Математическая физика, анализ, геометрия
1998, т. 5, № 1/2, с. 3–14

О представляющих и абсолютно представляющих системах в банаховых пространствах

Р.В. Вершинин

*Харьковский государственный университет,
Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4*

Статья поступила в редакцию 22 октября 1996 года

Изучаются топологические свойства представляющих систем (ПС) и абсолютно представляющих систем (АПС). Построена переполненная ПС в гильбертовом пространстве; как следствие получены "переполняющие" возможности базисов. Описаны АПС в суперрефлексивных пространствах в терминах скорости сходимости разложений.

Пусть X – банахово пространство; его единичный шар будем обозначать через $B(X)$, единичную сферу – через $S(X)$. Пусть $\{x_n\}_1^\infty \subset X$ – последовательность векторов; ее замкнутая линейная оболочка обозначается через $[x_n]$.

Определение 1. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется представляющей (ПП), если любой вектор* $x \in [x_n]$ *можно разложить в ряд по* x_n*:*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, \quad a_n \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

Далее, $\{x_n\}$ *называется абсолютно представляющей (АПП), если ряд* (1) *можно выбрать абсолютно сходящимся.*

Следуя терминологии Ю.Ф. Коробейника [1], полную ПП будем называть представляющей системой (ПС), а полную АПП – абсолютно представляющей системой (АПС). Понятие АПС восходит к С. Мазуру (см. [2, с. 209–210]), различные примеры можно найти в [3, 4].

Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ является (C_1, C_2)-эквивалентной последовательности $\{y_n\}$, если существует изоморфизм $T : [x_n] \to [y_n]$ такой, что $Tx_n = y_n$, $n = 1, 2, \ldots$, причем $\|T\| \le C_1$, $\|T^{-1}\| \le C_2$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется эквивалентной $\{y_n\}$, если она (C_1, C_2)-эквивалентна $\{y_n\}$ для некоторых C_1, C_2.

Следующие ниже утверждения 1 и 2 носят технический характер. По существу, в несколько иных формулировках они известны и приводятся здесь для удобства читателя.

Утверждение 1. *Образ базиса при отображении факторизации является ПС в фактор-пространстве. Наоборот, любая ПП эквивалентна образу некоторого базиса при отображении факторизации.*

Доказательство. Первая часть очевидна. Пусть теперь $\{x_n\}$ есть ПП. Рассмотрим нормированное пространство числовых последовательностей

$$G = \left\{ (a_n)_1^\infty : \quad \text{ряд} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \quad \text{сходится} \right\}$$

с нормой $\|(a_n)\| = \sup_N \|\sum_1^N a_n x_n\|$. Известно, что G – банахово пространство [1]. Канонические векторы $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ образуют базис в G. Определим линейный непрерывный оператор T: $G \to [x_n]$ соотношениями $Te_n = x_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Поскольку $\{x_n\}$ является ПС, оператор T сюръективен. Значит, его инъективизация $\hat{T}$: $G/\operatorname{Ker} T \to [x_n]$ по теореме об обратном операторе является изоморфизмом и устанавливает искомую эквивалентность.

Утверждение 2. *Для последовательности $\{x_n\}$ следующие условия эквивалентны:*

а) $\{x_n\}$ является АПП;

б) найдется число δ такое, что любой вектор $x \in [x_n]$ разлагается в ряд (1), причем $\sum \|a_n x_n\| \le \delta \|x\|$;

в) $\{x_n/\|x_n\|\}$ является $(\delta, 1)$-эквивалентной образу канонического базиса l_1 при некотором фактор-отображении;

г) $B([x_n]) \subset \delta \cdot \overline{\text{abs.conv}}\{x_n/\|x_n\|\}$ для некоторого δ;

д) найдется δ такое, что

$$\forall x^* \in [x_n]^* \exists n : \ \delta |x^*(x_n)| \ge \|x^*\| \cdot \|x_n\| \, .$$

Наименьшая возможная константа δ во всех пунктах – одна и та же; будем называть ее константой АПП $\{x_n\}$.

