Математическая физика, анализ, геометрия
2000, т. 5, № 1/2, с. 125–133

О грассмановом образе подмногообразий $F^n \subset E^{n+m}$, коразмерность которых не превосходит размерности

В.М. Савельев

*Славянский государственный педагогический институт,
Украина, 343216, г. Славянск, ул. Ген. Батюка, 19*

Статья поступила в редакцию 10 февраля 1997 года

Исследуется гипотеза А.А. Борисенко о том, что каждое касательное пространство к грассманову образу регулярного подмногообразия $F^n \subset E^{n+m}$ содержит двумерную площадку π такую, что секционная кривизна многообразия Грассмана $G_{n,n+m}$ вдоль π не превосходит 1.

Как известно, многообразие Грассмана играет важную роль в геометрии. Его дифференциально-геометрические аспекты в последнее время изучались интенсивно, что отражено в обзоре [1]. В нашей работе основным объектом изучения является кривизна многообразия Грассмана для двумерных площадок, касательных к грассманову образу подмногообразия в евклидовом пространстве.

Пусть $G_{n,n+m}$ есть множество всех ориентированных линейных подпространств размерности n в E^{n+m}, проходящих через фиксированную точку. Это множество, снабженное системой окрестностей и стандартной метрикой, является классическим симметрическим многообразием (см. K. Lechtweiss [2]). В работе [3] было показано, что секционная кривизна $G_{n,n+m}$, которую будем обозначать через $\bar{K}$, принимает лишь значения из отрезка $[0,2]$.

Пусть $F^n \subset E^{n+m}$ – регулярное ориентируемое подмногообразие в евклидовом пространстве. Построим в каждой точке нормальные m-плоскости и перенесём эти плоскости параллельно так, чтобы они проходили через фиксированную точку в E^{n+m}. Множество полученных плоскостей, рассматриваемых как точки многообразия Грассмана, называется грассмановым образом Γ^n подмногообразия $F^n \subset E^{n+m}$.

А.А. Борисенко была выдвинута гипотеза о том, что в касательном пространстве к грассманову образу регулярного (класса C^2) подмногообразия

$F^n \subset E^{n+m}$ в любой точке существует площадка, по которой кривизна многообразия Грассмана $G_{n,n+m}$ меньше или равна 1.

В работе [4] доказана

Теорема (Ю.А. Николаевский). 1. *Гипотеза А.А. Борисенко выполнена в случаях: 1) $n = 3$ и $m = 2, 3; n = 4$ и $m = 2$; 2) $n \geq m \geq 5$, кроме $n = m = 8$; 3) $m > n \geq 52$.*

2. *Если $F^n \subset E^{n+m}$ (n и m удовлетворяют 1), 2) или 3)) – подмногообразие класса C^3 и кривизна многообразия Грассмана $G_{n,n+m}$ вдоль любой площадки, касательной к его невырожденному грассманову образу, не меньше 1, то она тождественно равна 1, и подмногообразие является гиперповерхностью $F^n \subset E^{n+1} \subset E^{n+m}$.*

В настоящей работе доказана

Теорема 1. *Пусть $F^n \subset E^{n+m}$ $(n \geq 3)$ – регулярное (класса C^2) подмногообразие с невырожденным грассмановым образом Γ^n. Если $n \geq m$, то в касательном пространстве к грассманову образу в любой точке существует двумерная площадка, для которой кривизна многообразия Грассмана $G_{n,n+m}$ меньше или равна 1, кроме $F^4 \subset E^7$ и $F^4 \subset E^8$.*

Доказательство теоремы 1 опирается на ряд лемм, некоторые из которых имеют самостоятельный интерес.

