Математическая физика, анализ, геометрия
1998, т. 5, № 1/2, с. 35–48

Алгебраические поверхности с плоскостями косой симметрии

В.Ф. Игнатенко

Симферопольский государственный университет,
Украина, 333036, г. Симферополь, ул. Ялтинская, 4

Статья поступила в редакцию 9 июля 1994 года

Пусть G есть бесконечная группа, порожденная косыми отражениями относительно гиперплоскостей, в вещественном пространстве E^m; μ_j-плоскости $\Pi^{\mu_j} = \Pi^{d_j} \oplus \Pi^{\gamma_j}$ ($j = \overline{0,3}$; $\gamma_0 \geq \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3$) – линейные оболочки $G(\mathbf{u})$-орбит направлений симметрии $\mathbf{u}(\mathbf{u} \not\parallel \Pi^{\gamma_j})$. Рассматривается случай, когда $\dim \sum_k \Pi^{\gamma_k} = \sum_k \gamma_k$ и $\dim\,(\Pi^{\gamma_3} \cap \sum_k \Pi^{\gamma_k}) > 0$ ($k = 0,1,2$). Доказано, что при любом расположении Π^{γ_j} существует такой инвариант некоторой G, группа симметрий которого является нерасширяемой.

Пусть F_n есть $(m-1)$-мерная нецилиндрическая поверхность порядка n в вещественном пространстве E^m, которая инвариантна относительно бесконечной группы G, порожденной косыми (в частности, ортогональными) отражениями относительно $(m-1)$-мерных плоскостей; N – множество всех направлений симметрии, определяемых векторами; μ_j-плоскости Π^{μ_j} ($j = \overline{0,p}$) – линейные оболочки бесконечных $G(\mathbf{u})$-орбит векторов $\mathbf{u} \in \mathbf{N}$. Тогда $\Pi^{\mu_j} = \Pi^{d_j} \oplus \Pi^{\gamma_j}$; плоскости симметрии F_n, сопряженные векторам Π^{μ_j}, параллельны Π^{γ_j} [1]. При этом взаимное расположение Π^{μ_j} определяют γ_j-плоскости Π^{γ_j}.

Вектор $\mathbf{u}$ задает асимптотическое направление для поверхности F_n, если прямая, параллельная $\mathbf{u}$, проходит через несобственную точку F_n. Пусть поверхность F_n определена в декартовых координатах уравнением $\varphi(x_i) = 0$, где $\varphi(x_i)$ есть многочлен степени n от x_i ($i = \overline{1,m}$). Множеству всех поверхностей F_n, каждая из которых инвариантна относительно одной и той же группы G, соответствует множество многочленов $\{\varphi(x_i)\}$, образующее кольцо K^G. Если направления симметрии являются неасимптотическими для F_n, то кольцо K^G является конечно порожденным [2, теорема 4].

Естественно выделить два типа асимптотических направлений следующим образом. Вектор $\mathbf{u}\|\mathbf{\Pi}^{\lambda} \in \{\mathbf{\Pi}^{\mu}\mathbf{j}\}$ задает направление типа t (или s), если по крайней мере одна λ-плоскость, не лежащая на поверхности F_n и параллельная Π^{λ}, не пересекает или пересекает F_n по $(\lambda-1)$-квадрикам с общей симметрией (вещественным и мнимым). Если векторы $\mathbf{u}$ всех Π^{μ_j} относятся к типу t, то кольцо K^G является конечно порожденным [2, теорема 6]. Отметим, что в указанных здесь теоремах 4 и 6 приведены все образующие соответствующих колец K^G.

Если же векторы Π^{μ_j} относятся к типу s, то линейная оболочка множества N в общем не является прямой суммой Π^{μ_j}. При этом $\dim\,(\Pi^{\gamma_j} \cap \Pi^{\gamma_k}) \leq 1$, $j \neq k$ [2]. А.Е. Залесский [3] впервые построил в E^{11} пример группы G, алгебра инвариантов которой не является свободной. Его ученик А.Е. Велесько [4] доказал существование групп G с бесконечно порожденными кольцами инвариантов; конструкция работы [4] основана на известном примере Нагаты [5]. Результаты [3, 4] подчеркивают, в частности, сложность групп G, соответствующих направлениям симметрии типа s. Общее каноническое уравнение поверхности F_n, инвариантной относительно G, приведено в теореме 10 обзорной статьи [1]. Эта теорема дает принципиальную схему строения полной группы симметрий $\bar{G}$ поверхности F_n, поэтому может служить основой для исследования групп G, $\bar{G}$ и колец их инвариантов.

При изучении геометрии групп G описание взаимного расположения Π^{γ_k} $(1 < k \leq p)$ и $\Pi^{\gamma_0} + \ldots + \Pi^{\gamma_t}$ $(t < k)$ относится к числу первоочередных проблем. Ранее полностью изучено взаимное расположение трех Π^{γ_j} $(p = 2)$[6]. Один из ключевых случаев расположения четырех Π^{γ_j} рассмотрен в [7]. В настоящей статье доказана следующая

Теорема. *Пусть любые две из γ_j-плоскостей Π^{γ_j} $(j = \overline{0,3})$ пересекаются только в одной точке, причем $\gamma_0 \geq \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3$ и $\dim\,(\Pi^{\gamma_0} + \Pi^{\gamma_1} + \Pi^{\gamma_2}) = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2$. Тогда расположение Π^{γ_j} может быть произвольным, а именно: при любом расположении Π^{γ_j} существует поверхность F_n с некоторой группой G, являющейся ее полной группой симметрий $\bar{G}$.*

Эта теорема анонсирована в [8]. При ее доказательстве (пп. 1^0–10^0) найдены полные системы данных соответствующих групп G [9].

