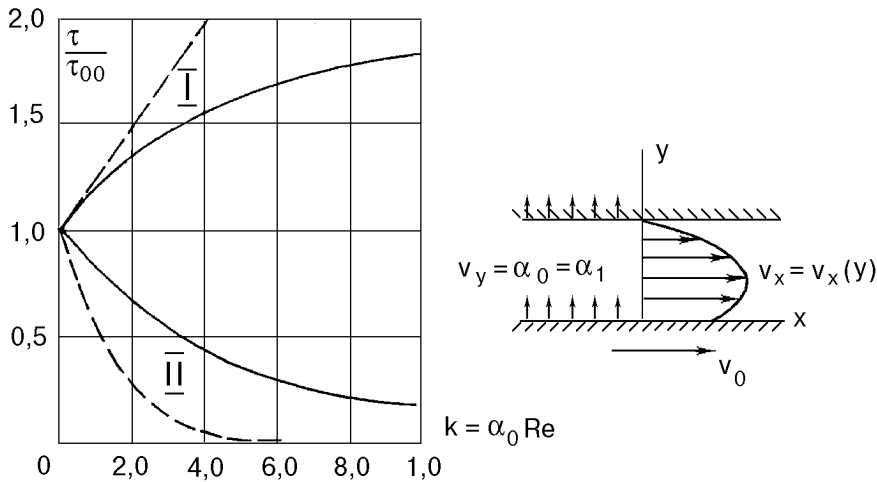


Рис. 1.

Косой вдув (отсос) на параллельных пластинах определяется граничными условиями

$$u_0(0) = \beta_0; u_0(1) = \beta_1; u_1(0) = \gamma_0; u_1(1) = \gamma_1;$$

$$w(0) = \alpha_0; w(1) = \alpha_1; w'(0) = \gamma_0 + Qq(0); w'(1) = \gamma_1 + Qq(1).$$

При $Q = 0$ из (9), (10) имеем

$$w = u_1; u_0 = p_{01} + Re [w u_0 - u_0 w];$$

$$p_1(y) = p_1(0) - u_1 + \gamma_0 - \frac{Re}{2} (w^2 - \alpha_0^2);$$

$$w = p_{02} + Re (w w' - w'^2),$$

причем $\alpha_1 - \alpha_0 = \int_0^1 u_1 dy$.

Если $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma$, то решением этой системы будут конечные выражения

$$w = \alpha_0 - \gamma y; p_{02} = \gamma^2 Re; p_1(y) = p_1(0) - \frac{Re}{2} (w^2 - \alpha_0^2);$$

$$u_0 = \frac{p_{01}}{\gamma Re} + C_1 \left(\frac{\alpha_0}{\gamma} - y \right) + C_2 \left\{ \exp \left[\frac{\gamma Re}{2} \left(\frac{\alpha_0}{\gamma} - y \right)^2 \right] + \gamma Re \left(\frac{\alpha_0}{\gamma} - y \right) \int \exp \left[\frac{\gamma Re}{2} \left(\frac{\alpha_0}{\gamma} - y \right)^2 \right] dy \right\},$$

где C_1 и C_2 определяются из граничных условий $u_0(0) = \beta_0$, $u_1(1) = \beta_1$, так что $u_0(y)$ в итоге можно записать через табулированный интеграл вероятности, а здесь окончательное выражение $u_0(y)$ не приведено из-за громоздкости.

2. Течение между соосными проницаемыми цилиндрами при относительном их движении вдоль осей

Будем искать решение системы (3) в полярных координатах (φ, r) , предполагая $q = q(r)$, в виде

$$\vec{v} = (u_0(r) + xu_1(r))\vec{i}_x + \vec{i}_r w(r);$$

$$Pp = \text{const} + p_{01}x + p_{02}\frac{x^2}{2} + p_1(r).$$

Тогда имеем уравнения

$$\begin{aligned} (wr) r^{-1} &= u_1(r) + Qq(r); \\ w + 2wr^{-1} - wr^{-2} + wr^{-3} &= p_{02} + Re \left[ww - w^2 - ww r^{-1} - 2w^2 r^{-2} + 3Qq(r)(w + wr^{-1}) - Qqwq - 2(Qq)^2 \right] + Q(q + qr^{-1}); \\ u_0 + u_0 r^{-1} &= p_{01} + Re \left\{ u_0 w r^{-1} + (u_0 w) \right\}; \\ p_1(r) &= \text{const} + w + wr^{-1} - \frac{Re}{2} w^2 - Q \int q(r)w(r)dr \end{aligned}$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} u_0(1) &= \beta_0; \quad u_0(\delta) = \beta_1; \quad w(1) = \alpha_1; \quad w(\delta) = \alpha_0; \\ w(1) &= \alpha_1 + Qq(1); \quad w(\delta) = \alpha_0 \delta^{-1} + Qq(\delta), \end{aligned}$$

