Математическая физика, анализ, геометрия
1999, т. 6, № 1/2, с. 182–188

Вполне геодезические подмногообразия на гиперповерхностях вращения евклидова пространства

В.С. Яскин

Харьковский государственный университет,
Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 3 декабря 1997 года

В данной статье найдены вполне геодезические подмногообразия на гиперповерхностях вращения евклидова пространства.

Как известно, не всякое риманово пространство допускает вполне геодезические подмногообразия. Проблему локального существования вполне геодезических подмногообразий можно определить следующим образом: найти условие того, что через данную точку p многообразия M проходит вполне геодезическое подмногообразие с касательным пространством $V \subset \mathrm{T_pM}$. Для симметрических пространств известен критерий Картана [12]: вполне геодезическое подмногообразие с касательным пространством V существует тогда и только тогда, когда $\forall x,\ y,\ z \in V$: $R(x,y)z \in V$, где R — тензор Римана многообразия M.

Проблемы глобального существования касается следующий результат Хермана [4]. Пусть M — полное вещественное аналитическое риманово многообразие. Точка $\mathrm{p} \in \mathrm{M}$, подпространство $V \subset \mathrm{T_pM}$. Тогда, если через эту точку p проходит вполне геодезическое подмногообразие с касательным пространством V, то оно может быть продолжено до полного аналитического вполне геодезического подмногообразия.

В работе Чигера и Громола [2] показано, что вполне геодезические подмногообразия возникают при описании структуры полных некомпактных многообразий неотрицательной кривизны. Оказывается, если M — такое многообразие, то оно диффеоморфно нормальному расслоению $\nu(S)$ к некоторому компактному вполне геодезическому подмногообразию S в M.

К вполне геодезическим гиперповерхностям относится результат Риччи [8], который можно также найти и в [14]: если некоторое пространство M^{n+1} допускает вполне геодезическую гиперповерхность F^n, тогда нормали к F^n

представляют собой совокупность главных направлений тензора Риччи пространства M^{n+1} в точках F^n.

Изучением свойств многообразий, допускающих семейство вполне геодезических подмногообразий, в разное время занимались Г. Риччи, Э. Картан, Я.Л. Шапиро [13], Ю.С. Слободян [9, 10], С.И. Окрут [6, 7].

Вполне геодезические подмногообразия на гиперповерхностях в евклидовом пространстве, задаваемых однородными полиномами, и на группах Ли с левоинвариантной метрикой исследованы в [11]. Вполне геодезические подмногообразия в грассмановых многообразиях $G(2, n)$ классифицированы в [3]. В данной статье исследуются вполне геодезические подмногообразия на гиперповерхностях вращения в евклидовом пространстве.

Теорема. *Пусть гиперповерхность вращения в евклидовом пространстве отлична от сферы. Тогда вполне геодезическими подмногообразиями на ней являются меридиональные поверхности и большие сферы критического радиуса и только они.*

Утверждение теоремы для случая гиперповерхности вращения в E^4 доказано Ю.А. Аминовым [1]; первая часть утверждения для случая выпуклой гиперповерхности вращения и двумерной меридиональной поверхности сформулирована без доказательства А.Д. Милкой [5]. Случай двумерных вполне геодезических поверхностей на гиперповерхностях вращения произвольной размерности был изучен мною в дипломной работе с помощью методов теории дифференциальных уравнений в частных производных. Благодаря замечаниям А.Д. Милки удалось упростить доказательство теоремы для случая двумерных вполне геодезических поверхностей и распространить его на случай вполне геодезических подмногообразий произвольной размерности.

Понятие поверхности вращения можно обобщить разными способами на многомерный случай, мы же здесь понимаем следующее. Поверхностью вращения относительно оси x_{n+2} в E^{n+2} будем называть поверхность, каждая точка которой находится на расстоянии $R(x_{n+2})$ от оси вращения. Ее уравнение имеет вид

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = R^2(x_{n+2}).$$

Под большой к-мерной сферой критического радиуса понимаем следующее. Рассмотрим сечение поверхности вращения гиперплоскостью, перпендикулярной оси вращения, на которой $R' = 0$. Это будет сфера S^n. Возьмем сечение этой сферы $(k+1)$-мерной плоскостью, проходящей через ее центр. Полученную поверхность и назовем большой к-мерной сферой критического радиуса или горловой сферой. Меридианом поверхности вращения называется линия, которая получена сечением поверхности вращения двумерной плоскостью, содержащей ось вращения. Под k-мерной меридиональной поверхностью понимаем следующее. На гиперповерхности вращения берем (к − 1)-мерную большую сферу, затем из каждой ее точки выпускаем меридиан. Это и будет к-мерная меридиональная поверхность. Эквивалентное определение: это поверхность, которая получена сечением гиперповерхности вращения (к + 1)-мерной плоскостью, содержащей ось вращения. (Это — очевидное обобщение понятия меридиана).

