Математическая физика, анализ, геометрия
1999, т. 6, № 1/2, с. 22–29

Бимодальное приближенное решение уравнения Больцмана в пространстве обобщенных функций

В.Д. Гордевский, Ю.А. Сысоева*

*Харьковский государственный университет,
Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4*

**Харьковский государственный технический университет радиоэлектроники,
Украина, 310726, г. Харьков, пр. Ленина, 14*

Статья поступила в редакцию 27 января 1997 года,
после переработки — 15 мая 1997 года

Предложена аппроксимация в смысле обобщенных функций решения нелинейного трехмерного уравнения Больцмана для твердых сфер. Приближенное решение строится как пространственно–неоднородная нестационарная линейная комбинация двух δ-функций от скорости, сосредоточенных в разных точках. Показано, что невязка между левой и правой частями уравнения может быть сделана сколь угодно малой за счет стремления параметров, входящих в распределение, к соответствующим предельным значениям, в частности, и в том случае, когда массовые скорости на $+\infty$ и на $-\infty$ различны, но число Кнудсена достаточно велико.

Как известно, нелинейное интегро-дифференциальное уравнение Больцмана [1, 2] описывает эволюцию разреженного газа. Актуальной является задача поиска точных решений этого уравнения. Одно такое решение хорошо известно — это максвелловское распределение скоростей (максвеллиан, глобальный и локальный [1, 2]). Аналогом максвеллиана в пространстве обобщенных функций является δ-функция (физически это соответствует тому, что все частицы газа имеют одну и ту же постоянную скорость или покоятся). Для частного случая максвелловских молекул и некоторых его обобщений были получены и другие точные решения уравнения Больцмана [3–5 и др.]. Однако для иных потенциалов взаимодействия между молекулами, в том числе, для модели твердых сфер, до сих пор не найдено ни одного точного решения, отличного от максвеллиана (дискретные и линеаризованные модели здесь не рассматриваются).

В работах [6–8] построено приближенное явное решение уравнения Больцмана для твердых сфер, имеющее вид пространственно-неоднородной линейной комбинации двух максвеллианов с разными массовыми скоростями (бимодальное распределение, описывающее "заворачивающий поток" либо двухпотоковое решение), и получены некоторые условия малости невязки между левой и правой частями уравнения в смысле интегральной метрики в пределе низких температур.

Целью настоящей работы является построение приближенного решения уравнения Больцмана для твердых сфер в виде неоднородной линейной комбинации двух δ-функций, сосредоточенных в разных точках пространства скоростей. Перейдем к точной постановке задачи (обозначения несколько отличаются от принятых в [6–8]). Рассматривается трехмерное нелинейное уравнение Больцмана для твердых сфер

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{d^2}{2}\int\limits_{R^3}dv_1\int\limits_{\Sigma}d\alpha\,[f(t,v_1',x)f(t,v',x)-f(t,v_1,x)f(t,v,x)]\,|(v-v_1,\alpha)| \tag{1}$$

или коротко:

$$D(f)=Q(f,f)\,; \tag{2}$$

здесь $D(f)$ — дифференциальный оператор, отвечающий левой части (1); $Q(f,f)$ — оператор столкновений, стоящий в правой части (1); $t\in R^1$ — время; $x\in R^3$ — координата частицы; $f(t,v,x)$ — искомая функция распределения частиц; $\frac{\partial f}{\partial x}$ — ее пространственный градиент; d — диаметр частиц; v, $v_1\in R^3$ — скорости частиц до столкновения; а v', $v_1'\in R^3$ — после столкновения:

$$v'=v-\alpha(v-v_1,\alpha);\ v_1'=v_1-\alpha(v+v_1,\alpha),\ \alpha\in\Sigma\,, \tag{3}$$

где Σ — единичная сфера в R^3. Будем искать решение уравнения (1) в смысле обобщенных функций в виде следующей линейной комбинации δ-функций:

$$f(t,v,x)=\varphi(t,x)\delta(v-\bar v_1)+[1-\varphi(t,x)]\delta(v-\bar v_2)\,, \tag{4}$$

где $\bar v_1$, $\bar v_2\in R^3$; $\bar v_1\neq\bar v_2$ — массовые скорости, а функция $\varphi(t,x)$, как и в [6–8], имеет вид

$$\varphi(t,x)=\frac{1}{1+e^{c(x^1-Dt)}}\,. \tag{5}$$

Здесь c, D — произвольные параметры; x^1 — первая компонента вектора $x=(x^1;x^2;x^3)$. Заметим, что распределение (4),(5) при фиксированных c, D, $\bar v_1$, $\bar v_2$ и при стремлении t или x^1 к $\pm\infty$ стремится к одной из δ-функций:

$\delta(v-\bar{v}_1)$ либо $\delta(v-\bar{v}_2)$. Кроме того, само распределение (4), очевидно, есть предел в смысле обобщенных функций распределения из работ [6–8], когда фигурирующие там обратные температуры $\beta_i = \frac{1}{2T_i}$, $i=1,2$, стремятся к $+\infty$ (т.е. низкотемпературный предел бимодального распределения). Как указано в [6–8], это распределение предела в пространстве L_1 не выдерживает.

В качестве величины, характеризующей отклонение функции (4) от точного решения уравнения Больцмана, выберем невязку следующего вида:

$$\Delta = \sup_{(t,x)\in R^1\times R^3} \left|\langle D(f)-Q(f,f),g\rangle\right|, \tag{6}$$

где $g(v)$ — произвольная основная функция (для наших целей достаточно считать ее непрерывной на R^3), а $\langle \bullet, g\rangle$ обозначает результат действия обобщенной функции на g.

Задача состоит в исследовании таких ситуаций, которые обеспечивали бы произвольную малость невязки (6) за счет того или иного предельного поведения имеющихся параметров. Следующая теорема указывает на одну из таких возможностей.

Теорема. *Пусть распределение f имеет вид (4), (5), а $g(v)\in C(R^3)$ — произвольная основная функция. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что при всех D, d, $\bar{v}_1^1$, $\bar{v}_2^1$, для которых $|D|<\delta$; $0<d<\delta$; $|\bar{v}_1^1|<\delta$; $|\bar{v}_2^1|<\delta$, будет справедливо неравенство*

$$\Delta < \varepsilon. \tag{7}$$

Доказательство. Подставляя (4), (5) в (1), (2) и учитывая, что $Q(\delta,\delta)=0$ для одной и той же δ-функции (это свойство аналогично соответствующему свойству максвеллианов), а $\varphi(1-\varphi)=\varphi^2 e^{c(x^1-Dt)}$, после очевидных преобразований получим

$$D(f) = (v^1-D)c\varphi^2 e^{c(x^1-Dt)}[\delta(v-\bar{v}_2)-\delta(v-\bar{v}_1)], \tag{8}$$

$$Q(f,f) = \frac{d^2}{2}\varphi^2 e^{c(x^1-Dt)} \int\limits_{R^3} dv_1$$

$$\times \int\limits_{\Sigma} d\alpha\,|(v-v_1,\alpha)|[\delta(v-\bar{v}_1-\alpha(v-v_1,\alpha))\delta(v_1-\bar{v}_2-\alpha(v+v_1,\alpha))$$

$$+\delta(v-\bar{v}_2-\alpha(v-v_1,\alpha))\delta(v_1-\bar{v}_1+\alpha(v-v_1,\alpha)) - \delta(v-\bar{v}_1)\delta(v_1-\bar{v}_2)$$

$$-\,\delta(v-\bar{v}_2)\delta(v_1-\bar{v}_1)]. \tag{9}$$

Далее, так как зависимость от переменных t и x в (8) и (9) свелась лишь к общему для этих выражений множителю $\varphi^2 e^{c(x^1-Dt)}$, который, как легко видеть из (5), при любых c и D имеет на $R^1 \times R^3$ супремум, равный 1/4, подстановка (8), (9) в (6), очевидно, дает

$$\Delta = \frac{1}{4}\left| c[(\bar{v}_2^1 - D)g(\bar{v}_2) - (\bar{v}_2^1 - D)g(\bar{v}_1)] - \frac{d^2}{2}[J_1 - J_2 + J_3 - J_4] \right| , \tag{10}$$

