Математическая физика, анализ, геометрия
1998, т. 5, № 1/2, с. 25–34

Векторнозначная мера как базис банахова пространства

К.В. Желтухин*, В.М. Кадец**

Харьковский государственный университет,
*Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4**
E-mail:zheltukhin@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 22 ноября 1997 года

Введено новое понятие базисной меры. Дана характеризация векторнозначных мер, являющихся базисными мерами. Доказано, что банахово пространство имеет базисную меру, если и только если оно изоморфно порядково непрерывной банаховой решетке со слабой единицей. Исследована связь между свойствами банахова пространства и свойствами базисной меры.

1. Введение

Изучению различных классов базисов и обобщений этого понятия посвящена обширная литература [1, 3, 5]. В настоящей работе рассматривается еще одно обобщение, идеей которого служит замена разложений в ряд интегральными представлениями.

Определение 1.1. *Пусть на множестве Ω задана σ-алгебра подмножеств Σ. Пусть X – банахово пространство. Векторнозначную функцию $\mu\colon \Sigma \to X$ называют векторной мерой, если для любых непересекающихся множеств A, $B \in \Sigma$ имеем $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Векторную меру μ называют σ-аддитивной, если $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ для любой дизъюнктной последовательности множеств A_n.*

При этом ряд должен сходиться безусловно, так как порядок нумерации множеств A_n может быть выбран произвольным. В дальнейшем под векторными мерами будем подразумевать σ-аддитивные векторные меры.

*Работа частично поддержана грантом AMS "Aid Grant" для стран бывшего СССР за 1995 год.
**Работа частично поддержана грантами INTAS 93-1376 и ISSEP APU 061040 "Соросовский доцент".

Определение 1.2. *Пусть μ: $\Sigma \to X$ – векторная мера. Вариация меры μ определяется равенством*

$$|\mu|(A) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \|\mu(A_i)\| : n \in \mathbf{N}, A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, A_i \cap A_k = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq k\right\}.$$

Мера μ – мера ограниченной вариации, если $|\mu|(\Omega) < \infty$.

Если μ – векторная мера, то $|\mu|$ – σ-аддитивная числовая мера (см. [2]).

Определение 1.3. *Пусть μ – векторная мера. Полувариация меры μ определяется равенством*

$$\|\mu\|(A) = \sup\{|x^*\mu|(A) : x^* \in S(X^*)\}.$$

Известно [2], что полувариация счетно-аддитивной меры всегда конечна.

По теореме Бартла–Данфорда–Шварца ([2, с. 14]) для любой X-значной меры μ существует своя положительная числовая мера λ, заданная на том же семействе множеств, относительно которой μ абсолютно непрерывна:

$$\|\mu(A_n)\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \quad \text{если} \quad \lambda(A_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отметим, что λ можно выбрать так, что для каждого $A \in \Sigma$

$$\lambda(A) \leq \|\mu\|(A). \tag{1}$$

Зафиксируем некоторую векторную меру μ и числовую меру λ, удовлетворяющую (1), относительно которой μ абсолютно непрерывна. Обозначим через $M(\lambda)$ множество функций $f : \Omega \to \mathbf{R}$, измеримых по мере λ, причем совпадающие почти всюду функции будем отождествлять.

Определение 1.4. *Функция $f \in M(\lambda)$ называется слабо интегрирумой по мере μ с $\int_\Omega f d\mu = x$, если для каждого $x^* \in X^*$ имеем $x^*(x) = \int_\Omega f dx^*\mu$. Элемент x назовем слабым интегралом функции f по векторной мере μ.*

Заметим, что ввиду теоремы Хана–Банаха слабый интеграл лежит в замыкании линейной оболочки множества значений меры.

Определение 1.5. *Мера $\mu : \Sigma \to X$ называется базисной мерой пространства X, если для каждого $x \in X$ существует и единственна слабо интегрируемая функция f, для которой $\int_\Omega f d\mu = x$.*

Докажем, что банахово пространство X обладает базисной мерой в том и только в том случае, если X изоморфно порядково непрерывной банаховой решетке со слабой единицей. Далее докажем, что X может иметь базисную меру ограниченной вариации в том и только в том случае, если X представимо в виде безусловной прямой суммы счетного числа пространств, изоморфных пространствам $L_1(\nu)$. Исследуем вопрос единственности базисной меры в гильбертовом пространстве.