1^0. Введем следующие обозначения: $\gamma_0 = \lambda$, $\gamma_1 = \mu$, $\gamma_2 = \nu$, $\gamma_3 = \sigma$ $(\lambda \geq \mu \geq \nu \geq \sigma)$; $\Pi^{r_1} = \Pi^{\lambda} \oplus \Pi^{\mu}$, $\Pi^{r_2} = \Pi^{\lambda} \oplus \Pi^{\nu}$, $\Pi^{r_3} = \Pi^{\mu} \oplus \Pi^{\nu}$, $\Pi^{r} = \Pi^{r_1} \oplus \Pi^{\nu}$, $\Pi^{v} = \Pi^{\sigma} \cap \Pi^{r}$, $\Pi^{v_t} = \Pi^{\sigma} \cap \Pi^{r_t}$ $(t = 1, 2, 3)$. Запись $\Pi^{v} = F\Pi^{v}$ будет показывать, что расположение v-плоскости Π^{v} может быть произвольным. Не нарушая общности, положим $d_j = 1$ и $\sigma = v$. При этом координатные оси, выбранные соответствующим образом, переобозначим: $\Pi^{\mu_0} = \Pi^1(y_1) \oplus \Pi^{\lambda}(z_i)$, $i = \overline{1,\lambda}$; $\Pi^{\mu_1} = \Pi^1(y_2) \oplus \Pi^{\mu}(z_{\lambda+j})$, $j = \overline{1,\mu}$; $\Pi^{\mu_2} = \Pi^1(y_3) \oplus \Pi^{\nu}(z_{r_1+k})$, $k = \overline{1,\nu}$; $\Pi^{d_4} = \Pi^1(y_4)$.

Поверхность F_n $(n>2)$ с полной группой симметрий $\bar{G}=G$, не допускающей расширения, зададим уравнением

$$R\left(y_1^2+\sum_{i=1}^{\lambda}\xi_i z_i\right)+S\left(y_2^2+\sum_{j=1}^{\mu}\zeta_j z_{\lambda+j}\right)$$

$$+T\left(y_3^2+\sum_{k=1}^{\nu}\chi_k z_{r_1+k}\right)+Py_4^2=c\,, \tag{1}$$

где многочлены R, S, T, P и линейные функции ξ_i, ζ_j, χ_k зависят от переменных x_τ $(\tau=\overline{1,q}\geq 2)$ и являются неопределенными.

Случай $\Pi^v\in\Pi^{r_t}$ $(1\leq t\leq 3)$ аналогичен $p=2$.

$\mathbf{2^0}$. $v_1>0$, $v_2>0$, $v_3=0$. Запишем в Π^r следующие уравнения Π^v:

$$z_{v+\varepsilon}=\sum_{p=1}^{v}a_{\varepsilon p}z_p,\quad \varepsilon=\overline{1,\lambda-v}\,; \tag{2}$$

$$z_{\lambda+j}=\sum_{p=1}^{v}b_{jp}z_p,\quad j=\overline{1,\mu}\,; \tag{3}$$

$$z_{r_1+k}=\sum_{p=1}^{v}c_{kp}z_p,\quad k=\overline{1,\nu}\,; \tag{4}$$

$\operatorname{rang}\|b_{jp}\|=v-v_2$, $\operatorname{rang}\|c_{kp}\|=v-v_1$ и $\sum_j b_{jp}^2>0$, $\sum_k c_{kp}^2>0$ при любом p.

В Π^{r_1} v_1-плоскость Π^{v_1} определяется (2), (3) и уравнением $\sum_{p=1}^{v}c_{kp}z_p=0$ (см. (4)); Π^{v_2} в Π^{r_2} – уравнениями (2), (4) и $\sum_{p=1}^{v}b_{jp}z_p=0$. Если $z_p=0$, то (2)–(4) задают точку O $(v_3=0)$.

Новые координатные оси Oz'_p поместим в Π^v; соответствующие формулы преобразования координат имеют вид

$$z_p=z'_p,\quad p=\overline{1,v}\,;$$

$$z_{v+\varepsilon}=z'_{v+\varepsilon}+\sum_{p=1}^{v}a_{\varepsilon p}z'_p,\quad \varepsilon=\overline{1,\lambda-v}\,;$$

$$z_{\lambda+j}=z'_{\lambda+j}+\sum_{p=1}^{v}b_{jp}z'_p,\quad j=\overline{1,\mu}\,;$$

$$z_{r_1+k}=z'_{r_1+k}+\sum_{p=1}^{v}c_{kp}z'_p,\quad k=\overline{1,\nu}\,; \tag{5}$$

другие координатные оси неизменны. Рассмотрим уравнение

$$R\left(y_1^2+\sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-v}\xi_{v+\varepsilon}z'_{v+\varepsilon}\right)+S\left(y_2^2+\sum_{j=1}^{\mu}\zeta_j z'_{\lambda+j}\right)$$

$$+T\left(y_3^2+\sum_{k=1}^{\nu}\chi_k z'_{r_1+k}\right)+P\left(y_4^2+\sum_{p=1}^{v}\kappa_p z'_p\right)=c\,, \tag{6}$$