Рассмотрим m-мерную плоскость π в E^{n+m}, проходящую через начало координат $O \in E^{n+m}$, и введём на $G_{m,n+m}$ локальные координаты так, чтобы координаты π были равны нулю. Многообразие Грассмана $G_{m,n+m}$ имеет размерность mn, причем касательные векторы к $G_{m,n+m}$ удобно представлять в виде $(m \times n)$-матриц. Если $X = (x_{ij}), Y = (y_{ij})$ есть два неколлинеарных вектора, касательных к $G_{m,n+m}$ в точке $Z = 0$, которые записаны в виде $m \times n$-матриц, то для секционной кривизны будем иметь [3]

$$\bar{K}(X,Y) = \frac{1/2\, Tr \Lambda_1 \Lambda_1^* + 1/2\, Tr \Lambda_2 \Lambda_2^*}{Tr(XX^*) Tr(YY^*) - (Tr(XY^*))^2}, \tag{1}$$

где $\Lambda_1 = XY^* - YX^*, \Lambda_2 = X^*Y - Y^*X$ – кососимметрические матрицы. Согласно Вонгу $\bar{K} \in [0, 2]$. Пусть x_i и y_j – вектор-столбцы матриц X и Y, соответственно. Через $\langle\, , \rangle$ будем обозначать скалярное произведение в евклидовом пространстве этих вектор-столбцов, т.е.

$$\langle x_i, y_j \rangle = \sum_{k=1}^{m} x_{ki} y_{kj}.$$

Для элементов матриц $\Lambda_{2|ij}$ и $\Lambda_{1|ij}$, $i < j$, имеем

$$\Lambda_{2|ij} = \langle x_i, y_j \rangle - \langle x_j, y_i \rangle, \Lambda_{1|ij} = \sum_{k=1}^{n} (x_{ik} y_{jk} - x_{jk} y_{ik}).$$

Заметим теперь, что если некоторая матрица Λ кососимметрическая, то $Tr(\Lambda\Lambda^*)$ есть просто сумма квадратов элементов матрицы Λ, стоящих над главной диагональю. В частности,

$$Tr(\Lambda_1\Lambda_1)/2 = (\sum_{i<j}^{n} \Lambda_{1|ij})^2 = (\sum_{i=1}^{n}[x_i, y_i])^2 .$$

Здесь квадратные скобки обозначают бивектор, построенный на векторах x_i и y_i. Таким образом, кривизна $\bar{K}$ многообразия $G_{m,n+m}$ для касательной площадки, натянутой на векторы X и Y, имеет вид

$$\bar{K}(X,Y) = \frac{P}{Q}, \tag{2}$$

где

$$P = \sum_{i=1}^{n}(\|x_i\|^2\|y_i\|^2 - \langle x_i, y_i\rangle^2)$$

$$+2\sum_{i<j}^{n}(\langle x_i, x_j\rangle\langle y_i, y_j\rangle - \langle x_i, y_j\rangle\langle x_j, y_i\rangle) + \sum_{i<j}^{n}(\langle x_i, y_j\rangle - \langle x_j, x_i\rangle)^2 ,$$

$$Q = \sum_{i<j}^{n}(\|x_i\|^2\|y_j\|^2 + \|x_j\|^2\|y_i\|^2 - 2\langle x_i, y_i\rangle\langle x_j, y_j\rangle) + \sum_{i=1}^{n}(\|x_i\|^2\|y_i\|^2 - \langle x_i, y_i\rangle^2) .$$

Лемма 1. *Пусть L^n – произвольное n-мерное подпространство в касательном пространстве к $G_{n,n+m}$, где $n \geq \frac{m^2-m}{2} + 2, n \geq 3$. Тогда в подпространстве L^n существует двумерная площадка σ такая, что $\bar{K}_\sigma \leq 1$.*

Доказательство. Известно, что многообразие Грассмана $G_{m,n+m}$ можно представить как фактор-пространство $O(m+n)/O(n)\times O(m)$. Пусть S – элемент группы $O(n)$, R – элемент группы $O(m)$. Они индуцируют автоморфизм $S\times R$ в касательном пространстве к $G_{m,n+m}$ в точке $p \in G_{m,n+m}$, действующий по следующему правилу. Если T – вектор из касательного пространства к $G_{m,n+n}$, который представляется в виде $m\times n$-матрицы, то

$$(S\times R)T = RTS ,$$

где справа стоит матричное произведение. При этих автоморфизмах кривизна $\bar{K}$ площадок сохраняется.