2. Базисные меры и решеточная структура

Пусть всюду в дальнейшем X – банахово пространство, Ω – абстрактное множество с σ-алгеброй подмножеств Σ, $\mu : \Sigma \to X$ – счетно-аддитивная векторная мера, λ – числовая положительная мера, относительно которой μ абсолютно непрерывна, причем $\lambda(A) \leq \|\mu\|(A)$ при всех $A \in \Sigma$. Если банахово пространство X имеет базисную меру, будем для простоты считать элементами X сами функции $f \in M(\lambda)$, соответствующие элементам пространства X.

Следующие две теоремы характеризуют базисные меры.

Теорема 2.1. *Пусть X – пространство с базисной мерой μ. Тогда существует такая константа $C > 0$, что для любых элементов f, $g \in X$ из условия $|f(\omega)| \geq |g(\omega)|$ п.в. на Ω следует неравенство $C\|f\| \geq \|g\|$.*

Доказательство. Введем на X новую норму. Для каждого $z \in X$ определим

$$|||z||| = \sup\left\{ \int\limits_{\Omega} |z(\omega)| d|x^*\mu| : \quad x^* \in S(X^*) \right\}. \tag{2}$$

Докажем конечность величины $|||z|||$. Зафиксируем $z \in X$ и разобьем Ω на множества:

$A_n = \{\omega \in \Omega : \quad n^{-1} \geq |z(\omega)| > (n+1)^{-1}\}, \quad n \in \mathbf{N}$,

$A_{-n} = \{\omega \in \Omega : \quad (n+1) \geq |z(\omega)| > n\}, \quad n \in \mathbf{N}$, и

$A_0 = \{\omega \in \Omega : \quad z(\omega) = 0\}$.

Очевидно, что $\Omega = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} A_k$ и для любых $i, k \in \mathbf{Z}$ $A_i \cap A_k = \emptyset$ при $i \neq k$. Так как в формуле (2) значение $|||z|||$ не изменится при замене Ω на $\Omega \backslash A_0$, то будем считать $A_0 = \emptyset$.

Рассмотрим теперь пространство Y, элементы которого – последовательности зарядов $\{\sigma_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$, где заряд σ_k определен на A_k (σ_k – конечный заряд), для которых величина $\sum_{k \in \mathbf{Z}} \int_{A_k} |z(\omega)| d|\sigma_k| = \|\{\sigma_k\}_{k \in \mathbf{Z}}\|$ конечна. С таким образом введеной нормой Y можно представить как прямую сумму по l_1 пространств Y_k, где Y_k – пространство зарядов, определенных на A_k, с нормой $\|\sigma\| = \int_{A_k} |z(\omega)| d|\sigma|$. Так как на A_k функция $z(\omega)$ ограничена и отделена от нуля, норма $\|\sigma\| = \int_{A_k} |z(\omega)| d|\sigma|$ эквивалентна вариации заряда. Значит, Y_k – банаховы пространства, и, следовательно, Y также будет банаховым пространством.

Рассмотрим линейный оператор $T : X^* \to Y$, определяемый равенством $T(x^*) = \{x^*\mu|_{A_k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$. С помощью теоремы о замкнутом графике проверим непрерывность T. Пусть $x_j^* \to x^*$ при $j \to \infty$ по норме пространства X^* и $T(x_j^*) \to a$ при $j \to \infty$ $(a = \{\alpha_j\}_{j\in\mathbf{Z}})$ по норме пространства Y . Для каждого $k \in \mathbf{Z}$ и $D \in \Sigma|_{A_k}$

$$x^*\mu(D) = \lim_{j\to\infty} x_j^*\mu(D) \quad \text{и} \quad \alpha_k(D) = \lim_{j\to\infty} x_j^*\mu(D).$$

Следовательно, $x^*\mu|_{A_k} = \alpha_k$, т.е. $a = T(x^*)$. Итак, график оператора T замкнут, и, следовательно, оператор T непрерывен. Поэтому $\|T\|$ – конечная величина, а эта величина, как легко видеть, равна $|||z|||$.