Доказательство. а) $\Longrightarrow$ в). Пусть $\{x_n\}$ – АПП. Тогда линейный непрерывный оператор T: $l_1 \to [x_n]$, определенный соотношениями $Te_n = x_n/\|x_n\|$, $n = 1, 2, \ldots$, является сюръекцией. Рассмотрим его инъективизацию, $\hat{T}$: $l_1/\operatorname{Ker} T \to [x_n]$. По теореме об обратном операторе $\hat{T}$

– изоморфизм. Кроме того, $\|\hat{T}\| = \|T\| = 1$, поэтому $\hat{T}^{-1}$ устанавливает $(\delta,1)$-эквивалентность между $\{x_n/\|x_n\|\}$ и $\{qe_n\}$, где q – отображение факторизации $l_1 \to l_1/\operatorname{Ker} T$.

б) $\Longleftrightarrow$ в). Перепишем условие б) в следующем виде: $\{x_n\}$ – АПП и для любого $x \in [x_n]$

$$\begin{aligned} \delta\|x\| &\geq \inf\Big\{\sum|a_n|: \quad x=\sum a_n x_n/\|x_n\|\Big\} \\ &= \inf\Big\{\sum|a_n|: \quad \hat{T}^{-1}x = q\Big(\sum a_n e_n\Big)\Big\} = \|\hat{T}^{-1}x\|\,. \end{aligned}$$

Таким образом, условие б) означает, что $\{x_n\}$ – АПП и $\|\hat{T}^{-1}\| \leq \delta$, а условие в) – что определена эквивалентность

$$\hat{T}_L: \quad l_1/L \to [x_n], \quad \hat{T}_L(qe_n) = x_n/\|x_n\|\,,$$

где L – некоторое подпространство l_1, $q: l_1 \to l_1/L$ – отображение факторизации, причем $\|\hat{T}_L\| = 1$ и $\|\hat{T}_L^{-1}\| \leq \delta$. Легко видеть, что $L = \{(a_n) \in l_1 : \sum a_n x_n/\|x_n\| = 0\} = \operatorname{Ker} T$, т.е. $\hat{T}_L = \hat{T}$. Значит, б) $\Longleftrightarrow$ в).

б) $\Longleftrightarrow$ а), б) $\Longleftrightarrow$ г) – очевидны.

б) $\Longleftrightarrow$ д). Заметим сначала, что если оператор T сюръективен, то из $T = \hat{T}q$ следует, что $(T^*)^{-1} = (\hat{T}^*)^{-1}(q^*)^{-1}$, поэтому $\|(T^*)^{-1}\| = \|\hat{T}^{-1}\|$. С другой стороны, мы знаем, как действует T^*:

$$T^*x^* = (x^*(x_n/\|x_n\|))_1^\infty \in l_\infty, \quad x^* \in [x_n]^*\,.$$

Если выполнено условие б), то, как показано выше, T – сюръекция и $\|\hat{T}^{-1}\| \leq \delta$, т.е. $\|(T^*)^{-1}\| \leq \delta$; значит, $\|T^*x^*\| \geq \delta\|x^*\|$ для всех $x^* \in [x_n]^*$. Отсюда следует д). Наоборот, если выполнено условие д), то $\|(T^*)^{-1}\| \leq \delta$; значит, T^* – изоморфное вложение, т.е. T – сюръекция, поэтому $\{x_n\}$ – АПП и $\|\hat{T}^{-1}\| \leq \delta$, т.е. выполнено условие б). Утверждение доказано.

Перейдем к изучению топологических свойств ПП и АПП.

Утверждение 3. *Бесконечномерная нормированная АПП – не относительно компактное множество.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\{x_n\}$ – нормированная АПП, то, согласно утверждению 2, множество $\operatorname{abs.conv}\{x_n\}$ не относительно компактно, поэтому и $\{x_n\}$ не относительно компактно.