где κ_p – линейные функции от x_τ. Уравнение (1) приводится к (6) с помощью преобразования (5), если

$$R\left(\xi_p+\sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-v}a_{\varepsilon p}\xi_{v+\varepsilon}\right)+S\sum_{j=1}^{\mu}b_{jp}\zeta_j+T\sum_{k=1}^{\nu}c_{kp}\chi_k=P\kappa_p,\quad p=\overline{1,v}\,. \tag{7}$$

Следовательно, имеет место

Лемма 1. *Для поверхности F_n, заданной уравнением (1), возможен случай $v_1>0$, $v_2>0$, $v_3=0$ при условии (7).*

Пусть

$$P=R+S+T\,; \tag{8}$$

$$\kappa_p=\xi_p+\sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-v}a_{\varepsilon p}\xi_{v+\varepsilon}=\sum_{j=1}^{\mu}b_{jp}\zeta_j=\sum_{k=1}^{\nu}c_{kp}\chi_k,\quad p=\overline{1,v}\,. \tag{9}$$

Так как ранг каждой из матриц $\|b_{jp}\|$ и $\|c_{kp}\|$ меньше v, то соотношения (9) дают линейную зависимость между ξ_i. Но это исключается, поскольку поверхность F_n отличная от цилиндра. Значит, из леммы 1 вытекает

Следствие. *При соотношениях (8) и (9) условие (7) не выполняется.*

Приведем полную систему данных специальной группы G, для которой реализуется (7).

Пусть $v_1=v_2=1$. Функции κ_p, $p=\overline{1,v-1}$, зададим формулами (9). Положим

$$\kappa_v=\xi_v+\sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-v}a_{\varepsilon v}\xi_{v+\varepsilon}\,. \tag{10}$$

Выполнение (7) для этой κ_v достигается особым строением многочленов S и T:

$$S=S_0\kappa_v,\quad T=T_0\kappa_v,\quad S_0\neq cT_0\,. \tag{11}$$

Из (7), (8), (10), (11) находим

$$S_0 \sum_{j=1}^{\mu} b_{jv}\zeta_j + T_0 \sum_{k=1}^{\nu} c_{kv}\chi_k = (S_0 + T_0)\kappa_v \,. \tag{12}$$

Поскольку κ_v не удовлетворяет соотношениям (9), имеем линейные функции

$$A_1 = \sum_{j=1}^{\mu} b_{jv}\zeta_j - \kappa_v \,;$$

$$A_2 = \sum_{k=1}^{\nu} c_{kv}\chi_k - \kappa_v \,. \tag{13}$$

При специальном выборе ζ_j и κ_v функция $A_1 \neq cA_2$. Из (12), (13) следует, что $S_0 A_1 + T_0 A_2 = 0$. Значит,

$$S_0 = S_1 A_2, \quad T_0 = -S_1 A_1 \,. \tag{14}$$

Таким образом, получена

Лемма 2. *Пусть в уравнении (1) поверхности F_n многочлены R, S, T, P удовлетворяют формулам (8), (11), (14). Тогда v-плоскость $\Pi^v = F\Pi^v$, если $v_1 = v_2 = 1$ и $v_3 = 0$.*

Утверждения типа лемм 1 и 2 полезны, в частности, тем, что выделяют некоторые ограничения на выбор множества плоскостей, отражения относительно которых принадлежат группе G.

3^0. $v_1 > 0$, $v_2 = 0$, $v_3 > 0$. Зададим Π^v в Π^r следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} z_i &= \sum_{p=1}^{v} a_{ip} z_{\lambda+p}, \quad i = \overline{1,\lambda}\,; \\ z_{\lambda+v+\varepsilon} &= \sum_{p=1}^{v} b_{\varepsilon p} z_{\lambda+p}, \quad \varepsilon = \overline{1, \mu - v}\,; \\ z_{r_1+k} &= \sum_{p=1}^{v} c_{kp} z_{\lambda+p}, \quad k = \overline{1,\nu}\,, \end{aligned} \tag{15}$$

где $\operatorname{rang} \|a_{ip}\| = v - v_3$, $\operatorname{rang} \|c_{kp}\| = v - v_1$ и $\sum_i a_{ip}^2 > 0$, $\sum_k c_{kp}^2 > 0$.

Уравнения (15) определяют в Π^r новую систему координат

$$z_i = z'_i + \sum_{p=1}^{v} a_{ip} z'_{\lambda+p}, \quad i = \overline{1,\lambda}\,;$$

$$z_{\lambda+p} = z'_{\lambda+p}, \quad p = \overline{1, v}\,;$$

$$z_{\lambda+v+\varepsilon} = z'_{\lambda+v+\varepsilon} + \sum_{p=1}^{v} b_{\varepsilon p} z'_{\lambda+p}, \quad \varepsilon = \overline{1, \mu - v}\,;$$

$$z_{r_1+k} = z'_{r_1+k} + \sum_{p=1}^{v} c_{kp} z'_{\lambda+p}, \quad k = \overline{1, \nu}\,. \tag{16}$$

Так как $\Pi^v = \Pi^v(z'_{\lambda+p})$, то с учетом (16) уравнение (1) допускает вид

$$R\left(y_1^2 + \sum_{i=1}^{\lambda} \xi_i z'_i\right) + S\left(y_2^2 + \sum_{\varepsilon=1}^{\mu-v} \zeta_{j+\varepsilon} z'_{\lambda+v+\varepsilon}\right)$$

$$+T\left(y_3^2 + \sum_{k=1}^{\nu} \chi_k z'_{r_1+k}\right) + P\left(y_4^2 + \sum_{p=1}^{v} \eta_p z'_{\lambda+p}\right) = c\,,$$

