Математическая физика, анализ, геометрия
2000, т. 5, № 1/2, с. 87–94

Квантовые марковские K-системы

С.В. Нешвеев

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

Статья поступила в редакцию 12 октября 1997 года

Дана характеризация марковских состояний в терминах их модулярных групп. Доказано, что любое такое состояние факторно, в частности, некоммутативный марковский сдвиг является K-системой. По каждому перемешивающему автоморфизму Маркова построена квантовая K-система с энтропией, равной энтропии исходного автоморфизма.

После обобщения понятия энтропии на случай автоморфизма некоммутативной алгебры [5] важной задачей является перенесение понятий и результатов классической энтропийной теории на некоммутативный случай. Так, Нарнхофер и Тирринг предложили квантовую версию K-систем [10].

В работе [9] доказано следующее достаточное условие выполнения K-свойства (являющееся также необходимым в коммутативном случае).

Пусть (M, ϕ, γ) *–* W^**-динамическая система, где* M *–* W^**-алгебра,* γ *– ее* $*$*-автоморфизм,* ϕ *– точное нормальное* γ*-инвариантное состояние. Предположим, существует такая* W^**-подалгебра* M_0 *в* M*, что:*

1) $M_0 \subset \gamma(M_0)$;
2) $\cup_n(\gamma^{-n}(M_0)' \cap \gamma^n(M_0))$ *слабо плотно в* M ;
3) $\cap_n \gamma^n(M_0) = \mathbb{C}1$.

Тогда (M, ϕ, γ) *является K-системой.*

Для многих систем это условие сводит доказательство K-свойства к проверке факторности состояния. В частности, в [9] доказано, что некоммутативные марковские сдвиги обладают K-свойством. В этой работе будет дана характеризация марковских состояний в терминах их модулярных групп, попутно доказана их факторность и, таким образом, получено новое доказательство K-свойства для некоммутативных марковских сдвигов. Вложим также каждую перемешивающую марковскую систему в некоторую квантовую K-систему.

1. Пусть $B = Mat_s(\mathbb{C})$ – полная матричная алгебра. Для каждого $i \in \mathbb{Z}$ рассмотрим копию A_i алгебры B и обозначим через A бесконечное C^*-тензорное произведение $\otimes_i A_i$. Автоморфизм сдвига вправо алгебры A обозначим через γ.

Для любого подмножества J в $\mathbb{Z}$ обозначим через A_J C*-подалгебру в A, порожденную A_j, $j \in J$. Рассмотрим только такие состояния на A, которые γ-инвариантны и локально точны (т.е. точны их ограничения на A_J для любого конечного J).

Состояние ϕ на A называется марковским [1], если выполнено следующее условие: для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует вполне позитивное унитальное отображение $F_n: A_{[0,n+2]} \to A_{[0,n+1]}$, которое сохраняет состояние ϕ, а его ограничение на $A_{[0,n]}$ является тождественным отображением.

Следующая теорема может рассматриваться как некоммутативный аналог того факта, что мера на одномерной решетке является марковской в том и только том случае, когда она – гиббсовская, отвечающая потенциалу ближайшего соседа. Как будет видно ниже, этот факт легко выводится из теоремы

Теорема 1.1. *Для локально точного γ-инвариантного состояния ϕ на A следующие условия эквивалентны:*

(i) ϕ – марковское состояние ;

(ii) ϕ является отделяющим, и $\sigma_t^\phi(A_0) \subset A_{[-1,1]}$.

Если эти условия выполнены, состояние ϕ является факторным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Импликация $(i) \Rightarrow (ii)$ фактически доказана в [3], см. также [9]. Предположим, выполнено (ii). Положим $M = \pi_\phi(A)''$. Докажем сначала, что M – фактор, т.е. состояние ϕ факторно.