Теорема 1. *Сепарабельное банахово пространство X нерефлексивно в том и только в том случае, если любая АПС в X содержит базисную подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть X – нерефлексивное и $\{x_n\} \subset S(X)$ – АПС. Согласно пункту в) утверждения 2, можно считать X образом фактор-отображения $q : l_1 \to X$, причем $qe_n = x_n$, $n = 1, 2, \dots$. Оператор q не слабо компактен, значит, множество $\{qe_n\} = \{x_n\}$ не относительно слабо компактно (см. [5, упражнение VII.5]). Тогда, по теореме Эберлейна–Шмульяна, найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, не содержащая слабо сходящихся подпоследовательностей. По теореме М.И. Кадеца–А. Пелчинского (см. [6]), $\{x_{n_k}\}$ содержит базисную подпоследовательность.

Пусть теперь X рефлексивно. Зафиксируем произвольный функционал $x^* \in S(X^*)$ и рассмотрим множество

$$K = \left\{ x \in S(X) : \quad |x^*(x)| > \frac{1}{4} \right\} .$$

Легко видеть, что $B(X) \subset 2\, \overline{\mathrm{conv}}\, K$, поэтому для последовательности $\{x_n\} \subset K$, плотной в K, выполнено условие г) утверждения 2. Таким образом, $\{x_n\}$ является АПС. Далее, 0 не является слабо предельной точкой $\{x_n\}$ по определению множества K. С другой стороны, всякая базисная последовательность в рефлексивном пространстве слабо сходится к нулю (см. [7, §1.в]). Значит, $\{x_n\}$ не содержит базисных подпоследовательностей. Теорема доказана.

Определение 2. *Последовательность $\{x_n\}$ называется переполненной, если для любой бесконечной подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ $[x_{n_k}] = [x_n]$.*

Теорема 2. *В пространстве l_2 существует переполненная ПС $\{x_n\}$. Более того, $\{x_n\}$ нормирована и сходится к ненулевому вектору.*

Для доказательства потребуется лемма, представляющая и самостоятельный интерес. Напомним, что последовательность $\{x_n\}$ называется минимальной, если $x_m \notin [x_n]_{n \neq m}$, $m = 1, 2, \dots$.

Лемма 1. *Пусть $\{x_n\}$ – нормированная минимальная последовательность. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

а) $\{x_n\}$ не эквивалентна каноническому базису l_1;

б) существует подпространство L пространства $[x_n]$ бесконечной коразмерности такое, что

$$\lim_n \mathrm{dist}\,(x_n, L) = 0\,.$$

Доказательство. а) $\Longrightarrow$ б). Как утверждает теорема 3.14 из [6], условие а) эквивалентно существованию такого сходящегося ряда $\sum a_n x_n$, что $\sum |a_n| = \infty$. Поэтому найдется разбиение натурального ряда на конечные блоки A_k такое, что

$$\sum_{n\in A_k} |a_n| = M_k > 1, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Рассмотрим для каждого k векторы

$$z_k = \sum_{n\in A_k} a_n x_n$$

и

$$u_n = x_n - \frac{\operatorname{sign}(a_n)}{M_k} z_k \quad \text{при} \quad n \in A_k\,.$$

Проверим, что подпространство $L = [u_n]$ удовлетворит условию б). Действительно, $\operatorname{dist}(x_n, L) \le \|x_n - u_n\| \le \|z_k\|$ при $n \in A_k$, тогда как $\lim_k \|z_k\| = 0$. Далее, для каждого k

$$\sum_{n\in A_k} a_n u_n = \sum_{n\in A_k} a_n x_n - \frac{\sum_{n\in A_k} |a_n|}{M_k} z_k = 0$$