Пусть $T_1, T_2, \dots, T_n$ – векторы, составляющие базис подпространства $L^n \subset T_pG_{m,n+m}$. Возьмём вектор T из касательного подпространства L^n. Пусть вектор T как $(m\times n)$-матрица имеет $rankT = r \leq m$. Из линейной алгебры известно, что для всякой матрицы T размера $m \times n$ существует сингулярное разложение (SVD), $T = RDS$, где

$$D = \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & \dots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & \sigma_r & \end{array} \right), \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq \dots \geq \sigma_m \geq 0\,.$$

Рассмотрим 2-мерные площадки, проведенные через вектор T_1, и пусть $T_1 = RDS$ – его сингулярное разложение. Пусть звездочка * обозначает транспонирование матриц. Действуя в подпространстве L^n автоморфизмом $S^* \times R^*$, получим, что $(S^* \times R^*)T_1 = D$, и пусть подпространство L^n перейдет в подпространство, натянутое на векторы $Y_j = (S^* \times R^*)T_j \in T_pG_{m,n+m}$. Вычислим разность числителя и знаменателя $P - Q$ формулы (1) для двумерной площадки, натянутой на векторы D и Y (Y не коллинеарен D), из $T_pG_{m,n+m}$. Запишем матрицу Y в блочном виде $Y = (A|B)$, где A есть квадратная $m \times m$-матрица, а B – матрица размера $m \times (n-m)$. Элементы матриц A и B будем обозначать соответственно через a_{ij} и b_{is}.

Согласно [4],

$$\begin{aligned} P - Q = \sum_{i>j} [-4\sigma_i\sigma_j a_{ij}a_{ji} + (\sigma_i^2 + \sigma_j^2 - \sum_k \sigma_k^2)(a_{ij}^2 + a_{ji}^2)] \\ + \sum_{is} [b_{is}^2(\sigma_i^2 - \sum_k \sigma_k^2)] - (\sum_k \sigma_k^2 \sum_i a_{ii}^2 - (\sum_i \sigma_i a_{ii})^2). \end{aligned} \tag{3}$$

Из $n-1$ векторов $\{Y_j\}_{j=2}^n$ составим невырожденную линейную комбинацию Y такую, что $a_{ij} = 0$, $i > j$. Это можно сделать всегда, так как в силу условия леммы имеем $n \geq \frac{m^2-m}{2} + 2$. В этом случае выражение (3) будет неположительным, а следовательно $\bar{K}(D,Y) \leq 1$. ■

В работе [1] был поставлен следующий вопрос: верно ли, что в любом трехмерном подпространстве, касательном к многообразию Грассмана, есть двумерная площадка с секционной кривизной $\bar{K} \leq 1$. Доказательство леммы 2 дает положительный ответ на этот вопрос.

Лемма 2. *В произвольном трехмерном подпространстве касательного пространства к $G_{2,n+2}$ существуют площадки σ с кривизной $\bar{K}_\sigma \leq 1$.*

Доказательство. Рассмотрим выражение (3) с данными леммы 2, т.е. в формуле (3) положим $m = 2$. Аналогично рассуждениям леммы 1 в данном случае можно построить линейную комбинацию из двух неколлинеарных векторов Y_j такую, что $a_{21} = 0$. Дальнейшее доказательство очевидно.

■

Лемма 3. *Пусть $F^n \subset E^{n+2}$ есть регулярное класса C^3 подмногообразие. Тогда если секционная кривизна $G_{n,n+2}$ вдоль любой площадки, касательной к его невырожденному грассманову образу, не меньше 1, то она тождественно равна 1, и подмногообразие является гиперповерхностью $F^n \subset E^{n+1} \subset E^{n+2}$.*