если

$$R\sum_{i=1}^{\lambda} a_{ip}\xi_i + S\left(\zeta_p + \sum_{\varepsilon=1}^{\mu-v} b_{\varepsilon p}\zeta_{v+\varepsilon}\right) + T\sum_{k=1}^{\nu} c_{kp}\chi_k = P\eta_p, \quad p = \overline{1, v}\,. \tag{17}$$

При $v_0 = \min(v - v_1, v - v_2)$ функции η_l $(l = \overline{1, v_0})$ можно задать формулами

$$\eta_l = \sum_{i=1}^{\lambda} a_{il}\xi_i = \zeta_l + \sum_{\varepsilon=1}^{\mu-v} b_{\varepsilon l}\zeta_{v+\varepsilon} = \sum_{k=1}^{\nu} c_{kl}\chi_k\,. \tag{18}$$

Функции η_p $(p > v_0)$ аналогично определить нельзя, т.е. имеет место утверждение типа леммы 1, которое выделять не будем.

Условие (17) выполняется, если, скажем, $v_1 = v_3 = 1$ (ср. (7) и (17)). При этом η_l находят по формулам (18).

4⁰. $v_1 = 0$, $v_2 > 0$, $v_3 > 0$. Пусть v-плоскость Π^v (как и выше, в Π^r) определяется уравнениями

$$z_i = \sum_{p=1}^{v} a_{ip} z_{r_1+p}, \quad k = \overline{1, \lambda}\,;$$

$$z_{\lambda+j} = \sum_{p=1}^{v} b_{jp} z_{r_1+p}, \quad \varepsilon = \overline{1, \mu}\,;$$

$$z_{r_1+v+\varepsilon} = \sum_{p=1}^{v} c_{\varepsilon p} z_{r_1+p}, \quad \varepsilon = \overline{1, \nu - v}\,; \tag{19}$$

$\operatorname{rang}\|a_{ip}\| = v - v_3$, $\operatorname{rang}\|c_{jp}\| = v - v_2$ и $\sum_i a_{ip}^2 > 0$, $\sum_j c_{jp}^2 > 0$.

На основании (19) находим формулы преобразования координат вида (16). В дальнейшем рассуждения п. 3^0 переносятся в этот пункт практически без изменений.

5^0. $v_1 > 0$, $v_2 = v_3 = 0$. Уравнения (2)–(4) определяют Π^v в Π^r ($\operatorname{rang} \|b_{jp}\| = v$).

В рассматриваемом случае имеют место утверждения, аналогичные леммам 1, 2. Но выбор функций κ_p несколько шире: можно положить

$$\kappa_p = \sum_{j=1}^{\mu} b_{jp}\zeta_j, \quad p = \overline{1, v}\,.$$

Случаи $v_2 > 0$, $v_1 = v_3 = 0$ и $v_3 > 0$, $v_1 = v_2 = 0$ описываются с использованием формул (15), (19) и ничего нового не вносят.

6^0. $v_1 = v_2 = v_3 = 0$. Здесь также уравнения (2)–(4) задают Π^v. Но по формулам (9) находятся все κ_p. Поэтому справедлива

Лемма 3. *Если $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, то $\Pi^v = F\Pi^v$.*

7^0. $v_t > 0$ $(t = 1, 2, 3)$. Изучение этого случая требует модификации способа, примененного для доказательства лемм 1, 3.

Уравнения (2) и (3) задают Π^{v_1} в Π^{r_1}, если в них индекс v заменить на v_1 при условии $\operatorname{rang} \|b_{jp}\| = v_1$. С учетом этой замены первые три из формул (5) определяют в Π^{r_1} новую координатную систему, в которой уравнение (1) поверхности F_n примет вид (6); условие (7) изменится соответственно новым формулам преобразования координат. Пусть

$$\kappa_p = \lambda_0^{-1}\left(\xi_p + \sum_{\varepsilon=1}^{\lambda - v_1} a_{\varepsilon p}\xi_{v+\varepsilon}\right) = \lambda_1^{-1}\sum_{j=1}^{\mu} b_{jp}\zeta_j\,, \tag{20}$$

где числа λ_0 и λ_1 отличны от нуля. Тогда

$$P = \lambda_0 R + \lambda_1 S\,. \tag{21}$$

Используем далее v_3-плоскость $\Pi^{v_3} \in \Pi^{r_3}$, которая определяется второй и третьей формулами из (15), если p и v заменить на q и v_3 соответственно при $\operatorname{rang} \|c_{kq}\| = v_3$. Как и в п. 3^0, находим уравнение F_n в новой системе координат:

$$R\left(y_1^2 + \sum_{\varepsilon=1}^{\lambda - v_1} \xi_{v_1+\varepsilon} z'_{v_1+\varepsilon}\right) + S\left(y_2^2 + \sum_{\varepsilon=1}^{\mu - v_3} \zeta_{v_3+\varepsilon} z'_{\lambda+v_3+\varepsilon}\right)$$

$$+T\left(y_3^2+\sum_{k=1}^{\nu}\chi_k z'_{r_1+k}\right)+P\left(y_4^2+\sum_{p=1}^{v_1}\kappa_p z'_p+\sum_{q=1}^{v_3}\eta_q z'_{\lambda+q}\right)=c\,, \qquad (22)$$

где

$$S\left(\zeta_q+\sum_{\varepsilon=1}^{\mu-v_3}b_{\varepsilon q}\zeta_{v_3+\varepsilon}\right)+T\sum_{k=1}^{\nu}c_{kq}\chi_k=P\eta_q, \quad q=\overline{1,v_3}\,. \qquad (23)$$