Покажем, что существует такая алгебра $N_- \subset A_{-1}$, что $\sigma_t^\phi(N_- \otimes A_0) \subset N_- \otimes A_{[0,1]}$. Действительно, рассмотрим алгебру, порожденную $\sigma_t^\phi(A_0)$, $t \in \mathbb{R}$, и A_1. Поскольку $A_{[0,1]}$ – фактор типа I, эта алгебра имеет вид $N_- \otimes A_{[0,1]}$. Ее образ под действием модулярной группы лежит в алгебре, порожденной $\sigma_t^\phi(A_0)$ и $A_{[0,2]}$, т.е. в $N_- \otimes A_{[0,2]}$. Таким образом,

$$\sigma_t^\phi(N_- \otimes A_0) \subset A_{[-2,1]} \cap \Big(N_- \otimes A_{[0,2]}\Big) = N_- \otimes A_{[0,1]}.$$

Аналогично доказывается, что существует $N_+ \subset A_1$ такая, что $\sigma_t^\phi(A_0 \otimes N_+) \subset A_{[-1,0]} \otimes N_+$. Тогда алгебра $\gamma^n(N_-) \otimes A_{[n,n+k]} \otimes \gamma^{n+k}(N_+)$ инвариантна относительно модулярной группы для любого $n \in \mathbb{Z}$, для любого $k \geq 1$.

Пусть N_n – алгебра, порожденная $\gamma^{-n}(N_-)$ и $\gamma^n(N_+)$, $\theta_n: N_- \otimes N_+ \to N_n$ – канонический изоморфизм, а E_n – сохраняющее ϕ условное ожидание M на алгебру, порожденную N_n и $A_{[-n,n]}$. Тогда $E_n(x)$ сильно сходится к x для любого $x \in M$.

Предположим, z лежит в центре $Z(M)$ алгебры M. Тогда $E_n(z)$ лежит в центре алгебры N_n. Положим $z_n = E_n(z)$. Предполагая, что z – проектор, возьмем $\varepsilon \in (0,1)$ и рассмотрим спектральный проектор $\chi_{(\varepsilon,1]}(z_n)$. Тогда $\chi_{(\varepsilon,1]}(z_n)$ сильно сходится к z (действительно, выберем такие непрерывные функции f и g на отрезке $[0,1]$, что $0 \leq g \leq \chi_{(\varepsilon,1]} \leq f$, $f(0) = g(0) = 0$ и $f(1) = g(1) = 1$; тогда $g(z_n) \leq \chi_{(\varepsilon,1]}(z_n) \leq f(z_n)$ и $f(z_n), g(z_n)$ сильно сходятся к $f(z) = g(z) = z$). Поскольку алгебра $N_- \otimes N_+$ содержит лишь конечное множество центральных проекторов, существует подпоследовательность $\{n_k\}_k$ натуральных чисел такая, что последовательность $\{\theta_{n_k}(p)\}_k$ слабо сходится для любого центрального проектора p в $N_- \otimes N_+$. Таким образом, множество центральных проекторов алгебры M содержится в конечном множестве $\{w - \lim_k \theta_{n_k}(p) \mid p$ – центральный проектор в $N_- \otimes N_+\}$. Следовательно, алгебра $Z(M)$ конечномерна. В частности, существует $m \in \mathbb{N}$: $\gamma^m|_{Z(M)} = id$. Тогда, в тех же обозначениях, $\gamma^{nm}(z_{nm})$ сильно сходится к z. Заметим, что $\gamma^{nm}(z_{nm})$ лежит в $A_{\{-1,1+2nm\}}$. Пусть $\{e_{ij}\}_{i,j}$ – матричные единицы алгебры A_{-1}. Для $x \in M$ положим $E(x) = \sum_i e_{i1} x e_{1i}$. E является условным ожиданием алгебры M на $A'_{-1} \cap M$ и отображает $A_{\{-1,1+2nm\}}$ на A_{2nm+1}. Положим

$$x_n = (\gamma^{-2nm} \circ E \circ \gamma^{nm})(z_{nm}) \in A_1.$$

Так как $\gamma^{2nm}(x_n)$ сходится сильно к z, то и x_n сходится сильно к z. Таким образом, $Z(M) = Z(M) \cap A_1 = \mathbb{C}1$, т. е. M – фактор.

