Математическая физика, анализ, геометрия
1999, т. 6, № 3/4, с. 213–222

О гиперслоениях сфер

Д.В. Болотов

Харьковский государственный университет
Украина, 310077 Харьков, пл. Свободы, 4
E-mail: Dmitriy V.Bolotov@univer.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 4 февраля 1999 года

Доказано, что не существует гиперслоения неотрицательной секционной кривизны на сфере положительной кривизны размерности большей или равной пяти.

В данной работе мы предполагаем многообразие и слоение на нем класса C^∞ [1]. Гиперслоением будем называть слоение коразмерности 1. Так как разговор пойдет о слоениях многомерной сферы, то из ее односвязности следует, что слоение — ориентируемо и трансверсально ориентируемо; отсюда следует, что слои должны быть ориентируемы. Гомологии и когомологии везде подразумеваются сингулярными с действительными коэффициентами.

Если рассмотреть трехмерную сферу со стандартной метрикой постоянной кривизны, то слоение Риба дает пример слоения, слои которого имеют неотрицательную секционную кривизну. В [2] ставится вопрос: существует ли на нечетномерной сфере размерности больше трех гиперслоение со слоями неотрицательной секционной кривизны для какой-либо метрики на ней. Отметим, что на четномерной сфере не существует гиперслоения без особенностей. Препятствием является ненулевая эйлерова характеристика. Цель данной работы — доказать утверждение

Теорема А. *Пусть на сфере S^{2n+1}, $n \geq 2$, задана метрика положительной секционной кривизны. Тогда на ней не существует гиперслоения неотрицательной секционной кривизны.*

Отметим, что теорема А верна также в случае, если вместо сферы рассмотреть произвольное компактное многообразие положительной кривизны. Достаточно перейти к универсальному накрытию и почти дословно повторить доказательство. Сформулируем сказанное в виде теоремы

Теорема B. *Пусть на компактном многообразии M^{2n+1}, $n \geq 2$, задана метрика положительной секционной кривизны. Тогда на нем не существует гиперслоения неотрицательной секционной кривизны.*

Напомним некоторые результаты.

Теорема 1 [3] **(Топоногов).** *Пусть M — компактное многообразие неотрицательной секционной кривизны, тогда существует компактное односвязное $(n-k)$-мерное многообразие M_0 неотрицательной кривизны $(0 \leq k \leq n = dim M)$, такое что универсальная накрывающая $\widetilde{M}$ изометрична риманову произведению $M_0 \times R^k$ многообразия M_0 и евклидова фактора R^k.*

Теорема 2 [3]. *Пусть M — полное некомпактное многообразие неотрицательной секционной кривизны. Тогда в M существует компактное вполне геодезическое вполне выпуклое подмногообразие S без границы, называемое душой M, такое что M диффеоморфно нормальному расслоению S в M.*

Теорема 3 [3]. *Пусть M — полное некомпактное многообразие неотрицательной секционной кривизны, тогда M изометрично риманову произведению $\overline{M} \times R^k$, где группа $Iso(\overline{M})$ — компактна и $Iso(M) = Iso(\overline{M}) \times Iso(R^k)$.(Через Iso обозначена группа изометрий.)*

Теорема о стабильности [4]. *Пусть F — трансверсально ориентируемое гиперслоение класса C^1 на компактном многообразии с компактным слоем L, таким что $H^1(L, R) = 0$, где $H^1(L, R)$ — первая группа когомологий с действительными коэффициентами. Тогда все слои F диффеоморфны L и слоение F есть расслоение над окружностью или отрезком со слоем L.*

Теорема о локальной стабильности (см. приложение) [4]. *Пусть F слоение коразмерности k и L компактный слой F, тогда выполнено одно из следующих утверждений:*

1) линейная голономия L нетривиальна;

2) группа $H^1(L; R)$ нетривиальна;

3) голономия слоя L тривиальна, и L имеет трубчатую окрестность, в которой слоение является тривиальным расслоением.

Теорема 4 [5]. *Если $H_1(M, R) = 0$ и гиперслоение F имеет полиномиальный рост слоев, то всякое минимальное множество F есть компактный слой.*

Полиномиальный рост слоев означает, что на каждом слое объем шара в каждой фиксированной точке полиномиально зависит от радиуса. Минимальное множество — это замкнутое, насыщенное (т.е. состоящее из слоев) множество, не содержащее в себе такое же.

Доказательство теоремы A. Доказательство проведем от противного. Предположим, что существует гиперслоение $\mathcal{F}$ на S^{2n+1}, удовлетворяющее условию теоремы. Из неотрицательности кривизны слоев следует, что они имеют полиномиальный рост [8]. Поэтому соответственно теореме 4 $\mathcal{F}$ имеет компактный слой. Согласно теореме 1 рассмотрим три случая: 1) $k = 0$, 2) $k \geq 2$, 3) $k = 1$.