Пусть

$$\eta_q=\zeta_q+\sum_{\varepsilon=1}^{\mu-v_3}b_{\varepsilon q}\zeta_{v_3+\varepsilon}=\lambda_2^{-1}\sum_{k=1}^{\nu}c_{kq}\chi_k\,; \qquad (24)$$

число $\lambda_2\neq 0$. Многочлен

$$P=S+\lambda_2 T\,. \qquad (25)$$

Так как $v_1<\mu$ и $v_3<\nu$, то κ_p и η_q можно выбрать линейно независимыми по формулам (20) и (24). Из (21), (25) получим

$$\lambda_2 T=\lambda_0 R+(\lambda_1-1)S, \quad \lambda_1\neq 1\,. \qquad (26)$$

8^0. Примененный в п. 7^0 способ построения соответствующего уравнения поверхности F_n позволяет, в частности, изучить полностью случай $v_1>0$, $v_2=0$, $v_3>0$ (п. 3^0).

Действительно, если $v=v_1+v_3$, то указанный случай рассмотрен в п. 7^0. При $v-v_1-v_3=\omega>0$ выберем некоторую $\Pi^\omega=\Pi^v\ominus(\Pi^{v_1}\oplus\Pi^{v_3})$ координатной ω-плоскостью новых переменных z''_{v_1+t}, $t=\overline{1,\omega}\leq\lambda$. Для этого $\Pi^\omega\in\Pi^r$ в координатной системе п. 7^0 зададим уравнениями

$$\begin{aligned}
&z'_p=0, \quad p=\overline{1,v_1}\,;\\
&z'_{v_1+\omega+\delta}=\sum_{t=1}^{\omega}a_{\delta t}z'_{v_1+t}, \quad \delta=\overline{1,\lambda-v_1-\omega}\,,\\
&z'_{\lambda+q}=0, \quad q=\overline{1,v_3}\,;\\
&z'_{\lambda+v_3+\varepsilon}=\sum_{t=1}^{\omega}b_{\varepsilon t}z'_{v_1+t}, \quad \varepsilon=\overline{1,\mu-v_3}\,;\\
&z_{r_1+k}=\sum_{t=1}^{\omega}c_{kt}z'_{v_1+t}, \quad k=\overline{1,\nu}\,,
\end{aligned} \qquad (27)$$

где $\operatorname{rang}\|b_{\varepsilon t}\|=\operatorname{rang}\|c_{kt}\|=\omega$.

Уравнение (27) определяет в Π^r координатные оси Oz''_i ($i=\overline{1,r}$), см. (15) и (16). Теперь уравнение (22) принимает вид

$$R\left(y_1^2+\sum_{\delta=1}^{\lambda-v_1-\omega}\xi_{v_1+\omega+\delta}z''_{v_1+\omega+\delta}\right)+S\left(y_2^2+\sum_{\varepsilon=1}^{\mu-v_3}\zeta_{v_3+\varepsilon}z''_{\lambda+v_3+\varepsilon}\right)$$

$$+T\left(y_3^2+\sum_{k=1}^{\nu}\chi_k z''_{r_1+k}\right)+P\left(y_4^2+\sum_{p=1}^{v_1}\kappa_p z''_p+\sum_{t=1}^{\omega}\kappa_{v_1+t}z''_{v_1+t}+\sum_{q=1}^{v_3}\eta_q z''_{\lambda+q}\right)=c\,. \tag{28}$$

Запишем аналогичные (23)–(26) соотношения

$$R\left(\xi_{v_1+t}+\sum_{\delta=1}^{\lambda-v_1-\omega}a_{\delta t}\xi_{v_1+\omega+\delta}\right)+S\sum_{\varepsilon=1}^{\mu-v_3}b_{\varepsilon t}\zeta_{v_3+\varepsilon}$$

$$+T\sum_{k=1}^{\nu}c_{kt}\chi_k=P\eta_{v_1+t},\quad t=\overline{1,\omega}\,; \tag{29}$$

$$\eta_{v_1+t}=\xi_{v_1+t}+\sum_{\delta=1}^{\lambda-v_1-\omega}a_{\delta t}\xi_{v_1+\omega+\delta}=\lambda_3^{-1}\sum_{\varepsilon=1}^{\mu-v_3}b_{\varepsilon t}\zeta_{v_3+\varepsilon}=\lambda_4^{-1}\sum_{k=1}^{\nu}c_{kt}\chi_k\,, \tag{30}$$

$$v_1+v_3<\nu;\quad P=R+\lambda_3 S+\lambda_4 T\,. \tag{31}$$

Из (21), (26), (31) находим

$$\lambda_0(1-\lambda_2^{-1}\lambda_4)=1,\quad \lambda_0\neq 1;\quad \lambda_3=\lambda_1-\lambda_2^{-1}\lambda_4(\lambda_1-1)\,. \tag{32}$$

Множество плоскостей симметрии поверхности F_n по направлениям симметрии $\mathbf{u}||\Pi^{\mu_3}$ состоит из диаметральных плоскостей (не всех) квадрики с уравнением

$$y_4^2+\sum_{p=1}^{v_1}\kappa_p z''_p+\sum_{t=1}^{\omega}\kappa_{v_1+t}z''_{v_1+t}+\sum_{q=1}^{v_3}\eta_q z''_{\lambda+q}=c\,; \tag{33}$$

линейные функции κ_p, η_q, κ_{v_1+t} находятся по формулам (20), (24) и (30), соответственно.