где введены обозначения

$$J_1 = \iint\limits_{R^3\times R^3} dv dv_1$$

$$\times \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(v - v_1, \alpha)| g(v) \delta(v - \bar{v}_1 - \alpha(v - v_1, \alpha)) \delta(v_1 - \bar{v}_2 + \alpha(v - v_1, \alpha)) , \tag{11}$$

$$J_2 = \iint\limits_{R^3\times R^3} dv dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(v - v_1, \alpha)| g(v) \delta(v - \bar{v}_1) \delta(v_1 - \bar{v}_2) , \tag{12}$$

$$J_3 = \iint\limits_{R^3\times R^3} dv dv_1$$

$$\times \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(v - v_1, \alpha)| g(v) \delta(v - \bar{v}_2 - \alpha(v - v_1, \alpha)) \delta(v_1 - \bar{v}_1 + \alpha(v - v_1, \alpha)) , \tag{13}$$

$$J_4 = \iint\limits_{R^3\times R^3} dv dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(v - v_1, \alpha)| g(v) \delta(v - \bar{v}_2) \delta(v_1 - \bar{v}_1) . \tag{14}$$

Интегралы J_2 и J_4 легко вычисляются:

$$J_2 = \int\limits_{\Sigma} d\alpha g(\bar{v}_1) |(\bar{v}_1 - \bar{v}_2, \alpha)| = 2\pi |\bar{v}_2 - \bar{v}_1| g(\bar{v}_1) , \tag{15}$$

$$J_4 = \int\limits_{\Sigma} d\alpha g(\bar{v}_2) |(\bar{v}_1 - \bar{v}_2, \alpha)| = 2\pi |\bar{v}_2 - \bar{v}_1| g(\bar{v}_2) . \tag{16}$$

Вычислим J_1, произведя следующую замену переменных в шестикратном интеграле по v_1 и v:

$$\begin{aligned} u &= v - \bar{v}_1 - \alpha(v - v_1, \alpha), \\ u_1 &= v_1 - \bar{v}_2 + \alpha(v - v_1, \alpha) . \end{aligned} \tag{17}$$

Умножая разность равенств (17) скалярно на α и учитывая, что $\alpha^2 = 1$, получим

$$(v - v_1, \alpha) = (u_1 - u + \bar{v}_2 - \bar{v}_1, \alpha) . \tag{18}$$

После подстановки (18) в (17) выразим v и v_1 через u и u_1:

$$v = u + \bar{v}_1 + \alpha(u_1 - u + \bar{v}_2 - \bar{v}_1, \alpha),$$
$$v_1 = u_1 + \bar{v}_2 - \alpha(u_1 - u + \bar{v}_2 - \bar{v}_1, \alpha)\,. \tag{19}$$

Как легко видеть из (17) и (19), модуль якобиана при замене (17) равен 1, значит, из (11) будем иметь

$$J_1 = \iint\limits_{R^3 \times R^3} du du_1$$

$$\times \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(u_1 - u + \bar{v}_2 - \bar{v}_1, \alpha)| \delta(u) \delta(u_1) g(u + \bar{v}_1 + \alpha(u_1 - u + \bar{v}_2 - \bar{v}_1, \alpha))$$

$$= \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(\bar{v}_2 - \bar{v}_1, \alpha)| g(\bar{v}_1 + \alpha(\bar{v}_2 - \bar{v}_1, \alpha))\,. \tag{20}$$

Поскольку подынтегральная функция в (20) не меняется при переходе от α к $-\alpha$, можно вычислить этот интеграл по полусфере $(\bar{v}_2 - \bar{v}_1, \alpha) \geq 0$, вводя на ней сферические координаты с осью z, которая направлена вдоль вектора $\bar{v}_2 - \bar{v}_1$:

$$J_1 = 2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, |\bar{v}_2 - \bar{v}_1| \sin\phi \, \cos\phi \, g(\bar{v}_1 + |\bar{v}_2 - \bar{v}_1| \alpha(\varphi, \phi) \sin\phi)\,, \tag{21}$$

где

$$\alpha(\varphi, \phi) = (\cos\varphi \cos\phi; \sin\varphi \cos\phi; \sin\phi)\,.$$

Наконец, замена $s = \sin^2 \phi$ в (21) приводит к следующему результату:

$$J_1 = |\bar{v}_2 - \bar{v}_1| \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 ds\, g(\bar{v}_1 + |\bar{v}_2 - \bar{v}_1| \alpha(\varphi, s))\,, \tag{22}$$

где

$$\alpha(\varphi, s) = (\cos\varphi \sqrt{s - s^2}; \sin\varphi \sqrt{s - s^2}; s)\,. \tag{23}$$

Совершенно аналогично вычисляется и интеграл

$$J_3 = |\bar{v}_2 - \bar{v}_1| \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 ds\, g(\bar{v}_2 + |\bar{v}_2 - \bar{v}_1| \alpha(\varphi, s))\,. \tag{24}$$