по определению M_k и z_k. Таким образом, $[u_n]_{n\in A_k}$ есть собственное подпространство в $[x_n]_{n\in A_k}$ для каждого k. Поэтому найдутся ненулевые функционалы $g_k^* \in ([x_n]_{n\in A_k})^*$ такие, что

$$g_k^* \in ([u_n]_{n\in A_k})^{\perp}, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Отсюда легко следует, что последовательность функционалов $\{y_k^*\}_1^\infty \subset [x_n]^*$, определенная соотношениями $y_k^*(x) = g_k^*(P_k x)$, где P_k – проекция на $[x_n]_{n\in A_k}$ параллельно $[x_n]_{n\notin A_k}$, является линейно независимой и $\{y_k^*\} \subset ([u_n]_1^\infty)^{\perp}$, поэтому $\operatorname{codim}[u_n] = \infty$.

б) $\Longrightarrow$ а). Предположим, что выполнено условие б) и $\{x_n\}$ эквивалентна каноническому l_1-базису. Найдутся векторы $y_n \in L$ такие, что $\lim_n \|x_n - y_n\| = 0$. Тогда, по известному свойству устойчивости l_1-базисов [6], для некоторого номера N последовательность $\{x_n\}_1^N \cup \{y_n\}_{N+1}^\infty$ эквивалентна $\{x_n\}_1^\infty$ и полна в $[x_n]_1^\infty$. Таким образом, $\operatorname{codim} L \le \operatorname{codim}[y_n]_{N+1}^\infty \le N$. Противоречие. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\{e_n\}$ – канонический базис l_2. По лемме 1, существует подпространство $L \subset l_2$ бесконечной коразмерности такое, что $\lim_n \operatorname{dist}(e_n, L) = 0$. Пусть $Z = l_2/L$ и q – отображение факторизации $l_2 \to Z$. Поскольку $\lim_n \|qe_n\| = 0$, найдутся числа ε_n $n = 1, 2, \dots$, такие, что

$$0 < \varepsilon_n < 1, \quad \lim_n \varepsilon_n = 0, \quad \lim_n \|qe_n\|/\varepsilon_n = 0\,.$$

Поэтому для ПС $\bar{x}_n = qe_n/\|qe_n\| \subset S(Z)$ коэффициенты представления могут выбираться быстро сходящимися к нулю:

$$\forall z \in Z: \quad z = \sum b_n \bar{x}_n, \quad \lim_n b_n/\varepsilon_n = 0\,. \tag{2}$$

Положим

$$a_{k,n} = 2^{-k}\varepsilon_n^{1-\frac{1}{k}}, \quad n,k = 1,2,\ldots;$$
$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n}\bar{x}_k, \quad n = 1,2,\ldots;$$
$$y_n = x_n + \varepsilon\bar{x}_n, \quad n = 1,2,\ldots.$$

Мы утверждаем, что последовательность $\{u_n\} = \{x_n/\|x_n\|, y_n/\|y_n\|\}$ (с чередующимися членами $x_n/\|x_n\|$ и $y_n/\|y_n\|$) обладает требуемыми свойствами в $Z \equiv l_2$. Вначале заметим, что

$$\sup_n \|x_n\| < \infty \tag{3}$$

и

$$\lim_n \frac{\varepsilon_n}{a_{r,n}} = 0, \quad r = 1,2,\ldots. \tag{4}$$

Кроме того,

$$\lim_n \frac{\sum_{k=r+1}^{\infty} a_{k,n}}{a_{r,n}} = 0, \quad r = 1,2,\ldots; \tag{5}$$

действительно,

$$\frac{\sum_{k=r+1}^{\infty} 2^{-k}\varepsilon_n^{1-\frac{1}{k}}}{2^{-r}\varepsilon_n^{1-\frac{1}{r}}} = \varepsilon_n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}} \sum_{k=r+1}^{\infty} 2^{-(k-r)}\varepsilon_n^{\frac{1}{r+1}-\frac{1}{k}}$$
$$\le \varepsilon_n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}} \cdot 1 \to 0 \quad (n \to \infty), \quad r = 1,2,\ldots.$$