Доказательство. Пусть $F^n \subset E^{n+m}$ – регулярное подмногообразие, причём грассманов образ $\psi(F^n)$ в точке $x \in F^n$ не вырожден. Выберем в евклидовом пространстве E^{n+m} систему координат так, чтобы начало координат находилось в точке $x \in F^n$, координатная плоскость $(x_1, \dots, x_n)$ совпала с касательным пространством T_xF^n к подмногообразию F^n в точке x, а координатная плоскость $(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ – с нормальным пространством N_xF^n. Пусть $A^1, A^2, \dots, A^m$ – матрицы вторых квадратичных форм подмногообразия F^n в точке x относительно нормалей $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ соответственно в базисе $(x_1, \dots, x_n)$. Тогда касательное пространство $T_{\psi(x)}\Gamma^n \subset T_{\psi(x)}G_{n,n+m}$ к грассманову образу подмногообразия F^n в точке $\psi(x) \in \Gamma^n \subset G_{n,n+m}$ будет натянуто на векторы

$$Z_j = \begin{pmatrix} L^1_{1j} & L^1_{2j} & \dots & L^1_{nj} \\ L^2_{1j} & L^2_{2j} & \dots & L^2_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L^m_{1j} & L^m_{2j} & \dots & L^m_{nj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{4}$$

где L^σ_{ij} – ij-й элемент матрицы A^σ второй квадратичной формы относительно нормали $x_{n+\sigma} (i, j = 1, 2, \dots, n; \sigma = 1, 2, \dots, m)$.

Рассмотрим теперь случай $m = 2$, т.е. случай подмногообразия $F^n \subset E^{n+2}$, где $n \geq 3$. Пусть $Z_1 = RDS$, как обычно, есть сингулярное разложение матрицы касательного вектора Z_1 к грассманову образу Γ^n подмногообразия $F^n \subset E^{n+2}$. Действуя в касательном пространстве $T_{\psi(x)}G_{n,n+2}$ автоморфизмом $S^* \times R^*$, получим, что $(S^* \times R^*)Z_1 = D$, и касательное подпространство $T_{\psi(x)}\Gamma^n$ перейдет в n-мерное подпространство, натянутое на векторы $Y_j = (S^* \times R^*)Z_j \in T_{\psi(x)}G_{n,n+2}$. Поскольку $rank Z_1 \leq 2$, то имеем

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0\,. \tag{5}$$

Пусть вектор $Y \in T_{\psi(x)}G_{n,n+2}$ принадлежит пространству $(Y_1, \dots, Y_n)$ и не коллинеарен D. Вычислим $\bar{K}(D, Y)$, по формуле (2). Чтобы оценить значение кривизны $\bar{K}(D, Y)$, достаточно найти разность между числителем и знаменателем в формуле (2). Вычитая из числителя формулы (2) знаменатель, получаем

$$-4\sigma_1\sigma_2 y_{12}y_{21} - (\sigma_1 y_{22} - \sigma_2 y_{11})^2 - \sigma_1^2\Big(\sum_{k=3}^n y_{2k}^2\Big) - \sigma_1^2\Big(\sum_{k=3}^n y_{1k}^2\Big)\,. \tag{6}$$

Для того чтобы кривизна $\bar{K}(D,Y)$ была не меньше единицы, это выражение должно быть неотрицательным.

1) Если $\sigma_2 = 0$, то пользуясь формулой (3), где $m = 2$, получаем, что $\bar{K} \geq 1$ будет иметь место при условии $y_{22} = y_{23} = \ldots = y_{2n} = 0$; т.е. все матрицы пространства $(Y_2, \ldots, Y_n)$ имеют вид

$$\left(\begin{array}{ccccc} * & | & * & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ * & | & & 0 & \end{array} \right).$$

Взяв соответствующие линейные комбинации с матрицей D, приведем Y_j $(j = 2, \ldots, n)$ к виду

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0 & | & * & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ * & | & & 0 & \end{array} \right).$$

С помощью $(n-1)$ векторов можем получить (взяв соответствующие линейные комбинации) $(n-2)$ векторов вида

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0 & | & * & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ * & | & & 0 & \end{array} \right).$$

Поэтому имеем пространство, натянутое на векторы $(D, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n)$, где

$$Y_2 = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & | & * & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a & | & & 0 & \end{array} \right).$$

Вычисляя кривизну $\bar{K}(Y_2, Y_j)(j = 3, \ldots, n)$, получаем $\bar{K}(Y_2, Y_j) \leq 1$, и равенство будет достигаться при условии $a = 0$.