Мы доказали, что $|||z||| < \infty$ для любого $z \in X$. Легко проверить, что для $||| \bullet |||$ выполнены все аксиомы нормы и $\|z\| < |||z|||$ для всех $z \in X$. Проверим, что X с нормой $||| \bullet |||$ – банахово пространство. Пусть $\{z_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ — фундаментальная последовательность по норме $|||\bullet|||$. Выберем в $\{z_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ подпоследовательность $\{z_{k(i)}\}_{i\in\mathbf{N}}$ такую, что $|||z_{k(i)} - z_{k(i+1)}||| < 2^{-i}$. Пусть $A \subset \Omega$ – множество, на котором последовательность функций $\{z_{k(i)}\}_{i\in\mathbf{N}}$ сходится поточечно. Для каждого $x^* \in X^*$ ряд $z_{k(1)} + \sum_{i=1}^{\infty}(z_{k(i+1)} - z_{k(i)})$ сходится абсолютно в $L_1(\Omega, \Sigma, |x^*\mu|)$, поэтому $|x^*\mu|(\Omega\backslash A) = 0$, и тогда $\lambda(\Omega\backslash A) = 0$. Последовательность $\{z_{k(i)}\}_{i\in\mathbf{N}}$ сходится поточечно к некоторой функции z п.в. по мере λ. Для любого $x^* \in S(X^*)$

$$\int_\Omega |z - z_{k(n)}| d|x^*\mu| < \int_\Omega \sum_{i=n}^{\infty} |z_{k(i+1)} - z_{k(i)}| d|x^*\mu| < 2^{-n+1}.$$

Поэтому

$$\sup\{\int_\Omega |z - z_{k(i)}| d|x^*\mu| : x^* \in S(x^*)\} \longrightarrow 0, \quad \text{если} \quad i \to \infty\,. \tag{3}$$

Ввиду того, что $||| \bullet |||$ мажорирует исходную норму пространства X, последовательность $\{z_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ будет фундаментальной и, следовательно, сходящейся в $(X, \| \bullet \|)$ к некоторому элементу z'. Учитывая (3), получаем для любого $x^* \in X^*$

$$\int_\Omega z' dx^*\mu = x^*(z') = \lim_{k\to\infty} x^*(z_k) = \lim_{i\to\infty} \int_\Omega z_{k(i)} dx^*\mu = \int_\Omega z dx^*\mu.$$

Так как μ – базисная мера, то $z = z'$ и, в силу (3), $z = \lim_{k\to\infty} z_k$ по норме $||| \bullet |||$. Итак, X в норме $||| \bullet |||$ – банахово пространство. По теореме об обратном операторе нормы $|||\bullet|||$ и $\|\bullet\|$ эквивалентны. Существует такая постоянная $C > 0$, что для каждого $x \in X$ $C\|x\| > |||x|||$. Если f, $g \in X$ и $|f(\omega)| > |g(\omega)|$ п.в. на Ω, то, очевидно, $|||f||| > |||g|||$ и, значит, $C\|f\| > \|g\|$. ■

Следующая теорема является обратной к теореме 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть для меры μ выполнены следующие условия:*

а) замыкание $Lin\{\mu(A) : A \in \Sigma\}$ совпадает с X;

б) для конечнозначных функций $f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$, $\quad g = \sum_{k=1}^{m} d_k \chi_{D_k}$ условие $|f| \geq |g|$ влечет неравенство

$$C\|\sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k)\| \geq \|\sum_{k=1}^{m} d_k \mu(D_k)\|,$$

где C – постоянная, не зависящая от f и g.

Тогда μ – базисная мера.

Доказательство. Вначале заметим, что стандартными рассуждениями через равномерное приближение измеримой функции счетнозначными из условия б) легко получить, что для любых слабо интегрируемых функций f, g неравенство $|f| \geq |g|$ влечет неравенство $C\|\int_\Omega f d\mu\| \geq \|\int_\Omega g d\mu\|$.