Случай $k = 0$. Так как универсальная накрывающая компактного слоя компактна, то фундаментальная группа слоя — конечна. Тогда из теоремы стабильности следует, что слоение должно быть расслоением над окружностью (не над отрезком, так как сфера — многообразие без края). Однако, если рассмотреть гомотопическую последовательность расслоения, можно увидеть, что фундаментальная группа окружности должна быть нулевой, что невозможно:

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \pi_n(L) \longrightarrow \pi_n(S^{2n+1}) \longrightarrow \pi_n(S^1) \longrightarrow \pi_{n-1}(L) \\ \longrightarrow \pi_{n-1}(S^{2n+1}) \longrightarrow \pi_{n-1}(S^1) \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \pi_1(S^1) = Z \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Это исключает случай $k = 0$.

Случай $k \geq 2$**.** В каждой точке x слоя L должно было бы существовать 3-мерное подпространство касательного пространства T_xL, такое что секционная кривизна слоя K_L была бы тождественным нулем на нем. Тогда можно рассмотреть ограничение $\overline{\alpha}$ второй квадратичной формы α на это подпространство. Так как это подпространство трехмерное, то существовали бы главные кривизны λ_1 и λ_2 формы $\overline{\alpha}$ такие, что $\lambda_1\lambda_2 \geq 0$. Пусть e_1 и e_2 — единичные векторы соответстветствующих главных направлений. Тогда по теореме Гаусса

$$\begin{aligned} K_e(e_1 \wedge e_2) = K_L(e_1 \wedge e_2) - K_{S^{2n+1}}(e_1 \wedge e_2) \\ =< \alpha(e_1, e_1), \alpha(e_2, e_2) > - < \alpha(e_1, e_2) >^2 \\ =< \overline{\alpha}(e_1, e_1), \overline{\alpha}(e_2, e_2) > - < \overline{\alpha}(e_1, e_2) >^2 = \lambda_1\lambda_2, \end{aligned}$$

где K_e — внешняя кривизна слоя, равная разности секционных кривизн слоя и объемлющего пространства.

По условию и выбору площадки слева стоит выражение меньше нуля, а справа — больше или равное нулю, т.е. получено противоречие, которое исключает рассматриваемый случай.

Случай $k = 1$**.** Согласно теореме 1 универсальная накрывающая компактного слоя L диффеоморфна риманову произведению $\widetilde{M} \times R$, где $\widetilde{M}$ — компактно, а, значит, L изометрично фактор-пространству $\widetilde{M} \times R/G$, где G дискретна и принадлежит $Iso(\widetilde{M} \times R) = Iso\widetilde{M} \times IsoR$ (по теореме 3).

Утверждение 1. *$H_{2n-1}(L) = R$, и существует компактная ориентируемая гиперповерхность $M \subset L$ с конечной фундаментальной группой, такая что класс $[M]$ является образующей в $H_{2n-1}(L)$.*

Доказательство. Фундаментальная группа $\pi_1(L) = G$ является дискретной подгруппой в $Iso(\widetilde{M}) \times Iso(R)$. Пусть $G_1 \subset Iso(\widetilde{M})$ и $G_2 \subset Iso(R)$ — ее проекции на сомножители. Рассмотрим подгруппу $G_2 \subset Iso(R)$. Она может быть одной из следующих четырех подгрупп:

а) $G_2 = \{e\}$, тривиальна;

б) $G_2 = Z_2$, порождена симметрией $S = \{x \to -x\}$ в R;

в) $G_2 = Z$, порождена параллельным переносом $T_a = \{x \to x + a\}$ в R $(a \neq 0)$;

г) $G_2 = Z_2 \times Z$, порождена симметрией S и параллельным переносом T_a.

В нашем случае возможности а) и б) исключены в силу компактности фактор-пространства $L = (\widetilde{M} \times R)/G$. Покажем, что и г) приводит к противоречию. Действительно, в этом случае группа G содержит элементы (g, S) и (h, T_a), где $g, h \in G_1$. Их коммутатор равен $(g^{-1}h^{-1}gh, T_{2a})$. Отсюда следует, что фактор-пространство $\overline{L}$, определяемое действием коммутанта $[G, G]$ на универсальной накрывающей слоя, компактно. Так как коммутант есть нормальная подгруппа в G, то $\overline{L}$ регулярно накрывает L и слой накрытия изоморфен фактор-группе $G/[G, G]$. Из компактности $\overline{L}$ следует, что накрытие — конечнолистно, поэтому $H_1(L, Z) = G/[G, G]$ конечна и $H_1(L, R) = 0$. Это невозможно в силу теоремы стабильности (см. случай $k = 0$).

Таким образом, $G_2 = Z$. Рассмотрим множество элементов вида $(h, 0) \in G$. Тогда $H = \{h \in G_1 : (h, 0) \in G\}$ является конечной подгруппой в G_1, так как G действует свободно. Положим $M = \widetilde{M}/H$. Тогда $L = (M \times R)/Z$ является расслоением над окружностью со слоем, гомеоморфным M, и структурной группой g. Здесь Z порождена элементом $(g, 1)$. Отображение тотального пространства на базу обозначим через p.