где $\delta = R_0/R_1 < 1$, α_1, α_0 — проницаемости соответственно наружного цилиндра R_1 и внутреннего радиуса R_0 . Функция $q(r)$ и радиальные скорости на цилиндрах α_1, α_0 должны удовлетворять уравнению баланса масс

$$Q \int_{\delta}^1 q r dr = \int_{\delta}^1 u_1 r dr + \alpha_1 - \alpha_0 \delta.$$

Решение этой задачи в общем случае принципиально ничем не отличается от предыдущей. Поэтому приведем лишь конечный вид решения в случае продува для течения в кольцевом канале, а затем — для сплошной трубы ($\delta = 0$).

В случае продува в кольцевом канале имеем, полагая $u_1 = p_{02} = 0$,

$$w(r) = r^{-1} \left(\alpha_0 \delta + Q \int_{\delta}^r q r dr \right);$$

$$u_0(r) = \frac{e^{k\psi(r)}}{f_1(1)} \left\{ \beta_0 [f_1(1) - f_1(r)] + \beta_1 e^{-k\psi(1)} f_1(r) - \frac{p_{01}}{2} [f_1(r)f_2(1) - f_2(r)f_1(1)] \right\}, \quad (13)$$

где

$$f_1(r) = \int_{\delta}^r r^{-1} e^{-k\psi} dr; \quad f_2(r) = \int_{\delta}^r r e^{-k\psi} dr; \quad k = Re^{-\alpha_0 \delta};$$

$$\psi(r) = \ln \frac{r}{\delta} + \frac{Q}{\alpha_0 \delta} \int_{\delta}^r \frac{dr}{r} \int_{\delta}^r q(r) r dr.$$

Для случая $q = 0$ отсюда имеем

$$w(r) = \frac{\alpha_1}{r}; \quad \alpha_1 = \alpha_0 \delta;$$

$$u_0(r) = \beta_0 \frac{r^k - 1}{\delta^k - 1} + \beta_1 \frac{r^k - \delta^k}{1 - \delta^k} + \frac{p_{01}}{2(2-k)} \left[r^2 - 1 - \frac{\delta^2}{\delta^k - 1} (r^k - 1) \right]. \quad (14)$$

Отсюда, в частности при $\beta_0 = k = \alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$, имеем известное решение

$$w = 0; \quad u_0 = \frac{p_{01}}{4} \left[r^2 - 1 - (\delta^2 - 1) \frac{\ln r}{\ln \delta} \right] + \frac{\ln r}{\ln \delta}.$$

Рассматривая подобно тому, как это было сделано для случая параллельных пластинок, отношение силы трения при продуве

$$\tau = \frac{p_{01}}{2(2-k)} \left[2r - \frac{\delta^2 - 1}{\delta^k - 1} k r^{k-1} \right] + \frac{k r^{k-1}}{\delta^k - 1}$$

к силе трения в случае непроницаемых стенок

$$\tau_{00} = \frac{p_{01}}{4} \left[2r - \frac{\delta^2 - 1}{r \ln \delta} \right] + \frac{1}{r \ln \delta}$$

на обоих цилиндрах, получаем, что сила трения на внешнем (с оттоком) цилиндре увеличивается с ростом k , а на внутреннем (с притоком) — спадает. При изменении направления продува картина меняется, но всегда сила трения на цилиндре с притоком массы уменьшается.

Для сбалансированного по массе течения ($u_1 = p_{02} = 0$) в сплошной трубе с контуром поперечного сечения S можно в некоторых случаях получить решение в конечном виде. Для рассматриваемого течения из (3) и (6) имеем

$$\operatorname{div}(Re\vec{w}) = k_0 q(\xi^1, \xi^2); \quad \operatorname{div}(u_0 - u_0 Re\vec{w}) = p_{01};$$

$$\int_S \alpha dS = Q \int_{\sigma} q d\sigma, \quad (15)$$

где $k_0 = ReQ$, $\alpha = \alpha(s)$ – вдув (отсос) со стенок трубы с площадью поперечного сечения σ .