Теперь перейдем собственно к доказательству. Найдем для каждого $x \in X$ слабо интегрируемую функцию $f \in M(\lambda)$ с $\int_\Omega f d\mu = x$. Для этого воспользуемся условием а) и выделим последовательность $\{f_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ конечнозначных функций, для которых $\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k d\mu = x$. Выберем подпоследовательность $\{f_{k(i)}\}_{i \in \mathbf{N}}$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\|\int_\Omega f_{k(i)} d\mu - \int_\Omega f_{k(i+1)} d\mu\| \leq 2^{-i}.$$

Зафиксируем $x^* \in S(X^*)$ и $i \in \mathbf{N}$. Пусть

$G_1 = \{\omega \in \Omega : (f_{k(i)} - f_{k(i+1)}) \geq 0\}$,

$G_2 = \{\omega \in \Omega : (f_{k(i)} - f_{k(i+1)}) < 0\}$,

H_1 – множество отрицательности заряда $x^*\mu$ на Ω,

H_2 – множество положительности заряда $x^*\mu$ на Ω.

Определим функцию

$$h(\omega) = \begin{cases} -(f_{k(i)}(\omega) - f_{k(i+1)}(\omega)), & \omega \in G_1 \cap H_1, \\ +(f_{k(i)}(\omega) - f_{k(i+1)}(\omega)), & \omega \in G_1 \cap H_2, \\ +(f_{k(i)}(\omega) - f_{k(i+1)}(\omega)), & \omega \in G_2 \cap H_1, \\ -(f_{k(i)}(\omega) - f_{k(i+1)}(\omega)), & \omega \in G_2 \cap H_2. \end{cases}$$

Тогда $|f_{k(i)} - f_{k(i+1)}| = |h|$ и по свойству б) $|h| \le C2^{-i}$. Следовательно, для любого $x^* \in X^*$

$$x^*(h) = \int\limits_\Omega h dx^*\mu \le C2^{-i}, \quad \text{но} \quad \int\limits_\Omega h dx^*\mu = \int\limits_\Omega |f_{k(i)}(\omega) - f_{k(i+1)}(\omega)| d|x^*\mu|.$$

Мы доказали следующее неравенство:

$$\int\limits_\Omega |f_{k(i)}(\omega) - f_{k(i+1)}(\omega)| d|x^*\mu| \le C2^{-i}$$

для любого $x^* \in S(X^*)$.

Рассуждения, аналогичные проведенным в теореме 2.1, показывают, что последовательность $\{f_{k(i)}\}_{i\in\mathbf{N}}$ сходится п.в. по мере λ к некоторой функции f и для любого $x^* \in S(X^*)$ имеем $f \in L_1(\Omega, \Sigma, |x^*\mu|)$ и $\int_\Omega f dx^*\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k dx^*\mu$. Поэтому, f – искомая функция.

Докажем, что каждому элементу соответствует единственная функция. Для этого достаточно доказать, что нулю пространства X соответствует единственная функция $f = 0$. Предположим противное: пусть существует функция f', отличная от нуля на множестве положительной меры, и для любого $x^* \in S(X^*)$ $\int_\Omega f'(\omega) dx^*\mu = 0$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\lambda(\{\omega \in \Omega : |f'(\omega)| \ge \varepsilon\}) \ne 0.$$

Так как $\lambda(A) \le \|\mu\|(A)$ для любого множества $A \in \Sigma$, то существует множество $D \in \Sigma$, $\mu(D) \ne 0$, на котором $|f'(\omega)| \ge \varepsilon$. Определим функцию $g = \varepsilon\chi_D$. Имеем $|f'(\omega)| \ge |g(\omega)|$ п.в. на Ω, и, следовательно, $\|\varepsilon\mu(D)\| = 0$. Противоречие, так как $\mu(D) \ne 0$. ■

З а м е ч а н и е. Как видно из доказательства теоремы 2.1, пространство с базисной мерой можно наделить такой эквивалентной нормой, что утверждение теоремы 2.1 выполняется с $C = 1$. Для удобства дальнейших оценок будем считать, что пространство X наделено именно такой нормой.