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Меридиональные поверхности и горловые сферы являются вполне геодезическими подмногообразиями на рассматриваемой гиперповерхности вращения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что любая меридиональная поверхность F^k будет вполне геодезической на рассматриваемой поверхности вращения. Запишем радиус-вектор поверхности вращения в виде

$$\begin{cases} x_1 = R(t)\cdot\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2\ldots\cos\varphi_{n-1}\cdot\cos\varphi_n, \\ x_2 = R(t)\cdot\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2\ldots\cos\varphi_{n-1}\cdot\sin\varphi_n, \\ x_3 = R(t)\cdot\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = R(t)\cdot\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2, \\ x_{n+1} = R(t)\cdot\sin\varphi_1, \\ x_{n+2} = t. \end{cases}$$

Введем обозначение $\Lambda_i = \prod\limits_{k=1}^{i-1}\cos\varphi_k$. Нетрудно проверить, что метрика F^{n+1} имеет вид

$$ds^2 = dt^2 + R^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i^2\,d\varphi_i^2,$$

если считать, что образующая кривая задана в натуральной параметризации.

Для удобства введем следующие обозначения: $y^0 = t$, $y^i = \varphi_i$, $i = \overline{1,n}$. Найдем символы Кристоффеля для метрики поверхности F^{n+1}:

$$\Gamma_{ii,0} = -RR'\Lambda_i^2, \quad \Gamma_{ii,j} = R^2\Lambda_i^2\,\mathrm{tg}\,y_j\,, \quad j < i.$$

Остальные символы Кристоффеля равны нулю.

Не ограничивая общности, можно считать, что меридиональная поверхность F^k задается в виде $y_k = \ldots = y_n = 0$. Нормалями к F^k в F^n будут следующие векторы: $\eta_{|i} = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, $i = \overline{0, n-k}$, где единица стоит на $(k+i)$-м месте.

Найдем коэффициенты вторых квадратичных форм для поверхности F^k относительно нормалей $\eta_{|s}$ по формуле [14]:

$$L_{ij|s} = a_{\alpha\beta}\,y^{\alpha}_{,ij}\eta^{\beta}_{|s} + \Gamma_{\mu\nu,\beta}\,y^{\mu}_{,i}\,y^{\nu}_{,j}\eta^{\beta}_{|s},$$

где $y^{\alpha}_{,ij}$ – ковариантная производная относительно связности поверхности F^k, $\eta^{\beta}_{|s}$ – компоненты вектора нормали, а $a_{\alpha\beta}$ и $\Gamma_{\mu\nu,\beta}$ – компоненты метрики и коэффициенты связности объемлющего пространства соответственно. Возьмем в качестве параметров на F^k: $u^0 = y^0$, $u^i = y^i$, $i = \overline{1, k-1}$. Тогда коэффициенты второй квадратичной формы будут равны $L_{ij|s} = a_{k+s\,k+s}\, y^{k+s}_{,ij} + \Gamma_{ij,k+s}$. Так как $y^{k+s} = 0$, то ковариантная производная равна

$$y^{k+s}_{,ij} = \frac{\partial^2 y^{k+s}}{\partial u^i\, \partial u^j} - \widetilde{\Gamma}^p_{ij} y^{k+s}_{,p} = 0.$$

Здесь $\widetilde{\Gamma}^p_{ij}$ — символы Кристоффеля для поверхности F^k. Получаем, что $L_{ij|s} = \Gamma_{ij,k+s} = 0$. Значит, F^k является вполне геодезическим подмногообразием.