Таким образом, $\{u_n\}$ является ПС: любой вектор $z \in Z$ представляется, в силу (2) и (3), сходящимся рядом

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-(b_n/\varepsilon_n)x_n + (b_n/\varepsilon_n)y_n\right)\,.$$

Далее, учитывая (5), имеем для каждого $r = 1,2,\ldots$

$$\left\| \frac{x_n - \sum_{k=1}^{r-1} a_{k,n}\bar{x}_k}{a_{r,n}} - \bar{x}_r \right\| = \left\| \frac{\sum_{k=r+1}^{\infty} a_{k,n}\bar{x}_k}{a_{r,n}} \right\|$$

$$\leq \frac{\sum_{k=r+1}^{\infty} a_{k,n}}{a_{r,n}} \to 0 \quad (n \to \infty), \quad r = 1, 2, \dots,$$

и, с учетом (6) и (4),

$$\frac{y_n - \sum_{k=1}^{r-1} a_{k,n}\bar{x}_k}{a_{r,n}} - \bar{x}_r = \left(\frac{x_n - \sum_{k=1}^{r-1} a_{k,n}\bar{x}_k}{a_{r,n}} - \bar{x}_r\right)$$
$$+ \frac{\varepsilon_n}{a_{r,n}}\bar{x}_n \to 0, \quad (n \to \infty), \quad r = 1, 2, \dots. \qquad (6)$$

Подставляя $r = 1$ в (6) и (7), получаем $\lim_n \|x_n/a_{1,n} - \bar{x}_1\| = 0$ и $\lim_n \|y_n/a_{1,n} - \bar{x}_1\| = 0$, т.е. $\{u_n\}$ действительно стремится к ненулевому вектору. Кроме того, из (6) и (7) при помощи индукции по $r = 1, 2, \dots$ получаем, что $\bar{x}_r \in [x_{n_k}]$ и $\bar{x}_r \in [y_{n_k}]$ для любых бесконечных подпоследовательностей $\{x_{n_k}\}$ и $\{y_{n_k}\}$. Таким образом, $\{u_n\}$ переполнена. Теорема доказана.

Из теоремы 2 следуют неожиданные "переполняющие" возможности базисов.

Следствие 1. *Образ базиса при фактор-отображении может быть переполненной последовательностью.*

Доказательство. Достаточно к переполненной ПС применить утверждение 1.

Следствие 2. *В некотором банаховом пространстве X существуют базисная последовательность $\{x_n\}$ и подпространство L такие, что $[x_{n_k}]$ и L – квазидополнительные подпространства для любой бесконечной подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ (т.е. $[x_{n_k}] \cap L = 0$ и $\overline{[\bar{x}_{n_k}] + L} = X$).*

Доказательство. Пусть $\{z_m\}$ – полная переполненная ПС в l_2. Тогда, согласно утверждению 1 и его доказательству, можно считать, что $z_m = qe_m$, где $\{e_m\}$ – канонический базис пространства $G = \{(a_n) :$ ряд $\sum a_n x_n$ сходится$\}$, q – фактор-отображение $G \to G/L = l_2$, $L = \{(a_n) : \sum a_n x_n = 0\} \subset G$.

Выделим по теореме Эрдеша–Страуса (см. [8, § I.1.6; 9]) из $\{z_m\}$ ω-линейно независимую подпоследовательность $\{z_{m_n}\}$ и положим

$$x_n = e_{m_n}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Зафиксируем произвольную бесконечную подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$. Поскольку $\{qx_n\}$ полна в G/L и переполнена, $[x_{n_k}] + L$ плотно в G. Кроме того, $[x_{n_k}] \cap L = 0$ в силу ω-линейной независимости $\{qx_n\}$ и по определению L.