Выбирая $Re\vec{w} = F$, для потенциала F получаем внутреннюю задачу Неймана

$$\Delta F = k_0 q (\xi^1, \xi^2); \quad \left. \frac{\partial F}{\partial n} \right|_S = \alpha(s) Re, \quad (16)$$

где функция $\alpha(s)$ подчинена условию $\int_S \alpha dS = Q \int_{\sigma} q d\sigma$. Тогда решение u_0 может быть выражено через F из второго уравнения (15) следующим образом:

$$u_0 = e^F \int_{F_0}^F e^{-F} \Phi(F) dF, \quad (17)$$

где $F_0 = F|_S$, а функция $\Phi(F)$ удовлетворяет уравнению

$$div (\Phi(F) - F) = \Phi_F (F)^2 + \Phi k_0 q = p_{01}. \quad (18)$$

Найдя для заданных $q(\xi^1, \xi^2)$, $\alpha(s)$ решение задачи (16) и рассматривая коэффициенты линейного дифференциального уравнения (18) как функции F , можно получить частное решение (обращающееся в нуль при $p_{01} = 0$) уравнения (8) и, следовательно, функцию u_0 , что и дает решение задачи.

Так например, при $q = 1$ и $\int_S \alpha dS = Q\sigma$ имеем $\Phi = p_{01}/k_0$, и тогда $u_0 = p_{01} (e^{F - F_0} - 1) / k_0$, где F — решение задачи Неймана (16) для заданного контура, а F_0 — его значение на контуре.

Для $q = br^m$, $\alpha = \frac{Qb}{m+2} = const$ нетрудно получить решение для сплошной круглой трубы единичного радиуса. В этом случае из (16)–(18) имеем

$$F = a (r^{m+2} - 1);$$

$$\Phi = \frac{p_{01}}{2(m+2)} a^{-\frac{2}{m+2}} (a + F)^{\frac{2(m+1)}{m+2}}; \quad (a = k_0 b (m+2)^{-2}),$$

так что

$$u_0 = \frac{p_{01}}{2(m+2)} a^{-\frac{2}{m+2}} e^{ar^{m+2}} \left\{ \gamma \left(\frac{2}{m+2}, ar^{m+2} \right) - \gamma \left(\frac{2}{m+2}, a \right) \right\}, \quad (19)$$

где $\gamma(n, x) = \int_0^x e^{-t} t^{n-1} dt$ — неполная гамма-функция.

Отсюда при $q = 1$ имеем

$$u_0 = \frac{p_{01}}{k_0} \left[e^{\frac{k_0}{4}(1-r^2)} - 1 \right],$$

что при $k_0 = ReQ \rightarrow 0$ переходит в профиль Пуазейлевского течения по трубе.

Интересно, что наличие стоков (источников) массы вида $q = br^m$ и соответствующего для сбалансирования масс вдува (отсоса) среды из стенок круглой трубы не меняет трения на стенках, так что напряжение трения остается равным Пуазейлевскому ($p_{01}/2$).

3. Течение между двумя вращающимися соосными круглыми цилиндрами с проницаемыми стенками

Этот случай отличается от предыдущих тем, что нет осевого потока, так что

$$u_0 = u_1 = 0; \quad p_{01} = p_{02} = 0; \quad \vec{v} = \vec{w};$$

$$\text{rot} \vec{w} = \vec{i}_z \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_\varphi) = 0.$$

Отыскивая решение исходной системы (1) (в полярных координатах)

$$\vec{v} = \vec{i}_\varphi v_\varphi(r) + \vec{i}_r v_r(r); \quad p = p(r),$$

получаем систему уравнений

$$(rv_r) = Qq(r)r;$$

$$\left(Qqv_\varphi + v_r v_\varphi + v_r v_\varphi r^{-1} \right) Re = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_\varphi}{dr} \right) - v_\varphi r^{-2};$$

$$\left(Qqv_r + v_r v_r + v_\varphi^2 r^{-1} \right) Re = \left(Pp - \frac{1}{3} Qq \right) + v_r + v_r r^{-1} - v_r r^{-2} \quad (20)$$