Таким образом, из (10), (15), (16), (22) и (24) имеем

$$\Delta = \frac{1}{4}\left| \begin{array}{l} c[(\bar{v}_2^1 - D)g(\bar{v}_2) - (\bar{v}_1^1 - D)g(\bar{v}_1)] - \frac{d^2}{2}|\bar{v}_2 - \bar{v}_1| \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 ds\, [g(\bar{v}_1 + |\bar{v}_2 - \bar{v}_1|\alpha(\varphi, s)) \\ + g(\bar{v}_2 + |\bar{v}_2 - \bar{v}_1|\alpha(\varphi, s))] + \pi d^2 |\bar{v}_2 - \bar{v}_1| [g(\bar{v}_1) + g(\bar{v}_2)] \end{array} \right|. \quad (25)$$

Далее, поскольку, как видно из (23), норма вектора $\alpha(\varphi, s)$ не превосходит единицы, то при $\bar{v}_1^1 \to 0$, $\bar{v}_2^1 \to 0$ и фиксированных значениях остальных компонент векторов $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$ все аргументы функции g, фигурирующие в (25), ограничены. С учетом непрерывности g это гарантирует ограниченность интеграла, входящего в (25), а также величин $g(\bar{v}_1)$ и $g(\bar{v}_2)$, откуда немедленно следует (7). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Ситуация, описанная в теореме, относится, очевидно, к околосвободномолекулярным течениям газа, которые соответствуют большим числам Кнудсена ($d^2 \to 0$). При этом перпендикулярные составляющие массовых скоростей $\bar{v}_1^2$, $\bar{v}_1^3$, $\bar{v}_2^2$, $\bar{v}_2^3$ остаются фиксированными и произвольными, так что найденное здесь приближенное решение описывает не ударную волну, направленную вдоль оси x^1 (как решение Тамма–Мотт–Смита [1,9]), а некий аналог двухпотокового решения [8] в пространстве обобщенных функций (теперь роль максвеллианов играют δ-функции).

З а м е ч а н и е 2. Если зафиксировать d, $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, и функцию g, то интеграл в (25) есть некая константа, и тогда, очевидно, за счет выбора c и D можно сделать Δ равным 0 (это, разумеется, не означает, что мы нашли точное решение уравнения Больцмана, ибо c и D зависят от выбора g). Этот вывод никак не связан с утверждением теоремы, тем не менее он позволяет, по аналогии с моментными методами (в частности, подходом Тамма–Мотт–Смита), находить различные необходимые условия того, что (4), (5) есть решение уравнения Больцмана.

З а м е ч а н и е 3. Возможны и иные ситуации, обеспечивающие стремление Δ к 0, помимо описанной в теореме. Так, например, при $\bar{v}_2 \to \bar{v}_1$, в силу непрерывности g, все слагаемые в (25) стремятся к 0. Очевидно, что при этом само распределение f вида (4) в смысле обобщенных функций стремится к $\delta(v - \bar{v}_1)$, т.е. к известному решению уравнения Больцмана. Однако интересным, на наш взгляд, является то, что мы можем сделать невязку Δ бесконечно малой более высокого порядка, чем разность между f и $\delta(v - \bar{v}_1)$. Чтобы убедиться в этом, перепишем (25) несколько иначе, представив последнее слагаемое также в виде интеграла по φ и s от константы $\frac{d^2}{2}|\bar{v}_2 - \bar{v}_1|[g(\bar{v}_1) + g(\bar{v}_2)]$:

$$\Delta = \frac{1}{4}\Big| c[(\bar{v}_2^1 - D)g(\bar{v}_2) - (\bar{v}_1^1 - D)g(\bar{v}_1)]$$

$$-\frac{d^2}{2}|\bar{v}_2-\bar{v}_1|\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 ds\ \{[g(\bar{v}_1+|\bar{v}_2-\bar{v}_1|\alpha(\varphi,s))-g(\bar{v}_1)]$$

$$+[g(\bar{v}_2+|\bar{v}_2-\bar{v}_1|\alpha(\varphi,s))-g(\bar{v}_2)]\}|\ . \qquad (26)$$