Тогда при естественном упорядочении ($f \ge 0$, если $f(\omega) \ge 0$ п.в. на Ω) X будет банаховой решеткой (см. [4, с. 1]). Выполнение аксиом банаховой решетки сразу же вытекает из следующей леммы.

Лемма 2.3. *Пусть X – банахово пространство с базисной мерой μ. Тогда для любого $x \in X$ и любого $A \in \Sigma$ функция $x|_A$ принадлежит X, где*

$$x|_A = \begin{cases} x(\omega), & \omega \in A; \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в доказательстве теоремы 2.2, построим последовательность $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ конечнозначных функций, стремящуюся к x сразу в трех смыслах: по норме, почти всюду и в метрике всех $L_1(\Omega, \Sigma, |x^*\mu|)$. Ввиду поточечной мажорации имеем $\|f_n|_A - f_m|_A\| \le \|f_n - f_m\| \longrightarrow 0$, если n, $m \to \infty$, т.е. элементы $f_n|_A$ стремятся по норме к некоторому $y \in X$. На любом линейном функционале $x^* \in X$ имеем

$$\int\limits_{\Omega} y dx^*\mu = x^*(y) = \lim_{n\to\infty} x^*(f_n|_A) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} f_n|_A dx^*\mu.$$

В связи с единственностью разложения элемента по базисной мере это означает, что $x|_A = y \in X$. ■

Для пространств с базисной мерой имеют место теоремы, аналогичные теоремам об интеграле Лебега.

Лемма 2.4. *Для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $\|\mu(A)\| < \delta$, то $\|x|_A\| < \varepsilon$ для любого $A \in \Sigma$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует такая счетнозначная функция $y \in X$, что $|y(\omega) - x(\omega)| < \varepsilon_1$ равномерно на Ω. Для каждого $A \in \Omega$ $\|x|_A - y|_A\| \le \varepsilon_1 \|\mu\|(\Omega)$, поэтому утверждение леммы достаточно доказать для счетнозначной функции. Ввиду теоремы Орлича–Петтиса (см. [2, с. 11]) и предыдущей леммы разложение $y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \chi_{C_n}$ в ряд по участкам постоянства сходится по норме. Существует такое $N \in \mathbf{N}$, что

$$\|\sum_{n=N+1}^{\infty} b_n \chi_{C_n}\| < \varepsilon/4\,.$$

Положим $a = \max\{|b_1|, |b_2|, \dots, |b_N|\}$, $\delta = \min\{\varepsilon/4, \varepsilon/4a\}$ и $D = \bigcup_{n=N+1}^{\infty} C_n$, $E = \bigcup_{n=1}^{N} C_n$. Тогда для каждого $A \in \Sigma$ с $\|\mu(A)\| < \delta$ имеем

$$\|y|_A\| \le \|y|_{A\cap E}\| + \|y|_{A\cap D}\| \le a\|\mu(A)\| + \|\sum_{n=N+1}^{\infty} b_n \chi_{C_n}\| \le \varepsilon.$$ ■

Теорема 2.5 (теорема о мажорируемой сходимости). *Пусть последовательность $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ сходится п.в. по мере λ на Ω и при всех $k \in \mathbf{N}$ $|x_k(\omega)| \le |y(\omega)|$, где $y \in X$. Тогда существует такой элемент $x \in X$, что последовательность $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ сходится к x по норме.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно сопоставить теорему Егорова и предыдущую лемму. ■

Воспользовавшись этой теоремой и утверждением 1.a.8 из [4], получаем

Следствие 2.6. *Если банахово пространство X имеет базисную меру, то X изоморфно порядково непрерывной банаховой решетке со слабой единицей (слабой единицей будет элемент $\mu(\Omega) = \chi_\Omega$).*