Таким образом, имеет место

Лемма 4. *В случае $v_1>0$, $v_2=0$, $v_3>0$ v-плоскость $\Pi^v=F\Pi^v$. При фиксированных Π^λ, Π^μ, Π^ν каждому расположению Π^v соответствует некоторая группа G, для которой плоскости симметрии, сопряженные векторам Π^{μ_3}, являются диаметральными плоскостями квадрики с уравнением (33). В уравнении (28) поверхности F_n многочлены R, S, T устроены так, что выполняются соотношения (26), (31), (32).*

Рассмотрим теперь случаи $v_1>0$, $v_2>0$, $v_3=0$ и $v_1=0$, $v_2>0$, $v_3>0$ (пп. 2^0, 4^0).

9⁰. При $v_1 > 0$ в $\Pi^{r_2-v_1}(z'_{v_1+\varepsilon}, z'_{r_1+k})$, где $\varepsilon = \overline{1, \lambda - v_1}$, h-плоскость $\Pi^h = \Pi^v \cap \Pi^{r_2-v_1}$, считая $h > 0$, зададим уравнениями

$$z'_{\psi+\delta} = \sum_{q=1}^{h} a_{\delta q} z'_{v_1+q}, \quad \delta = \overline{1, \lambda - \psi}\,;$$

$$z'_{r_1+k} = \sum_{q=1}^{h} c_{kq} z'_{v_1+q}, \quad k = \overline{1, \nu}\,, \tag{34}$$

где $\psi = v_1 + h$ и $\operatorname{rang} \|c_{kq}\| = h$, $\sum_k c_{kq}^2 > 0$.

Как и в п. 8^0, уравнения (34) определяют в $\Pi^{r_2-v_1}$ новые координатные оси $Oz''_{v_1+\varepsilon}$ и Oz''_{r_1+k}. Уравнение (28) запишем так:

$$R\left(y_1^2 + \sum_{\delta=1}^{\lambda-\psi} \xi_{\psi+\delta} z''_{\psi+\delta}\right) + S\left(y_2^2 + \sum_{j=1}^{\mu} \zeta_j z'_{\lambda+j}\right)$$

$$+ T\left(y_3^2 + \sum_{k=1}^{\nu} \chi_k z''_{r_1+k}\right) + P\left(y_4^2 + \sum_{p=1}^{v_1} \kappa_p z'_p + \sum_{q=1}^{h} \kappa_{v_1+q} z''_{v_1+q}\right) = c\,; \tag{35}$$

функции κ_p находятся по формулам (20).

На основании (35) соотношения, аналогичные (29), имеют более простой вид

$$R\left(\xi_{v_1+q} + \sum_{\delta=1}^{\lambda-\psi} a_{\delta q} \xi_{\psi+\delta}\right) + T\sum_{k=1}^{\nu} c_{kq}\chi_k = P\kappa_{v_1+q}, \quad q = \overline{1, h}\,. \tag{36}$$

Положим

$$\kappa_{v_1+q} = \rho_0^{-1}\left(\xi_{v_1+q} + \sum_{\delta=1}^{\lambda-\psi} a_{\delta q}\xi_{\psi+\delta}\right) = \rho_1^{-1}\sum_{k=1}^{\nu} c_{kq}\chi_k\,; \tag{37}$$

ρ_0 и ρ_1 – вещественные параметры.

Согласно (35) и (37), многочлен

$$P = \rho_0 R + \rho_1 T\,. \tag{38}$$

Так как для уравнения поверхности F_n, наряду с (38), справедлива формула (21), то

$$(\lambda_0 - \rho_0)R = \rho_1 T - \lambda_1 S, \quad \lambda_0 \neq \rho_0\,. \tag{39}$$

Пусть $\omega = v - v_1 - h > 0$ $(v_3 = 0)$. Выделим некоторую ω-плоскость $\Pi^\omega = \Pi^v \ominus (\Pi^{v_1} \oplus \Pi^h)$, определяемую в Π^r уравнениями

$$z'_p = 0, \quad p = \overline{1, v_1}, \quad z''_{v_1+q} = 0, \quad q = \overline{1, h}\,;$$

$$z''_{\psi+\omega+\beta}=\sum_{t=1}^{\omega}a'_{\beta t}z''_{\psi+t},\quad \beta=\overline{1,\lambda-\psi-\omega}\,;$$
$$z'_{\lambda+j}=\sum_{t=1}^{\omega}b_{jt}z''_{\psi+t},\quad j=\overline{1,\mu}\,;$$
$$z''_{r_1+k}=\sum_{t=1}^{\omega}c'_{kt}z''_{\psi+t},\quad k=\overline{1,\nu}\,,\tag{40}$$

$\operatorname{rang}\|b_{jt}\|=\operatorname{rang}\|c'_{kt}\|=\omega$.