и граничные условия

$$v_\varphi(1) = \omega_1; \quad v_\varphi(\delta) = \omega_0 \delta; \quad v_r(\delta) = \alpha_0; \quad v_r(1) = \alpha_1,$$

где $\omega_0 = \frac{\Omega_0}{\Omega_{00}}$; $\omega_1 = \frac{\Omega_1}{\Omega_{00}}$; $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_{00}$ — угловые скорости внутреннего, внешнего цилиндров и масштаб угловых скоростей, соответственно; $\delta = \frac{R_0}{R_1}$, α_0, α_1 — постоянные скорости вдува (отсоса) на стенках внутреннего и внешнего цилиндров.

Из уравнения неразрывности следует условие, связывающее q, α_0 и α_1 , а именно

$$\alpha_1 - \alpha_0 \delta = Q \int_\sigma^1 r q(r) dr.$$

При этом

$$v_r = \frac{Q}{r} \int_{\delta}^r q r dr + \frac{\alpha_0 \delta}{r}. \quad (21)$$

Для произвольного $q(r)$ надо решать численно систему (20), а при $Re = 1$, подобно тому, как это было сделано в первом примере, можно воспользоваться разложением по $(Re)^n$.

Для случая $q = 1$ существует решение (20) в конечном виде, а именно $v_r = \frac{Q}{2}(r - r^{-1}) + \alpha_1 r^{-1}$, причем $Q(1 - \delta^2) = 2(\alpha_1 - \alpha_0 \delta)$,

$$v_{\varphi} = \omega_0 r \left(\frac{r}{\delta}\right)^{k-\beta} \exp\left(\frac{\beta}{2}(r^2 - \delta^2)\right) \left(1 - A(r, \delta, \beta)\right) + A(r, \delta, \beta) \omega_1 r^{k-\beta+1} \exp\left\{\frac{\beta}{2}(r^2 - 1)\right\},$$

где

$$2\beta = QRe = q_0 R_1^2 \rho \mu^{-1}; \quad k = \alpha_1 Re;$$

$$A(r, \delta, \beta) = \left[\int_{\delta}^r e^{-\frac{\beta t^2}{2}} t^{\beta-k-3} dt \right] \left[\int_{\delta}^1 e^{-\frac{\beta t^2}{2}} t^{\beta-k-3} dt \right]^{-1} = \left[\Gamma\left(\gamma, \frac{\beta r^2}{2}\right) - \Gamma\left(\gamma, \frac{\beta \delta^2}{2}\right) \right] \left[\Gamma\left(\gamma, \frac{\beta}{2}\right) - \Gamma\left(\gamma, \frac{\beta \delta^2}{2}\right) \right]^{-1},$$

где

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

— неполная гамма-функция, при этом введено обозначение $\beta = k - 2 - 2\gamma$. Отсюда для $Q = 0$ получаем

$$v_r = \alpha_1 r^{-1}; \quad v_{\varphi} = \frac{1}{\delta^{k+2}} \left[(\delta^2 - \Omega) r^{k+1} + \frac{\Omega \delta^{k+2}}{r} \right];$$

$$Pp(r) = Pp(1) + \frac{\alpha_1^2}{2} (1 - r^{-2}) + \int_1^r v_{\varphi}^2 r^{-1} dr;$$

$$\Omega = \frac{\omega_1}{\omega_0}; \quad k = \alpha_1 Re = \alpha_1 \Omega_{00} R_1^2 \rho \mu^{-1}.$$

Для этого случая отношение сил трения при продуве и без него равно

$$\frac{\tau}{\tau_{00}} = \frac{1 - \delta^2}{2\delta^2(1 - \Omega)(1 - \delta^{k+2})} \left[k(\delta^2 - \Omega) r^{k+2} + 2\delta^2(1 - \Omega \delta^k) \right]. \quad (22)$$

Интересно, что при $\Omega = \delta^2$ трение при продуве совпадает в каждой точке потока с трением в случае непроницаемых цилиндров, которое всюду исчезает при $\Omega = 1$.