Теперь пусть обратно: X – порядково непрерывная банахова решетка со слабой единицей. Воспользуемся теоремой 1.b.14 из [4] и отождествим X с банаховой решеткой X', являющейся идеалом в некотором пространстве $L_1(\Omega, \Sigma, \tau)$. При этом $L_\infty(\Omega, \Sigma, \tau)$ плотно в X' и X'^* – пространство всех τ-измеримых функций g, для которых $\sup\{\int_\Omega fgd\tau : f \in X', \|f\|_{X'} \leq 1\} < \infty$. Значение функционала, соответствующего g, на функции $f \in X'$ равно $\int_\Omega fgd\tau$. Рассмотрим векторную меру μ: $\Sigma \to X$, определенную равенством $\mu(A) = \chi_A$. Пусть $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, где $A, A_n \in \Sigma$ и A_n дизъюнктны. Тогда для каждого $h \in X^*$ имеем $< \chi_A, h >= \int_A hd\tau = \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} hd\tau = \sum_{n=1}^\infty < \chi_{A_n}, h >$. Ряд $\sum_{n=1}^\infty \chi_{A_n}$ слабо безусловно сходится к χ_A на Σ. Значит, он сходится по норме, и мы получили счетную аддитивность меры μ. Очевидно, что для любого функционала $g \in X^*$ выполнено $dg\mu = gd\tau$ и, следовательно, для $f \in X$ $f = \int_\Omega fd\mu$, т.е. μ –базисная мера.

Таким образом, доказана

Теорема 2.7. *Пространствами с базисной мерой являются порядково непрерывные банаховы решетки со слабой единицей и только они.*

Хотя понятие базисной меры полностью эквивалентно понятию порядково непрерывной банаховой решетки со слабой единицей, такое понятие представляется полезным, так как позволяет сформулировать некоторые результаты, для которых язык теории векторных мер является естественным.

Лемма 2.8. *Пусть X обладает базисной мерой μ, и, как это уже делалось выше, отождествим X с банаховой решеткой функции на Ω. Пусть, далее, $x_0^* \in X^*$, $\|x_0^*\| = 1$ и $\lambda = |x_0^*\mu|$ – числовая мера, причем $\mu \ll \lambda$ (согласно теореме Рыбакова [2, с. 268] такой элемент x_0^* существует). Тогда $L_\infty(\Omega, \Sigma, \lambda) \subset X \subset L_1(\Omega, \Sigma, \lambda)$, причем*

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_X \leq \|f\|_\infty \|\mu\|(\Omega).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как известно [2], для ограниченной функции

$$\begin{aligned} \|f\|_X &= \sup_{x^* \in S(X^*)} |x^*(f)| \leq \sup_{x^* \in S(X^*)} \int_\Omega |f| d|x^*\mu| \\ &\leq \|f\|_\infty \sup_{x^* \in S(x^*)} |x^*\mu(\Omega)| = \|f\|_\infty \|\mu\|(\Omega), \end{aligned}$$

т.е. одно из неравенств, а с ним и включение $L_\infty \subset X$ очевидны. В доказательстве обратного неравенства будем использовать решеточность нормы:

$$\|f\|_X = \sup\{\|fg\| : |g| = 1\} \geq \sup\{\int\limits_\Omega fgdx_0^*\mu : |g| \equiv 1\} = \int\limits_\Omega |f|d|x_0^*\mu| = \|f\|_1 .$$

■

Теорема 2.9. *Пусть X – банахово пространство с базисной мерой μ. Если мера μ имеет ограниченную вариацию, то X можно представить в виде безусловной прямой суммы бесконечного числа пространств $\{X_n\}_{n=1}^\infty$, где каждое X_n изоморфно некоторому пространству $L_1(\lambda)$.*

Доказательство. Пусть λ – мера из предыдущей леммы. Тогда $|\mu| \ll \lambda$, и по теореме Радона–Никодима $|\mu|(A) = \int_A gd\lambda$, где $g \in L_1(\lambda)$, причем $g \geq 1$, так как $\lambda \leq |\mu|$. Разобьем Ω на множества $A_n = \{t \in \Omega : n \leq g(t) < n+1, n = 1, 2, \ldots\}$ и введем пространства X_n – подпространства X. Каждое X_n состоит из функций, носители которых принадлежат множеству A_n. По лемме 2.8 $\|f\|_1 \leq \|f\|_X$, а из определения A_n следует, что для $f \in X_n$

$$\|f\|_X \leq \int\limits_\Omega |f|d|\mu| \leq (n+1)\int\limits_\Omega |f|d\lambda = (n+1)\|f\|_1.$$