Выберем Π^{ω} координатной ω-плоскостью; $O\tilde{z}_i$ $(i=\overline{1,r})$ – новые оси в Π^r. Формулы преобразования координат вида (16) следуют из (40). В новой системе координат уравнение поверхности F_n имеет вид

$$R\left(y_1^2+\sum_{\beta=1}^{\lambda-\psi-\omega}\xi_{\psi+\omega+\beta}\tilde{z}_{\psi+\omega+\beta}\right)+S\left(y_2^2+\sum_{j=1}^{\mu}\zeta_j\tilde{z}_{\lambda+j}\right)+T\left(y_3^2+\sum_{k=1}^{\nu}\chi_k\tilde{z}_{r_1+k}\right)$$
$$+P\left(y_4^2+\sum_{p=1}^{v_1}\kappa_p\tilde{z}_p+\sum_{q=1}^{h}\kappa_{v_1+q}\tilde{z}_{v_1+q}+\sum_{t=1}^{\omega}\kappa_{\psi+t}\tilde{z}_{\psi+t}\right)=c\,.\tag{41}$$

Пусть в (41) функции

$$\begin{aligned}\kappa_{\psi+t}&=\lambda_5^{-1}\left(\xi_{\psi+t}+\sum_{\beta=1}^{\lambda-\psi-\omega}a'_{\beta t}\xi_{\psi+\omega+\beta}\right)\\&=\lambda_6^{-1}\sum_{j=1}^{\mu}b_{jt}\zeta_j=\lambda_7^{-1}\sum_{k=1}^{\nu}c'_{kt}\chi_k,\quad t=\overline{1,\omega}\,.\end{aligned}\tag{42}$$

Тогда из (41), (42) получим

$$P=\lambda_5R+\lambda_6S+\lambda_7T\,.\tag{43}$$

Формулы (21), (38), (43) дают, наряду с (39), следующие равенства:

$$\frac{\lambda_1}{\rho_0-\lambda_0}=\frac{\lambda_6-\lambda_1}{\lambda_0-\lambda_5}=\frac{\lambda_6}{\rho_0-\lambda_5}\,;$$
$$\frac{\rho_1}{\lambda_0-\rho_0}=\frac{\lambda_7}{\lambda_0-\lambda_5}=\frac{\lambda_7-\rho_1}{\rho_0-\lambda_5}\,;$$
$$\lambda_0\neq\lambda_5,\quad \lambda_0\neq\rho_0\neq\lambda_5\quad \lambda_1\neq\lambda_6,\quad \rho_1\neq\lambda_7\,.\tag{44}$$

При $h=0$ также используем преобразование координат, определяемое формулами (40).

Итак, получена

Лемма 5. *Если $v_1 > 0$, $v_2 > 0$ и $v_3 = 0$, то $\Pi^v = F\Pi^v$. Поверхность F_n определяется уравнением (41) при соотношениях (20), (21), (37), (38), (42)–(44).*

Аналогично устанавливается

Лемма 6. *В случае $v_1 = 0$, $v_2 > 0$, $v_3 > 0$ v-плоскость $\Pi^v = F\Pi^v$.*

10^0. Продолжим теперь изучение случая $v_t > 0$ $(t = 1, 2, 3)$, начатое в п. 7^0.

Подвергнув (22) преобразованию координат, которое находится из формул (34), получим следующее уравнение поверхности F_n:

$$R\left(y_1^2 + \sum_{\delta=1}^{\lambda-\psi} \xi_{\psi+\delta} z'_{\psi+\delta}\right) + S\left(y_2^2 + \sum_{\varepsilon=1}^{\mu-v_3} \zeta_{v_3+\varepsilon} z'_{\lambda+v_3+\varepsilon}\right) + T\left(y_3^2 + \sum_{k=1}^{\nu} \chi_k z''_{r_1+k}\right)$$

$$+ P\left(y_4^2 + \sum_{p=1}^{v_1} \kappa_p z'_p + \sum_{q=1}^{h} \kappa_{v_1+q} z''_{v_1+q} + \sum_{q'=1}^{v_3} \eta_{q'} z'_{\lambda+q'}\right) = c\,, \tag{45}$$

где для линейных функций κ_p, κ_{v_1+q}, $\eta_{q'}$ справедливы формулы (20), (37), (24), соответственно. Поэтому в (38) вещественные параметры ρ_0 и ρ_1 определяются равенствами

$$\rho_0 = \frac{\lambda_0}{1-\lambda_1}, \quad \rho_1 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - 1}\,. \tag{46}$$

Подчеркнем, что формулы (24) не противоречат (37), так как $v_3 + h < \nu$.

Пусть $\omega = v - v_3 - \psi > 0$ $(\psi = v_1 + h)$. В уравнениях (27) заменим v_1 индексом ψ, а z'_{v_1+t}, $z'_{v_1+\omega+\delta}$, z'_{r_1+k} – переменными $z''_{\psi+t}$, $z''_{\psi+\omega+\delta}$, z''_{r_1+k}. Тогда эти уравнения задают в Π^r некоторую ω-плоскость $\Pi^\omega = \Pi^v \ominus (\Pi^{v_1} \oplus \Pi^{v_3} \oplus \Pi^h)$. Более того, они определяют такие новые координатные оси $O\tilde{z}_i$ $(i = \overline{1, r})$, что $O\tilde{z}_{\psi+t} \in \Pi^\omega$ $(t = \overline{1, \omega})$; соответствующие формулы преобразования координат аналогичны (16). При этом уравнение (45) принимает вид

$$R\left(y_1^2 + \sum_{\delta=1}^{\lambda-\psi-\omega} \xi_{\psi+\omega+\rho} \tilde{z}_{\psi+\omega+\rho}\right)$$

$$+S\left(y_2^2 + \sum_{\varepsilon=1}^{\mu-v_3} \zeta_{v_3+\varepsilon} \tilde{z}_{\lambda+v_3+\varepsilon}\right) + T\left(y_3^2 + \sum_{k=1}^{\nu} \chi_k \tilde{z}_{r_1+k}\right)$$

$$+ P\left(y_4^2 + \sum_{p=1}^{v_1} \kappa_p \tilde{z}_p + \sum_{q=1}^{h} \kappa_{v_1+h} \tilde{z}_{v_1+h} + \sum_{t=1}^{\omega} \kappa_{\psi+t} \tilde{z}_{\psi+t} + \sum_{q'=1}^{v_3} \eta_{q'} \tilde{z}_{\lambda+q'}\right) = c\,. \tag{47}$$

Выделим для (47) соотношения (29)–(31) при указанной выше замене переменных и индекса v_1. Тогда, наряду с (46), получим, что в (21) параметры λ_0 и λ_1 находятся по формулам

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_4}, \quad \lambda_1 = \frac{\lambda_2\lambda_3 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}. \tag{48}$$

Поскольку (46) и (48) не дают противоречия, поверхность F_n можно задать уравнением (47) при любом расположении v-плоскости Π^v.