2) Пусть $\sigma_2 > 0$. В этом случае нетрудно проверить, что в касательном пространстве $(D, Y_2, \ldots, Y_n)$ существует вектор Y следующего вида:

$$Y = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & | & * & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ * & | & * & \ldots & * \end{array} \right).$$

Вычисляя кривизну $\bar{K}(D,Y)$, получаем, что $\bar{K}(D,Y) \leq 1$, и равенство будет выполняться при условии $rank Y = 1$. Теперь можно пользоваться рассуждениями из п. 1.

Подействуем в касательном и нормальном пространствах в исследуемой точке, которую совместим с началом координат $O \in E^{n+m}$, описанными выше преобразованиями S и R, соответственно. Преобразованные матрицы вторых квадратичных форм суть $\tilde{A}^\alpha = \sum_{\beta=1}^{2} R^*_{\alpha\beta}\ (SA^\beta S^*)$, поэтому касательные векторы $\tilde{Z}_j$ к грассманову образу Γ^n в точке $\psi(O) \in G_{n,n+2}$ в такой системе координат имеют вид $\tilde{Z}_j = \sum_{k=1}^{n} s_{jk} Y_k$. Отсюда получаем, что подмногообразие $F^n \subset E^{n+2}$ в точке O имеет точечную коразмерность 1. ■

Пусть Λ обозначает либо поле вещественных чисел R, либо поле комплексных чисел C, либо тело кватернионов Q. Через $\Lambda(n)$ обозначается максимальная размерность над R подпространства $(n \times n)$-матриц с элементами из Λ, в котором все матрицы, кроме нулевой, не вырожденны. Аналогичная размерность для пространства симметрических ($\Lambda = R$) или эрмитовых (в случае $\Lambda = C, Q$) $(n \times n)$-матриц обозначается через $\Lambda_H(n)$. Ранее Адамсом было показано, что $R(n) = \rho(n)$, где $\rho(n)$ – функция Радона–Гурвица, определяемая следующим образом. Пусть $n = (2a+1)\,2^b$ и $b = c + 4d$, где a, b, c, d – целые числа, причем $0 \leq c < 4$, тогда $\rho(n) = 2^c + 8d$ ($\rho(n) - 1$ – это максимальное число линейно независимых векторных полей на $(n-1)$-мерной сфере). В работе [5] доказывается, что

$$\begin{aligned} R_H(n) &= \rho(n/2) + 1,\ C(n) = 2b + 2,\ C_H(n) = 2b + 1\,, \\ Q(n) &= 2b + 4,\ Q_H(n) = 2b + 1\,, \end{aligned}$$

а также указывается способ построения $\rho(n)$ вещественных $(n \times n)$-матриц, все нетривиальные линейные комбинации которых не вырожденны.

Рассмотрим подмногообразие F^8 в евклидовом пространстве E^{16}. Размерность нормального пространства подмногообразия равна 8. Следовательно, в общей ситуации существуют 8 линейно независимых вторых квадратичных форм. Согласно теореме из работы [5], максимальная размерность над R подпространства симметрических (8×8)-матриц равна $\rho(4) + 1 = 5$. Таким образом, в нормальном пространстве подмногообразия $F^8 \subset E^{16}$ можно всегда выбрать нормаль, для которой матрица второй квадратичной формы будет вырождена. Пусть A^α, $\alpha = 1, \ldots 8$, обозначают матрицы вторых квадратичных форм относительно соответствующих нормалей n_α. Выберем нормаль n_1 такую, чтобы матрица A^1 была вырождена, а базис в касательном пространстве в исследуемой точке – так, чтобы A^1 была диагональна, т.е.