З а м е ч а н и е. Как сообщил автору В.М. Кадец, не существует последовательности, каждая бесконечная подпоследовательность которой являлась бы ПС. Действительно, допустим, что такая последовательность $\{x_n\}$ существует. Выделим из нее по теореме Эрдеша–Страуса ω-линейно независимую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Эта подпоследовательность есть ПС и, следовательно, является базисом. Тогда $x_1 \notin [x_{n_k}]_{k=2}^{\infty}$, значит, $\{x_{n_k}\}_{k=2}^{\infty}$ неполна. Противоречие.

Рассмотрим теперь один важный случай – АПС в суперрефлексивных пространствах. Напомним, что банахово пространство называется равномерно гладким, если функция

$$\rho(\tau) = \sup\left\{\frac{\|x-y\|+\|x+y\|}{2} - 1 : \quad x, y \in X, \quad \|x\| = 1, \quad \|y\| \le \tau\right\},$$

называемая модулем гладкости X, удовлетворяет условию

$$\rho(\tau)/\tau \to 0 \quad (\tau \to 0)\,.$$

Каждое равномерно гладкое пространство суперрефлексивно, каждое суперрефлексивное пространство является равномерно гладким в некоторой эквивалентной норме [10].

Определение 3. *Последовательность $\{x_n\}$ называется (C,q)-быстрой ПП, если любой $x \in [x_n]$ представляется рядом*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{n(k)}, \quad \|a_k x_{n(k)}\| \le C\|x\|q^k\,,$$

где $k \mapsto n(k)$ – инъективное отображение, зависящее от x. Система $\{x_n\}$ называется быстрой ПП, если она является (C,q)-быстрой ПП для некоторых $C > 0$ и $q \in (0,1)$. Полную быструю ПП будем называть быстрой представляющей системой (быстрой ПС).

Ясно, что каждая быстрая ПП является АПП.

Теорема 3. *Пусть X – равномерно гладкое пространство, $\{x_n\} \subset X$ – нормированная последовательность. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) $\{x_n\}$ – АПС;

б) $\{x_n\}$ – быстрая ПС;

в) для некоторого $t \in \mathbb{R}$, множество $\{\pm t x_n\}_1^{\infty}$ образует ε-сеть $S(X)$ с $\varepsilon < 1$.

Нам понадобится лемма о локально-эквивалентной норме на X.

Лемма 2. *Пусть X – банахово пространство, и пусть вектор $x \in S(X)$ и функционал $x^* \in S(X^*)$ такие, что $x^*(x) = 1$. Тогда для любого $\tau \in (0,1)$ и любого $z \in X$ такого, что $\|x - z\| \le \tau/3$, выполняется оценка*

$$x^*(z) \le \|z\| \le (1 + 2\rho(\tau))x^*(z)\,,$$

где $\rho(\tau)$ – модуль гладкости X.

Доказательство. Заметим сначала, что если $y \in \operatorname{Ker} x^*$ и $\|y\| \le \tau$, то

$$\|x - y\| \le 1 + 2\rho(\tau)\,. \tag{7}$$

Действительно, по определению $\rho(\tau)$,

$$2\rho(\tau) \ge \|x - y\| + \|x + y\| - 2 \ge \|x - y\| + x^*(x + y) - 2 \ge \|x - y\| + 1 - 2\,,$$

что и доказывает (8). Далее, если вектор $z \in X$ такой, что $\|x - z\| \le \tau/3$, то можно применить (8) к вектору $y = x - z/x^*(z)$; получим $1 + 2\rho(\tau) \ge \|x - y\| = \|z\|/x^*(z)$, что доказывает оценку сверху, в то время как оценка снизу очевидна.