Пусть теперь $M_n, n \geq 0$, – W*-подалгебра в M, порожденная $A_{(-\infty,n]}$ и $\gamma^n(N_+)$, а $\tilde{M} = A''_{(-\infty,-1]}$. Алгебра M_n σ_t^ϕ-инвариантна, пусть $F_n \colon M \to M_n$ – сохраняющее ϕ условное ожидание. Оно отображает $A_{[0,\infty)}$ в относительный коммутант $\tilde{M}' \cap M_n$. Поскольку $M_n \cong \tilde{M} \otimes A_{[0,n]} \otimes \gamma^n(N_+)$ и $\tilde{M}$ – фактор, этот относительный коммутант равен $A_{[0,n]} \otimes \gamma^n(N_+)$, так что $F_n = E_n|_{A_{[0,n+2)}}$ – отображение, требуемое в определении марковского состояния. ■

Следствие 1.2. *Процесс, обратный к некоммутативному марковскому процессу, также является марковским, т. е. если ϕ – марковское состояние, то для любого $n \in \mathbb{N}$ существует вполне позитивное унитальное отображение $G_n \colon A_{[-n-2,0]} \to A_{[-n-1,0]}$, сохраняющее ϕ и тождественное на $A_{[-n,0]}$.*

Следствие 1.3. *Если ϕ – марковское состояние на A, то $(\pi_\phi(A)'', \phi, \gamma)$ является К-системой.*

Следствие 1.4. *Гиббсовская мера на одномерной решетке, отвечающая потенциалу ближайшего соседа, является марковской.*

Доказательство. Пусть D_n – алгебра диагональных матриц в A_n. Отождествим C*-алгебру $D = \otimes_{n\in\mathbb{Z}} D_n$ с алгеброй непрерывных функций на одномерной решетке.

Пусть Φ – наш потенциал взаимодействия, т.е. отображение, сопоставляющее конечному подмножеству J в $\mathbb{Z}$ самосопряженный элемент $\Phi(J) \in D_J$, причем $\Phi(J+n) = \gamma^n(\Phi(J))$. Рассмотрим соответствующее гиббсовское состояние ϕ на A [4]. Его ограничение на D есть гиббсовская мера μ.

Генератором модулярной группы σ_t^ϕ является (см.[4]) дифференцирование

$$\delta(a) = i \sum_{X\subset\mathbb{Z}\ :\ X\cap J\neq\emptyset} [\Phi(X), a] \ \text{для } a \in A_J.$$

По предположению, $\Phi(X) = 0$, если диаметр X больше единицы. Таким образом, D лежит в централизаторе модулярной группы, и $\sigma_t^\phi(A_0) \subset D_{-1} \otimes A_0 \otimes D_1$. Следовательно, состояние ϕ является марковским, причем в доказательстве теоремы 1.1 мы могли взять $N_- = D_{-1}$ и $N_+ = D_1$. Тогда бы получили, что существует сохраняющее ϕ условное ожидание $A_{[0,n+2]} \to A_{[0,n]} \otimes D_{n+1}$. Это условное ожидание отображает $A_{[n+1,n+2]}$ на D_{n+1}. Таким образом, сохраняющее меру μ условное ожидание $D_{[0,n+2]} \to D_{[0,n+1]}$ отображает $D_{[n+1,n+2]}$ на D_{n+1}. Это и есть марковость. ■

2. Пусть Ω – конечное множество из s элементов и $A = (A(x,y))_{x,y\in\Omega}$ – примитивная стохастическая матрица. Рассмотрим соответствующий автоморфизм Маркова (X, μ, σ), где

$$X = \{\underline{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mid A(x_i, x_{i+1}) > 0\},\ \sigma(\underline{x})_i = x_{i+1},$$

а μ – марковская мера на X, отвечающая (единственному) инвариантному распределению вероятностей $(p(x))_{x\in\Omega}$.