Покажем теперь, что любая горловая сфера S^k будет вполне геодезической. Будем считать, что эта сфера задается следующим образом: y^0=const, $y^{k+1} = \ldots = y^n = 0$. Возьмем в качестве параметров на S^k: $u^i = y^i$, $i = \overline{1, k}$. Нормалями к ней в F^{n+1} будут $\eta_{|0} = (1, 0, \ldots, 0)$ и $\eta_{|i} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $i = \overline{1, n-k}$, где единица стоит на $(k+i)$-м месте. Как и выше, находим коэффициенты вторых квадратичных форм для S^k.

$$L_{ij|s} = a_{k+s\,k+s}\, y^{k+s}_{,ij} + \Gamma_{ij,k+s} = 0, \quad s = \overline{1, n-k},$$

$$L_{ij|0} = a_{00}\, y^0_{,ij} + \Gamma_{ij,0} = \Gamma_{ij,0}\,.$$

При $i \neq j$ последнее выражение равно нулю, а при $i = j$ имеем $\Gamma_{ii,0} = -RR'\Lambda_i^2$. Таким образом, если $R' = 0$, то все коэффициенты вторых квадратичных форм равны нулю.

З а м е ч а н и е. Из предыдущих вычислений видно, что среди n-мерных сфер S^n, на которых t=const, вполне геодезическими будут только горловые сферы.

Далее нам понадобится следующая лемма А.Д. Милки [5].

Лемма 2. *Каждая кратчайшая на выпуклой гиперповерхности вращения F принадлежит двумерной поверхности вращения, которая получена в сечении F трехмерной плоскостью, проходящей через ось гиперповерхности. Кратчайшие на такой двумерной поверхности есть также кратчайшие на F.*

Эта лемма приведена у автора без доказательства и, как видно, только для случая выпуклых гиперповерхностей вращения. Однако в личной беседе А.Д. Милка доказал, что требование выпуклости несущественно. Мы докажем эту лемму, руководствуясь собственными соображениями, которые больше отражают дух данной статьи. Вторая часть утверждения у нас доказана выше, а первую часть докажем в более общем случае — для произвольных поверхностей вращения.

Любая геодезическая линия на гиперповерхности вращения евклидова пространства лежит на двумерной меридиональной поверхности.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку p геодезической и касательный к ней вектор τ в данной точке. Существует 3-мерная плоскость, содержащая ось вращения, точку p и вектор τ. Эта плоскость высекает на гиперповерхности вращения 2-мерную меридиональную поверхность F^2. Вектор τ лежит в касательном к F^2 пространстве в точке p. Так как F^2 является вполне геодезической поверхностью в F^{n+1}, то геодезическая полностью лежит на F^2. Что и требовалось доказать.

Докажем теперь аналогичную лемму для вполне геодезических подмногообразий.

Лемма 3. *Любое к-мерное вполне геодезическое подмногообразие гиперповерхности вращения лежит на (к+1)-мерной меридиональной поверхности.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку p вполне геодезического подмногообразия $F^{к}$ и его касательное пространство $V^k \subset T_pF^{n+1}$ в данной точке. Через точку p, V^k и ось вращения в пространстве E^{n+2} можно провести (к+2)-мерную плоскость. Она высекает на F^{n+1} (к+1)-мерную меридиональную поверхность. Соединим произвольную точку q на $F^{к}$ геодезической линией γ с точкой p. Касательный вектор к γ в точке p лежит в V^k, а значит, и в $T_pF^{к+1}$. Но $F^{к+1}$ — вполне геодезическое подмногообразие, следовательно, γ лежит в $F^{к+1}$. То есть любая точка $q \in F^{к}$ лежит в $F^{к+1}$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы. Итак, нам достаточно доказать теорему для случая, когда вполне геодезическое подмногообразие имеет коразмерность 1 в F^{n+1}. Покажем, что вполне геодезических подмногообразий, отличных от меридиональных поверхностей и горловых сфер, нет. Пусть это не так. Тогда существует вполне геодезическое подмногообразие F^n, которое не совпадает ни с меридиональной поверхностью, ни с горловой сферой.