Доказательство теоремы. а) $\Longrightarrow$ в). Пусть δ – константа АПС $\{x_n\}$. Зафиксируем любой вектор $x \in S(X)$. Пусть $x^* \in S(X)$ такой, что $x^*(x) = 1$. В силу утверждения 2, найдутся номер n и число $\theta \in \{-1, 1\}$ такие, что $\theta x^*(x_n) \ge \delta$. Применим лемму 2 для $z = x - \frac{\theta\tau}{3}x_n$ (где $\tau \in (0,1)$ подберем позже). Имеем

$$\left\|x - \frac{\theta\tau}{3}x_n\right\| \le (1 + 2\rho(\tau)) \cdot x^*\left(x - \frac{\theta\tau}{3}x_n\right) \le (1 + 2\rho(\tau))\left(1 - \frac{\tau\delta}{3}\right).$$

Поскольку X равномерно гладко, можно выбрать $\tau \in (0,1)$ так, чтобы

$$2\rho(\tau) < \frac{\tau\delta}{6}\,.$$

Тогда

$$(1 + 2\rho(\tau))\left(1 - \frac{\tau\delta}{3}\right) < 1 - \frac{\tau\delta}{6}\,.$$

Таким образом, множество $\{\pm\frac{\tau}{3}x_n\}_1^\infty$ является $\left(1 - \frac{\tau\delta}{6}\right)$-сетью $S(X)$.

в) $\Longrightarrow$ б). Пусть множество $\{\pm t x_n\}_1^\infty$ является ε-сетью $S(X)$ с $\varepsilon < 1$. Зафиксируем произвольный $x \in B(X)$. Будем искать представление $x = \lim_k S_k$, где $S_k = \sum_{j=1}^k b_j x_{n_j}$, причем пока не будем требовать инъективности отображения $n \mapsto n_j$. Доказательство проведем индукцией по j.

Пусть $j = 1$. Найдутся номер n_1 и знак θ_1 такие, что

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \theta_1 t x_{n_1} \right\| \le \varepsilon \,.$$

Положим $b_1 = \theta_1 t \|x\|$. Тогда $\|x - S_1\| \le \varepsilon \|x\| \le \varepsilon$.

Пусть $j = k > 1$. Найдутся номер n_k и знак θ_k такие, что

$$\left\| \frac{x - S_{k-1}}{\|x - S_{k-1}\|} - \theta_k t x_{n_k} \right\| \le \varepsilon \,.$$

Положим $b_k = \theta_k t \|x - S_{k-1}\|$. Тогда $\|x - S_k\| \le \varepsilon \cdot \varepsilon^{k-1} = \varepsilon^k$.

Таким образом, представление $x = \lim_k S_k$ найдено, и имеем

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_{n_k} \,,$$

$$\|b_k x_{n_k}\| = \|S_k - S_{k-1}\| \le \|x - S_k\| + \|x - S_{k-1}\| \le 2\varepsilon^{k-1} \,. \tag{8}$$

Осталось только сделать отображение $n \mapsto n_k$ инъективным. Для этого достаточно привести подобные члены в ряде (9) – ясно, что норма k-го члена не больше, чем $(1-\varepsilon)^{-1} \cdot 2\varepsilon^{k-1}$. Теорема доказана.

Следствие. *Каждая АПС в суперрефлексивном пространстве является быстрой ПС.*

В заключение приведем пример, показывающий существенность условия суперрефлексивности. Рассмотрим пространство $X = \left(l_1^{(1)} \oplus l_1^{(2)} \oplus \ldots \right)_{l_2}$, являющееся рефлексивным, но не суперрефлексивным. Все слагаемые $l_1^{(k)}$ будем рассматривать как подподпространства в X, и через $e_n^{(k)}$, $n = 1, 2, \ldots, k$, обозначим векторы канонического базиса в $l_1^{(k)}$. Определим следующее множество векторов:

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_{n(k)}^{(k)} \in X : \quad \lambda_k \in \mathbb{R}, \quad 1 \le n(k) \le k, \quad k = 1, 2, \ldots \right\} .$$

Докажем, что любое плотное в A счетное подмножество является АПС с константой 1, но не быстрой ПС.