Следовательно, получена

Лемма 7. *Если $v_t > 0$ $(t = 1,2,3)$, то $\Pi^v = F\Pi^v$. Уравнение (47) определяет поверхность F_n, инвариантную относительно соответствующей группы G.*

На основании лемм 3–7 имеет место сформулированная во введении теорема.

В работе [10] показано, что свобода выбора μ_j-плоскостей Π^{μ_j} $(j = \overline{0,p})$ шире ограничений при любом p (см. также [11]). Доказанная теорема выделяет достаточно широкий класс групп G, для которого взаимное расположение Π^{μ_j} $(j = \overline{0,3})$ может быть произвольным.

При доказательстве теоремы продолжается разработка перестроечного метода изучения диких групп G и алгебр их инвариантов (см. [7]).

Список литературы

[1] *В.Ф. Игнатенко,* О геометрической теории инвариантов групп, порожденных отражениями. — В сб.: Итоги науки и техн. Пробл. геометрии. ВИНИТИ (1989), т. 21, с. 155–208.

[2] *В.Ф. Игнатенко,* Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии. I. — Укр. геом. сб. (1989), вып. 32, с. 48–60.

[3] *A.E. Zaleskii,* The fixed algebra of a group generated by reflections is not always free. — Arch. Math. (1983), v. 41, p. 434–438.

[4] *А.Е. Велесько,* Существование групп, порожденных отражениями, с бесконечно порожденными кольцами инвариантов — Докл. АН БССР (1986), т. 30, № 2, с. 105–107.

[5] *К. Дьедоние, Дж. Керрол, Д. Мамфорд,* Геометрическая теория инвариантов. Мир, Москва (1974).

[6] *В.Ф. Игнатенко,* Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии. II. — Укр. геом. сб. (1991), вып. 34, с. 42–51.

[7] *В.Ф. Игнатенко*, Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии. III. — Мат. физика, анализ, геометрия (1995), т. 2, № 2, с. 201–211.

[8] *В.Ф. Игнатенко*, Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии. — Тез. докл. Всесоюз. конф. по геометрии, посвященной 80-летию Н.В. Ефимова. Ростов-на-Дону (1990), с. 39.

[9] *В.Ф. Игнатенко*, Бесконечные группы, порожденные косыми отражениями. Взаимное расположение линейных оболочек четырех орбит направлений симметрии. I. Симферопольск. ун-т, Симферополь (1988), 32 с. — Деп. в УкрНИИНТИ 31.10.89, № 2373-Ук89.

[10] *В.Ф. Игнатенко*, О некоторых классах алгебраических поверхностей с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии. — Динам. системы (1989), вып. 8, с. 119–126.

[11] *В.Ф. Игнатенко*, Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии. — Бакин. междунар. тополог. конф., Баку (1987), с. 129.

Algebraical surfaces with planes of skew symmetry

V.F. Ignatenko

Let G be an infinite group generated by skew reflections with respect to hyperplanes in a real space E^m; μ_j-planes $\Pi^{\mu_j} = \Pi^{d_j} \oplus \Pi^{\gamma_j}$ ($j = \overline{0,3}$; $\gamma_0 \geq \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3$) be linear envelopes of the $G(\mathbf{u})$-orbits of directions of symmetry $\mathbf{u}(\mathbf{u} \nparallel \Pi^{\gamma_j})$. We consider a case where $\dim \sum_k \Pi^{\gamma_k} = \sum_k \gamma_k$ and $\dim\,(\Pi^{\gamma_3} \cap \sum_k \Pi^{\gamma_k}) > 0$ ($k = 0,1,2$). It is proved that for any disposition of Π^{γ_j} there exists the such an invariant of a certain G, the symmetry group of which is non-extended.

Алгебраїчні поверхні з площинами косої симетрії

В.Ф. Ігнатенко

Нехай G є нескінченна група, що породжена косими віддзеркаленнями відносно гіперплощин в дійсному просторі E^m; μ_j-площини $\Pi^{\mu_j} = \Pi^{d_j} \oplus \Pi^{\gamma_j}$ ($j = \overline{0,3}$; $\gamma_0 \geq \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3$) – лінійні оболонки $G(\mathbf{u})$-орбіт напрямів симетрії $\mathbf{u}(\mathbf{u} \nparallel \Pi^{\gamma_j})$. Розглядається випадок, коли $\dim \sum_k \Pi^{\gamma_k} = \sum_k \gamma_k$ і $\dim\,(\Pi^{\gamma_3} \cap \sum_k \Pi^{\gamma_k}) > 0$ ($k = 0,1,2$). Доведено, що при будь-якому розміщенні Π^{γ_j} існує такий інваріант деякої G, група симетрій якого є нерозширювана.