Значит, пространство X_n изоморфно пространству $L_1(A_n, \Sigma|_{A_n}, \lambda)$. Очевидно, что X равно безусловной прямой сумме пространств $\{X_n\}_{n=1}^\infty$. ■

Теорема 2.10. *Пусть X – банахово пространство с базисной мерой μ. Если X изоморфно гильбертову пространству, то существует такая числовая σ-аддитивная мера τ: $\Sigma \to [0;\infty)$, что на X можно ввести скалярное умножение $< f, g >= \int_\Omega fgd\tau$ для f, $g \in X$. При этом норма, порождаемая данным скалярным произведением, будет эквивалентна исходной норме.*

Доказательство. X – порядково непрерывная банахова решетка ($f \geq 0$, если $f(\omega) \geq 0$ п.в. на Ω). Рассмотрим дизъюнктную последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ из единичной сферы пространства X. Для этой последовательности выполняются следующие свойства:

1) $\|\sum_{n=1}^m a_n f_n\| \leq \|\sum_{n=1}^p a_n f_n\|$ для любой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ при $m < p$;

2) из сходимости ряда $\sum_{n=1}^\infty a_n f_n$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^\infty a_{n(k)} f_{n(k)}$ для любой последовательности натуральных чисел $\{n(k)\}_{k=1}^\infty$ (см. лемму 2.3). Значит, последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ – безусловная базисная последовательность, и, так как X изоморфно гильбертову пространству, она эквивалентна каноническому базису l_2, т.е. любая дизъюнктная последовательность из

единичной сферы пространства X эквивалентна каноническому базису l_2. Поэтому на X можно ввести новую норму $|||\bullet|||$, обладающую следующим свойством : если элементы f и g дизъюнктны, то $|||f+g|||^2 = |||f|||^2 + |||g|||^2$, причем норма $|||\bullet|||$ будет эквивалентна норме $\|\bullet\|$ (см. доказательство леммы 1.b.13 из [4]).

Определим теперь меру $\tau : \Sigma \to [0;\infty)$. Положим $\tau(A) = |||\chi_A|||^2$ для любого $A \in \Sigma$. Требуемые σ-аддитивность меры τ и равенство $|||f||| = (\int_\Omega |f|^2 d\tau)^{1/2}$ проверяются непосредственным вычислением. ■

Список литературы

[1] *М. Дэй*, Линейные нормированные пространства. Изд-во иностр. лит., Москва (1961).

[2] *J. Distel and J.J. Uhl*, Vector measures. — Amer. Math. Soc. (Math. Surv., No. 15) (1977).

[3] *J. Lindenstrauss and L. Tzafriri*, Classical Banah spaces. I: Sequence spaces. Springer–Verlag, Berlin (1977).

[4] *J. Lindenstrauss and L. Tzafriri*, Classical Banah spaces. II: Function spaces. Springer–Verlag, Berlin (1977).

[5] *I. Singer*, Bases in Banah spaces. II. Springer–Verlag, Berlin (1981).

Vector-valued measure as a basis of the Banach space

K.V. Zheltukhin and V.M. Kadets

A new notion of the basic measure is introdused. The vector-valued measures which are basic measures are described. It is proved that the Banach space has a basic measure iff it is isomorphic to the order continuous Banach lattice with a weak unit. The connection between the properties of the Banach space and those of the basic measure is investigated.

Векторна міра як базис банахова простору

К.В. Желтухін, В.М. Кадець

Введено нове поняття базисної міри. Дано характеризацію векторнозначних мір, які є базисними мірами. Доведено, що банахів простір має базисну міру, якщо і тільки якщо він ізоморфний порядково неперервній банаховій решітці зі слабкою одиницею. Досліджено зв'язок між властивостями банахова простору та властивостями банахової решітки.