Введем на (X, μ) отношения эквивалентности $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$:

$$\underline{x} \underset{\mathcal{R}_1}{\sim} \underline{y} \ \Leftrightarrow\ \text{множество } \{i \mid x_i \neq y_i\} \text{ конечно},$$

$$\underline{x} \underset{\mathcal{R}_2}{\sim} \underline{y} \ \Leftrightarrow\ \underline{x} \underset{\mathcal{R}_1}{\sim} \underline{y} \quad \text{и} \quad \prod_{i\in\mathbb{Z}} \frac{A(x_i, x_{i+1})}{A(y_i, y_{i+1})} = 1.$$

Рассмотрим соответствующие алгебры фон Неймана $W^*(\mathcal{R}_1)$ и $W^*(\mathcal{R}_2)$ [8]. Обозначим через ϕ и γ состояние и автоморфизм алгебры $W^*(\mathcal{R}_1)$, индуцированные мерой μ и автоморфизмом σ, соответственно.

Теорема 2.1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) $W^*(\mathcal{R}_1)$ – *фактор;*

2) $W^*(\mathcal{R}_2)$ – *гиперфинитный II_1-фактор, причем $W^*(\mathcal{R}_2)$ – централизатор состояния ϕ;*

3) $(W^*(\mathcal{R}_1), \phi, \gamma)$ *и* $(W^*(\mathcal{R}_2), \phi, \gamma)$ *являются K-системами, и*

$$h_\phi(\gamma) = h_\phi(\gamma|_{W^*(\mathcal{R}_2)}) = -\sum_{x,y} p(x) A(x,y) \log A(x,y).$$

Доказательство. 1) Алгебра $W^*(\mathcal{R}_1)$ порождена операторами вида L_a, где a – функция на $\mathcal{R}_1 \subset X \times X$ [8]. Рассмотрим подалгебру $A_{[n,m]}$ в $W^*(\mathcal{R}_1)$, порожденную такими операторами L_a, что $a(\underline{x}, \underline{y})$ при $x_i = y_i$, $i \in \mathbb{Z} \backslash [n, m]$, зависит лишь от координат с номерами $j \in [n-1, m+1]$, а в противном случае $a(\underline{x}, \underline{y}) = 0$. Определим функцию $a_{n,m}$ с носителем на диагонали следующим образом:

$$a_{n,m}(\underline{x}, \underline{x}) = p(x_{n-1})A(x_{n-1}, x_n)A(x_n, x_{n+1}) \dots A(x_m, x_{m+1}).$$

Тогда $L_{a_{n,m}}$ лежит в $A_{[n,m]}$ и, как нетрудно видеть, является матрицей плотности для $\phi|_{A_{[n,m]}}$. Легко также проверить, что при $k \le n$ и $l \ge m$ оператор

$$L_{a_{k,l}} L^{-1}_{a_{n,m}} = L_{\frac{a_{k,l}}{a_{n,m}}}$$

коммутирует с $A_{[n,m]}$. Следовательно, равенство $\sigma_t(L_a) = L^{it}_{a_{n,m}} L_a L^{-it}_{a_{n,m}}$, $L_a \in A_{[n,m]}$, корректно определяет однопараметрическую группу автоморфизмов алгебры $W^*(\mathcal{R}_1)$. Поскольку ϕ σ_t-инвариантно и для любой пары элементов из $\cup_n A_{[-n,n]}$ выполнено КМШ-условие, $\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ является модулярной группой состояния ϕ. В частности, существует сохраняющее ϕ условное ожидание $E_{n,m}\colon W^*(\mathcal{R}_1) \to A_{[n,m]}$. Как и в доказательстве теоремы 1.1, из того, что размерность центра алгебры $A_{[n,m]}$ не превосходит s^2, заключаем, что размерность центра алгебры $W^*(\mathcal{R}_1)$ также не превосходит s^2. С другой стороны, сейчас покажем, что автоморфизм γ – перемешивающий, т.е. $\phi(a\gamma^n(b)) \to \phi(a)\phi(b)$ для любых $a, b \in W^*(\mathcal{R}_1)$. Отсюда следует, что центр тривиален.