Пусть e_0 — касательный вектор к координатной линии t на F^{n+1}, а $e_1,\ldots,e_n$ — касательные к координатным линиям $\varphi_1,\ldots, \varphi_n$. Тогда в этом базисе нормаль к сфере, на которой t=const имеет вид $(1, 0, \ldots, 0)$, а нормаль к меридиональной поверхности — $(0, \eta^1, \ldots, \eta^n)$. В силу замечания леммы 1 нам достаточно рассмотреть подмногообразие F^n, нормаль к которому будет иметь вид $(\xi^0, \xi^1, \ldots, \xi^n)$, где $\xi^0 \neq 0$ и, например, $\xi^1 \neq 0$. Рассмотрим произвольную точку p на поверхности F^n. Пусть z_i – координаты в касательном пространстве T_pF^{n+1}. Тогда уравнение касательной плоскости $V^n \subset T_pF^{n+1}$ к F^n в данной точке будет иметь вид

$$z_0\,\xi^0 + z_1\,\xi^1 + \ldots + z_n\,\xi^n = 0.$$

Возьмем сечение этой плоскости следующей 3-мерной плоскостью V^3 в T_pF^{n+1}: $z_3 = z_4 = \ldots = z_n = 0$. В сечении получим 2-мерную плоскость V^2:

$$z_0\,\xi^0 + z_1\,\xi^1 + z_2\,\xi^2 = 0, \qquad z_3 = z_4 = \ldots = z_n = 0.$$

Плоскость V^3 определяет меридиональную поверхность F^3. Пересечением F^n и F^3 является поверхность F^2 с касательной плоскостью V^2 в данной точке p. F^2 является вполне геодезической как пересечение двух вполне геодезических поверхностей. Приходим к случаю вполне геодезической поверхности на трехмерной поверхности вращения. Но согласно теореме Ю.А. Аминова [1] вполне геодезическая поверхность F^2 не может иметь нормаль (ξ^0, ξ^1, ξ^2), где $\xi^0 \neq 0$ и $\xi^1 \neq 0$. Приходим к противоречию. Теорема доказана.

В заключение хочу поблагодарить Ю.А. Аминова за постановку задачи и научное руководство, а также А.Д. Милку за указание на работу [5] и ценные замечания.

Список литературы

[1] *Yu. Aminov*, Geometry of submanifolds, Gordon and Breach (to appear).

[2] *J. Cheeger and D. Gromoll*, On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature. — Ann. Math., (1972), v. (2)96, p. 413–443.

[3] *B.-Y. Chen and T. Nagano*, Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces. I. — Duke Math. J., (1977), v. 44, p. 745–755.

[4] *R. Hermann*, Existence in the large of totally geodesic submanifolds of Riemannian spaces. — Bull. Amer. Math. Soc., (1960), v. 66, p. 59–61.

[5] *А.Д. Милка*, Об одном признаке сферы. — Укр. геом. сб., (1970), вып. 9, с. 78–84.

[6] *С.И. Окрут*, Римановы многообразия с обобщенной аксиомой плоскостей. — Укр. геом. сб., (1992), вып. 35, с. 103–110.

[7] *С.И. Окрут*, Структура кривизны риманова многообразия с аксиомой гиперплоскостей. — Мат. физ., анализ, геом., (1994), т. 1, № 2, с. 227–231.

[8] *G. Ricci*, Direzioni e invarianti principali in una varieta qualunque. — Atti del Reale Inst. Veneto, (1904), v. 63, c. 1233–1239.

[9] *Ю.С. Слободян*, О структуре полных римановых пространств, допускающих семейства вполне геодезических поверхностей. — Укр. геом. сб., (1970), вып. 8, с. 125–138.

[10] *Ю.С. Слободян*, Трехмерные римановы пространства, допускающие вполне геодезические поверхности. — Вестн. Харьк. гос. ун-та. Сер. мех.-мат., (1965), т. 31, с. 111–118.

[11] *K. Tsukada*, Totally geodesic submanifolds and curvature-invariant subspaces. — Kodai Math. J., (1996), v. 19, p. 395–437.

[12] *С. Хелгасон*, Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, Мир, Москва (1964).

[13] *Я.Л. Шапиро*, Геодезические поля направлений и проективные системы путей. — Мат. сб., (1955), т. 36(78), № 1, с. 125–148.

[14] *Л.П. Эйзенхарт*, Риманова геометрия, Изд-во иностр. лит., Москва (1948).

Totally geodesic submanifolds of hypersurfaces of revolution in the Euclidean space

V.S. Yaskin

In this paper we find totally geodesic submanifolds of hypersurfaces of revolution in the Euclidean space.

Цілком геодезичні підмноговиди на гіперповерхнях обертання в евклідовому просторі

В.С. Яскін

В цій статті знайдено цілком геодезичні підмноговиди на гіперповерхнях обертання в евклідовому просторі.