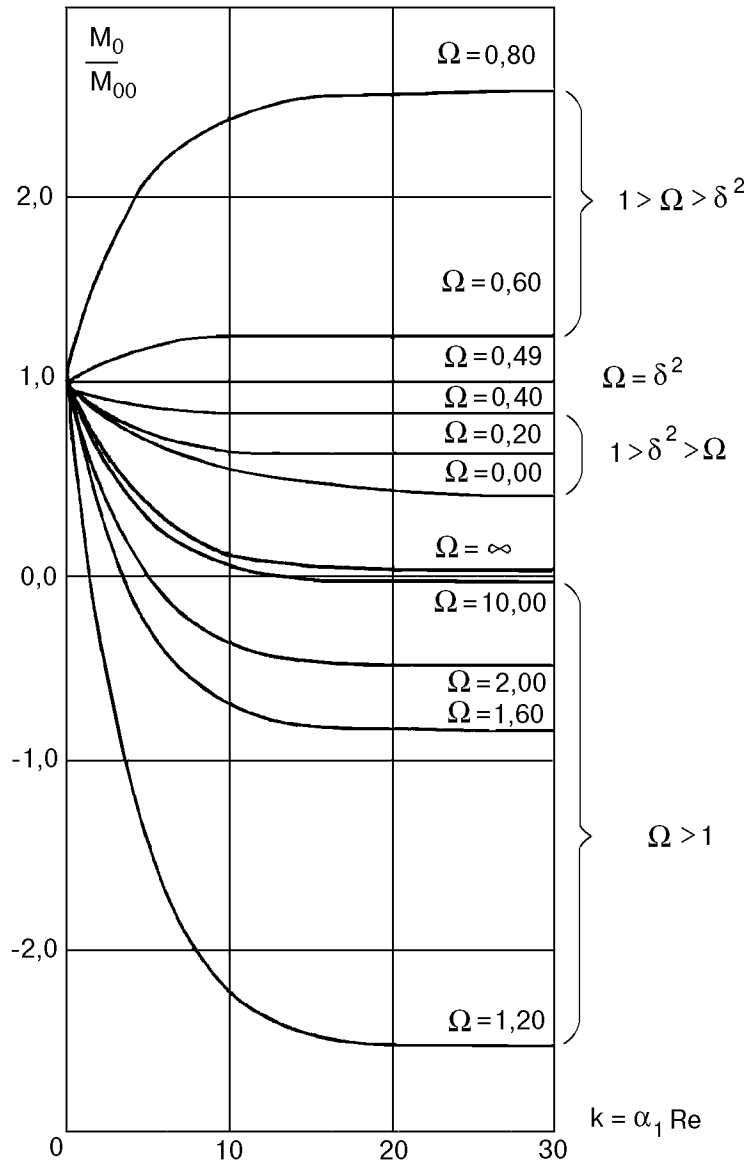


Рис. 2

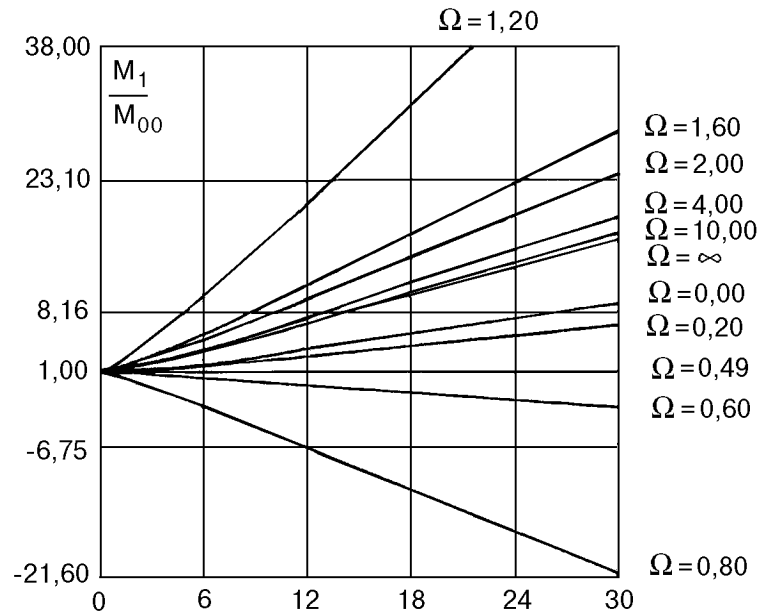


Рис. 3

Отношение моментов трения на внутреннем цилиндре (с притоком массы при $\alpha_1 > 0$, $\alpha_0 > 0$) при продуве к моменту трения на нем без продува равно

$$\frac{M_0}{M_{00}} = \frac{1 - \delta^2}{(1 - \delta^{k+2})(1 - \Omega)} \left[k \frac{\delta^2}{2} \frac{\Omega}{\delta^k} + 1 - \Omega \delta^k \right], \quad (23)$$