Для любой функции a на $\mathcal{R}_1$ обозначим через $F(a)$ ее ограничение на диагональ. Тогда формула $E(L_a) = L_{F(a)}$ задает сохраняющее ϕ условное ожидание на алгебру "диагональных" операторов, которую можно отождествить с $L^\infty(x, d\mu)$ [8]. Заметим теперь, что если $k < l$, $n < m$, $l \le n-2$, то для любых $L_a \in A_{[k,l]}$ и $L_b \in A_{[n,m]}$ верно $L_a L_b = L_b L_a = L_{ab}$; следовательно, $E(L_a L_b) = E(L_a)E(L_b)$. Поскольку на $L^\infty(x, d\mu)$ автоморфизм γ является перемешивающим, то отсюда следует, что и на всей алгебре он будет перемешивающим.

2) По доказанному в пункте 1), оператор $L_a \in A_{[n,m]}$ лежит в централизаторе состояния ϕ в том и только том случае, когда он коммутирует с $L_{a_{n,m}}$, т.е. когда носитель a содержится в $\mathcal{R}_2$. Таким образом, $W^*(\mathcal{R}_2)$ совпадает с централизатором состояния ϕ. То, что централизатор является фактором, доказывается так же, как [9, теорема 4.1 (3)].

3) Положим $M_0 = (\cup_{n\in\mathbb{N}} A_{[-n,0]})''$. Тогда для M_0 выполнены условия приведенного в начале статьи утверждения, поскольку $A_{[-n+2,n]} \subset \gamma^{-n}(M_0)' \cap \gamma^n(M_0)$ и $M = W^*(\mathcal{R}_1)$ – фактор. Таким образом, $(W^*(\mathcal{R}_1), \phi, \gamma)$ является К-системой.

Пусть $D_{[0,n]}$ – каноническая диагональ в $A_{[0,n]}$. Точно так, как в [6], доказывается, что

$$h_\phi(\gamma) = h_\phi(\gamma|_{W^*(\mathcal{R}_2)}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S(\phi|_{D_{[0,n]}}).$$

Последний предел равен энтропии автоморфизма σ пространства (X, μ). ■

Следствие 2.2. *Отношения эквивалентности $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ на (X, μ) эргодичны.* ■

З а м е ч а н и е. Если все элементы матрицы A положительны, то система $(W^*(\mathcal{R}_1), \phi, \gamma)$ будет неккоммутативным марковским сдвигом в смысле п.1.

Рассмотрим частный случай приведенной конструкции. Пусть (X, σ) – перемешивающая топологическая марковская цепь, т.е. существует такая примитивная $0-1$ матрица $A = (A(x,y))_{x,y\in\Omega}$, что $(X,\sigma) \cong (X_A, \sigma_A)$, где

$$X_A = \{\underline{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mid A(x_i, x_{i+1}) = 1\},\ \sigma_A(\underline{x})_i = x_{i+1}.$$

Обозначим через μ меру максимальной энтропии на (X,σ) (см., например, [2]). Если $\lambda = ||A||$ и $(l(x))_{x\in\Omega}$ – вектор Перрона–Фробениуса для A, то это марковская мера на X_A, отвечающая стохастической матрице $(\frac{A(x,y)l(y)}{\lambda l(x)})_{x,y\in\Omega}$. Введенные выше отношения эквивалентности на X_A совпадают и определяют отношение эквивалентности $\mathcal{R}$ на X, не зависящее от выбора изоморфизма $(X,\sigma) \to (X_A, \sigma_A)$. Как подмножество $X \times X$ $\mathcal{R}$ является множеством типа F_σ.