Зафиксируем произвольный $x^* = (x_k^*)_1^\infty \in X^* = \left(l_\infty^{(1)} \oplus l_\infty^{(2)} \oplus \ldots \right)_{l_2}$. Для доказательства первой части достаточно, в силу утверждения 2, найти $x \in A$, $\|x\| = 1$, такой, что $x^*(x) = \|x^*\|$. Найдутся номера $n(k)$, $k = 1, 2, \ldots$ такие, что $|x_k^*(e_{n(k)})| = \|x_k^*\|_{l_\infty}$. Тогда, при подходящем выборе чисел λ_k, $\sum \lambda_k^* = 1$, для вектора $x = \left(\lambda_k e_{n(k)} \right)_1^\infty \in S(X) \cap A$ верно следующее:

$$x^*(x) = \sum_k |\lambda_k| \cdot |x_k^*(e_{n(k)})| = \sum_k |\lambda_k| \cdot \|x_k^*\|_{l_\infty}$$

$$= \left(\sum_k |\lambda_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_k \|x_k^*\|_{l_\infty}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_k \|x_k^*\|_{l_\infty}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|x^*\| \, .$$

Предположим теперь, что некоторое плотное в A подмножество есть (C, q)-быстрая ПС. Проектируя X на компоненты $l_1^{(1)}$, $l_1^{(2)}, \ldots$, получаем, что для каждого $k = 1, 2, \ldots$ некоторое плотное подмножество в $\{\lambda e_n : \ \lambda \in \mathbb{R}, \ 1 \leq n \leq k\}$ является (C, q)-быстрой ПС в $l_1^{(k)}$ с константами C и q, не зависящими от k, что, очевидно, неверно.

Автор благодарен В.М. Кадецу за множество предложенных интересных задач и руководство работой.

Список литературы

[1] *Ю.Ф. Коробейник*, Об одной двойственной задаче. 1. Общие результаты. Приложения к пространствам Фреше. — Мат. сб. (1975), т. 97, № 2, с. 193–229.

[2] *С. Банах*, Курс функціонального аналізу. Радянська школа, Київ (1948).

[3] *Ю.Ф. Коробейник*, Представляющие системы. — Успехи мат. наук (1981), т. 36, № 1, с. 73–126.

[4] *И.С. Шрайфель*, Абсолютно представляющие системы в l_2. — Изв. вузов. Северокавказский регион. Естеств. науки (1993), № 3–4, с. 68–77.

[5] *J. Diestel*, Sequences and series in Banach spaces. Springer–Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo (1984).

[6] *В.Д. Мильман*, Геометрическая теория банаховых пространств. Теория базисных и минимальных систем. — Успехи мат. наук (1970), т. 25, № 3, с. 113–174.

[7] *J. Lindenstrauss and L. Tzafriri*, Classical Banach spaces. I. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1977).

[8] *I. Singer*, Bases in Banach spaces. II. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1981).

[9] *В.И. Гурарий*, Счетно-линейно независимые последовательности в банаховых пространствах. — Успехи мат. наук (1981), т. 36, № 5, с. 171–172.

[10] *P. Enflo*, Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm. — Israel J. Math. (1972), v. 13, No. 3–4, p. 281–288.

On representative and absolutely representative systems in Banach spaces

R.V. Vershynin

The topological properties of representative systems (RS) and absolutely representative systems (ARS) are studied. An overfilled RS in the Hilbert space is constructed; as a consequence some "overfilled" possibilities of the bases are obtained. The ARS in super-reflexive spaces are described in terms of the speed of expansion convergence.

Про репрезентуючі та абсолютно репрезентуючі системи у банахових просторах

Р.В. Вершинін

Вивчаються топологічні властивості репрезентуючих систем (РС) та абсолютно репрезентуючих систем (АРС). Побудовано переповнену РС у гільбертовому просторі; як наслідок отримано "переповнюючі" можливості базисів. Описано АРС у суперрефлексивних просторах у термінах швидкості збіжності розкладів.