а на внешнем цилиндре (с оттоком массы) —

$$\frac{M_1}{M_{00}} = \frac{1 - \delta^2}{(1 - \delta^{k+2})(1 - \Omega)} \left[k \frac{\delta^2}{2\delta^2} \frac{\Omega}{\delta^k} + 1 - \Omega \delta^k \right]. \quad (24)$$

Исследование этих соотношений (см. также рис. 2 и 3) приводит к следующим выводам. 1) При $\Omega = \delta^2$ моменты трения не зависят от k и совпадают с моментом трения без "продува". 2) При $\Omega > 1$ и $\Omega < \delta^2$ момент трения на наружном цилиндре, через стенки которого жидкость уносится, монотонно возрастает, а на внутреннем цилиндре, куда среда дополнительно подается через проницаемую стенку, — монотонно убывает; при этом после некоторого значения $k = k^*$, определяемого уравнением $k(\delta^2 - \Omega)\delta^k = 2(1 - \Omega\delta^k)$, момент трения меняет знак, поскольку этот цилиндр начинает увлекаться вращением наружного цилиндра при $\Omega > 1$; при $\Omega < \delta^2$ момент трения просто спадает до величины $(1 - \delta^2)(1 - \Omega)^{-1}$ при $k \rightarrow \infty$. 3) При $1 > \Omega > \delta^2$

момент на внутреннем цилиндре возрастает до значения $(1 - \delta^2)(1 - \Omega)^{-1}$ при $k = k_0$, а на наружном — монотонно убывает, переходя через нуль при $k = k_0$ и меняя знак при $k > k_0$, поскольку теперь наступает увлечение наружного цилиндра внутренним; значение k_0 определяется из уравнения

$$k_0 (\Omega - \delta^2) = (1 - \Omega \delta^k) 2\delta^2.$$

В заключение заметим, что обнаруженное явление уменьшения силы трения на стенках, через которые в канал поступает жидкость, уносящаяся через другие стенки, может быть использовано на практике, в частности в подшипниках жидкостного трения, при движении проницаемых тел в каналах и др.

Автор признателен В.И. Легейде за помощь в выполнении работы.

Список литературы

- [1] *I. Ye. Tarapov*, The motion of a continuum with sources of mass, impulse and energy continuously distributed. In: Proc. of the Fifth Intern. Conf. of Fluid Mech., Cairo, Egypt (1995), p. 1286–1297.
- [2] *H. Schlichting und K. Bussmann*, Exakte Lösungen für die laminare Grenzschicht mit Absaugung und Ansblasen. — Schr. Dt. Akad. Luftfahrtforsch. (1943), Bd. 7B, No. 2, S. 159–165.
- [3] *A.S. Berman*, Laminar flow in channels porous wall. — J. Appl. Phys. (1953), v. 24, No. 9, p. 2627–2632.
- [4] *В.М. Ерошенко, Л.И. Зайчик*, Гидродинамика и тепломассообмен на проницаемых поверхностях. Наука, Москва (1984).

The viscous incompressible flow with the continuously distributed sources of mass in the infinite channels with porous walls

I. Ye. Tarapov

The viscous incompressible flow with the continuously distributed sources of mass in channels with walls suction and blowing is considered. The exact solutions for the parallel porous plates for the coaxial cylinders moving along its axis or rotating for differs cases of blowing and suction through walls are given.

**Течія в'язкої нестисливої рідини з неперервно
розподіленими джерелами маси по нескінченно довгим
каналам з проникними стінками**

И.Е. Тарапов

Розглянуто ряд випадків течії в'язкої нестисливої рідини з неперервним розподілом джерел маси по каналам з відсосом чи вдуванням крізь проникні стінки. Наведено точні рішення для течій між паралельними пластинами та двома коаксіальними циліндрами, що рухаються вздовж їх вісей чи обертаються для різних випадків вдування та відсосу крізь межі.