Известно, что $\mathcal{R}$ эргодично на (X, μ). В данном случае это легко доказать непосредственно. Более того, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.3. *Мера μ является единственной $\mathcal{R}$-инвариантной вероятностной борелевской мерой на X.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ν – другая мера. Для $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \le m$, и $x, y \in \Omega$ положим

$$\Omega_{x,y}^{(n,m)} = \left\{(x_i)_{n\le i\le m} \mid A(x, x_n) = 1,\ A(x_i, x_{i+1}) = 1,\ A(x_m, y) = 1\right\}.$$

Каждый элемент $\omega \in \Omega_{x,y}^{(n,m)}$ определяет цилиндрическое множество

$$X(x\omega y) = \{\underline{x} \mid (x_i)_{n-1\le i\le m+1} = x\omega y\}.$$

Мера ν определяется своими значениями на цилиндрических множествах.

Для любых $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_{x,y}^{(-n,n)}$ существует гомеоморфизм пространства X с графиком в $\mathcal{R}$, отображающий $X(x\omega_1 y)$ на $X(x\omega_2 y)$. Следовательно, число $\nu^{(n)}(x,y) = \nu(X(x\omega y))$ не зависит от выбора $\omega \in \Omega_{x,y}^{(-n,n)}$. Таким образом, мера ν определяется последовательностью векторов $\nu^{(n)} \in \mathbb{R}^{\Omega\times\Omega}$. При этом $\nu^{(n)} = T\nu^{(n+1)}$, где T – матрица над $\Omega \times \Omega$, $T_{(x,y)(x',y')} = A(x',x)A(y,y')$. Матрица T примитивна; пусть t ее вектор Перрона–Фробениуса. По теореме Перрона–Фробениуса каждый вектор $\nu^{(n)}$ должен быть скалярным кратным этого вектора. Следовательно, $\nu^{(n)} = \lambda^{-2n-2}t$. ∎

Таким образом, получаем К-систему типа II_1, зависящую лишь от класса топологической эквивалентности цепи (X, σ), энтропия которой совпадает с топологической энтропией цепи.

Список литературы

[1] *Л. Аккарди*, Некоммутативное марковское свойство. — Функц. анализ и его прил. (1975), т. 9, с. 1–8.

[2] *Р. Боуэн*, Методы символической динамики. Мир, Москва (1979).

[3] *В.Я. Голодец, Г.Н. Жолткевич*, Марковские состояния Кубо–Мартина–Швингера. — Теорет. и мат. физика (1983), т. 56, с. 80–86.

[4] *H. Araki*, Gibbs states of a one-dimensional quantum lattice. — Comm. Math. Phys. (1969), v. 14, p. 120–157.

[5] *A. Connes, H. Narnhofer, and W. Thirring*, Dynamical entropy of C^*-algebras and von Neumann algebras. — Comm. Math. Phys. (1987), v. 112, p. 691–719.

[6] *A. Connes and E. Størmer*, Entropy for automorphisms of II_1 von Neumann algebras. — Acta Math. (1975), v. 134, p. 289–306.

[7] *J. Cuntz and W. Krieger*, A class of C*-algebras and topological Markov chains. — Invent. Math. (1980), v. 56, p. 251–268.

[8] *J. Feldman and C.C. Moore*, Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. — Trans. AMS (1977), v. 234, p. 289–359.

[9] *V.Ya. Golodets and S.V. Neshveyev*, Non-Bernoullian quantum K-systems and systems with completely positive entropy. — Kharkov, 1997. — 40 p. – Preprint. PhTINT of NAS of Ukraine.

[10] *H. Narnhofer and W. Thirring*, Quantum K-systems. — Comm. Math. Phys. (1989), v. 125, p. 564–577.

Quantum Markov K-systems

S.V. Neshveyev

A characterization of Markov states in terms of their modular groups is given. The factoriality of such a state is proved. In particular, the non-commutative Markov shift is a K-system. For any mixing Markov automorphism, a quantum K-system with entropy equal to that of the automorphism is constructed.

Квантові марковські К-системи

С.В. Нешвєєв

Дано характеризацію марковських станів у термінах їх модулярних груп. Доведено, що усякий такий стан є факторним, зокрема, некомутативний марковський зсув є К-системою. По кожному перемішуючому автоморфизму Маркова збудована квантова К-система з ентропією, яка дорівнює ентропії вихідного автоморфизму.