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L^1_{22} & & & \\ 0 & & L^1_{33} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & L^1_{88} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, касательный вектор Z_1 к грассманову образу искомого подмногообразия, который является (8×8)-матрицей, имеет ранг ≤ 7. Подействуем автоморфизмом изотропии на этот вектор, т.е. в дальнейшем будем брать в качестве матрицы Z_1 её сингулярное разложение. Все дальнейшие рассуждения в точности повторяют рассуждения, проведенные Ю.А. Николаевским для случая $n \geq 5$. Следовательно, нами дано доказательство гипотезы А.А. Борисенко для случая, когда $m = n = 8$.

Лемма 4. *Пусть $F^n \subset E^{n+4}$ $(n \geq 5)$ – регулярное класса C^2 подмногообразие с невырожденным грассмановым образом Γ^n. Тогда в касательном пространстве к грассманову образу в любой точке существует площадка, по которой кривизна многообразия Грассмана $G_{n,n+4}$ меньше или равна 1.*

Доказательство. Принимая во внимание лемму 1, осталось рассмотреть только подмногообразия $F^n \subset E^{n+4}$ $(5 \leq n \leq 7)$. Если $n = 5$ или $n = 7$, то в каждой точке $x \in F^n$ можно выбрать в касательном пространстве $N_x F^n$ базис такой, что касательный вектор (матрица) Z_1 имеет ранг ≤ 3. В дальнейшем идут соображения, аналогичные предыдущим. Вычисляется кривизна $\bar{K}(D, Y)$, где $Z_1 = RDS$, $R \in O(4)$, $S \in O(n)$,

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & \vdots & \\ & \sigma_2 & & & \vdots & \\ & & \sigma_3 & & \vdots & O \\ & & & 0 & \vdots & \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & \dots & y_{1n} \\ 0 & y_{22} & y_{23} & \dots & y_{2n} \\ 0 & 0 & y_{33} & \dots & y_{3n} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & \dots & y_{4n} \end{pmatrix}.$$

И в этом случае получаем $\bar{K}(D, Y) \leq 1$.

Рассмотрим теперь подмногообразие $F^6 \subset E^{10}$. По теореме Адамса в нормальном пространстве подмногообразия $F^6 \subset E^{10}$ можно всегда выбрать нормаль, относительно которой матрица второй квадратичной формы будет вырождена. Далее идут рассуждения, аналогичные случаю подмногообразий $F^5 \subset E^9$ и $F^7 \subset E^{11}$. ■

Суммируя доказательства всех лемм, получаем доказательство теоремы 1.

Список литературы

[1] *А.А. Борисенко, Ю.А. Николаевский*, Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий. — Успехи мат. наук (1990) т. 46, вып. 2(278), с. 41–85.

[2] *K. Leichtweiss*, Zur Riemannschen Geometrie in Grassmannschen Mannifaltigkeiten. — Math. Z. (1961), Bd. 76, No. 4, S. 334–366.

[3] *Y.C. Wong*, Sectional curvature of Grassman manifolds. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA (1968), v. 60, No. 1, p. 73–75.

[4] *Ю.А. Николаевский*, О поверхностях, кривизна грассманова образа которых не меньше 1. — Укр. геом. сб.(1990), вып. 33, с. 77–91.

[5] *J.F. Adams, P.D.Lax, and R.S. Phillips*, On matrices whose real linear combinations are nonsingular. — Proc. Amer. Math. Soc. (1965), v. 16, p. 318–321.

On the Grassmanian image of submanifolds $F^n \subset E^{n+m}$ in which codimension does not exceed the dimension

V.M. Savel'ev

A.A. Borisenko's hypothesis is studied: every tangent space of the Grassman image of a regular submanifold $F^n \subset E^{n+m}$ contains a two-dimensional plane π such that the sectional curvature of the Grassman manifold $G_{n,n+m}$ in π is less or equal to 1.

Про грассманів образ підмноговидів $F^n \subset E^{n+m}$, у яких корозмірність не перевершує розмірності

В.М. Савель'єв

Досліджується гіпотеза О.А. Борисенко про те, що кожний дотичний простір до грассманового образу регулярного підмноговиду $F^n \subset E^{n+m}$ містить в собі двовимірну площину таку, що секційна кривина многовиду Грассмана $G_{n,n+m}$ вздовж π не перевершує 1.