В силу равномерной ограниченности вектора $\alpha(\varphi,s)$ и непрерывности функции g в точках $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$, интеграл в (26) сам по себе стремится к 0 при $\bar{v}_2\to\bar{v}_1$, т.е. все второе слагаемое есть $\bar{o}(|\bar{v}_2-\bar{v}_1|)$. Первое слагаемое также можно сделать бесконечно малой более высокого порядка, чем $|\bar{v}_2-\bar{v}_1|$, потребовав достаточно быстрого стремления к 0 величин D, $\bar{v}_1^1$ и $\bar{v}_2^1$. Тогда $\Delta=\bar{o}(|\bar{v}_2-\bar{v}_1|)$. В то же время невязка между f и $\delta(v-\bar{v}_1)$, как видно из (4), (5), будет вести себя при $\bar{v}_2\to\bar{v}_1$ следующим образом:

$$\sup_{(t,x)\in R^1\times R^3}|\langle f-\delta(v-\bar{v}_1),g\rangle|$$

$$=\sup_{(t,x)\in R^1\times R^3}|(\varphi-1)\langle[\delta(v-\bar{v}_1)-\delta(v-\bar{v}_2)],g\rangle|=|g(\bar{v}_1)-g(\bar{v}_2)|\ , \qquad (27)$$

т.е. всего лишь как $\bar{o}(1)$. Указанного эффекта можно достичь и за счет требования $c\to 0$, поскольку при этом $\varphi\to\frac{1}{2}$, да и то не равномерно, а лишь в поточечном смысле.

Список литературы

[1] *К.Черчиньяни*, Теория и приложения уравнения Больцмана. Мир, Москва (1978), 495 с.

[2] *Т. Карлеман*, Математические задачи кинетической теории газов. Изд-во иностр.лит., Москва (1960), 118 с.

[3] *А.В. Бобылев*, О структуре общего решения и классификации частных решений нелинейного уравнения Больцмана для максвелловских молекул. — Докл. АН СССР (1980), т. 251, № 6, с. 1361–1365.

[4] *M. Krook and T.T. Wu*, Exact solution of the Boltzmann equation. — Phys. Fluids (1977), v. 20, № 10(1), p. 1589–1595.

[5] *Д.Я. Петрина, А.В. Мищенко*, О точных решениях одного класса уравнений Больцмана. — Докл. АН СССР (1988), т. 298, № 2, с. 338–342.

[6] *В.Д. Гордевский*, Приближенное бимодальное решение нелинейного уравнения Больцмана для твердых сфер. — Мат. физика, анализ, геом. (1995), т. 2, № 2, с. 168–176.

[7] *В.Д. Гордевский*, Критерий малости невязки для бимодального решения уравнения Больцмана. — Мат. физика, анализ, геом. (1997), т. 4, № 1/2, с. 46–58.

[8] *В.Д. Гордевский*, Приближенное двухпотоковое решение уравнения Больцмана. — Теорет. и мат. физика (1998), т. 114, № 1, с. 126–136.

[9] *И.Е. Тамм*, О ширине ударных волн большой интенсивности. — Труды ФИАН (1965), т. 29, с. 239–249 (работа выполнена в 1947 г.).

The bimodal approximate solution of the Boltzmann equation in the sence of distributions

V.D. Gordevsky, Yu.A. Sysoyeva

An approximation of the solution of the nonlinear three-dimensional Boltzmann equation for hard spheres in the sence of distributions is proposed. The approximate solution is built as a spatially-nonhomogeneous nonstationary linear combination of two δ-functions on velocity, which are concentrated at different points. It is shown that the error between the left and the right sides of the equation may be reduced to arbitrary small values when parameters, involved in distribution, tend to their limit values, in particular, when the mass velocities at $+\infty$ and $-\infty$ are different but the Knudsen number is quite large.

Бімодальний наближений розв'язок рівняння Больцмана в просторі узагальнених функцій

В.Д. Гордевський, Ю.А. Сисоєва

Запропоновано апроксимацію в сенсі узагальнених функцій розв'язку нелінійного тривимірного рівняння Больцмана для твердих куль. Наближений розв'язок будується як просторово-неоднорідна нестаціонарна лінійна комбінація двох δ-функцій від швидкості, які зосереджено в різних точках. Доведено, що відхил між лівою та правою частинами рівняння може бути зроблений скіль завгодно малим за рахунок прямування параметрів, що входять у розподіл, до відповідних граничних значень, зокрема, і в тому випадку, коли масові швидкості на $+\infty$ та на $-\infty$ різні, але число Кнудсена досить велике.