Покроем окружность двумя интервалами i_1, i_2. Пересечение i_1 и i_2 есть дизъюнктное объединение двух интервалов i_3, i_4. Так как над интервалом любое расслоение тривиально, то $p^{-1}(i_k)$ гомеоморфно $M \times i_k$, $k = 1, 2, 3, 4$. Заметим, что: 1) группы гомологий $H_i(M \times i_k)$ и $H_i(M)$ — изоморфны, 2) L и M — ориентируемы. Это означает, что $H_{2n-1}(M) = H_{2n}(L) = R$, 3) $H_{2n-2}(M) = H_1(M)$ (по двойственности Пуанкаре), 4) $H_1(M) = 0$ (так как фундаментальная группа M — конечна). Запишем кусок гомологической последовательности Майера–Виеториса с действительными коэффициентами:

$$
\begin{aligned}
&H_{2n}(M) \oplus H_{2n}(M) \longrightarrow H_{2n}(L) \longrightarrow H_{2n-1}(M) \oplus H_{2n-1}(M) \\
&\longrightarrow H_{2n-1}(M) \oplus H_{2n-1}(M) \longrightarrow H_{2n-1}(L) \longrightarrow H_{2n-2}(M).
\end{aligned}
$$

Учитывая вышесказанное, получаем, что эта последовательность имеет вид:

$$
0 \longrightarrow R \longrightarrow R \oplus R \longrightarrow R \oplus R \longrightarrow H_{2n-1}(L) \longrightarrow 0. \tag{2}
$$

Из точности последовательности следует утверждение 1.

Пусть $L = A \cap B$, $A \cup B = S^{n+1}$, или A и B — это подпространства, на которые слой L разбивает S^{2n+1}. Обозначим через C_1 и C_2 соответствующие "воротники" слоя L в S^{2n+1} (т.е. пересечение трубчатой окрестности слоя L с B и A соответственно). Положим

$$\widetilde{A} = A \cup C_1, \qquad \widetilde{B} = B \cup C_2.$$

Рассмотрим гомологическую последовательность Майера–Виеториса. Учитывая, что $H_{2n-1}(\widetilde{A} \cap \widetilde{B}) \simeq H_{2n-1}(L)$, получаем

$$\begin{aligned} 0 = H_{2n}(S^{2n+1}) \longrightarrow H_{2n-1}(L) \\ \longrightarrow H_{2n-1}(\widetilde{A}) \oplus H_{2n-1}(\widetilde{B}) \longrightarrow H_{2n-1}(S^{2n+1}) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

следовательно, $H_{2n-1}(L) \simeq H_{2n-1}(A) \oplus H_{2n-1}(B)$, так как $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ гомотопически эквивалентны соответственно A и B.

Поскольку $H_{2n-1}(L) \simeq R$, то либо $H_{2n-1}(A)$, либо $H_{2n-1}(B)$ нулевая. Пусть для определенности $H_{2n-1}(L) \simeq H_{2n-1}(B)$, т.е. $[M]$ представляет образующую в $H_{2n-1}(B)$ и нулевой класс в $H_{2n-1}(A)$.

Так как $\pi_1(M)$ конечна, существует вложение $\overset{o}{I} \times M \hookrightarrow S^{2n+1}$ ($\overset{o}{I}$ — открытый интервал) такое, что $\forall \quad t$ вложение $t \times M$ принадлежит некоторому слою, причем при некотором t_0 вложение $t_0 \times M$ принадлежит L (здесь и дальше во избежание громоздких обозначений будем отождествлять вложенное многообразие и само многообразие). Действительно, если рассмотреть вложение $\overset{o}{I} \times M \hookrightarrow S^{2n+1}$ такое, что $\overset{o}{I} \times M$ трансверсально слоению, тогда на $\overset{o}{I} \times M$ "высекается" некоторое слоение, причем $t_0 \times M$ — слой этого слоения, который имеет конечную фундаментальную группу. По локальной теореме стабильности слоение тривиально. (Заметим, что линейная голономия не может быть равна Z_2, так как исходное слоение трансверсально ориентируемо.)

Введем порядок на множестве компактных слоев. Пусть L_α — множество компактных слев, а $A_\alpha, B_\alpha, M_\alpha$ такие же, как A, B, M. Скажем, что $L_\alpha < L_\beta$, если $B_\beta \subset B_\alpha$ и $[M_\alpha]$ является образующей в $H_{2n-1}(B_\alpha)$ для всех α.

Утверждение 2. *Внутри B есть компактный слой L_1, такой что $L < L_1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что внутри B нет больше компактных слоев. Пусть $M_\epsilon = t_\epsilon \times M \subset L_\epsilon \subset B$. Так как $[M_\epsilon] = [M]$ в $H_{2n-1}(B)$, то $[M_\epsilon] \neq 0$ в $H_{2n-1}(L_\epsilon)$, следовательно, по теореме 2, L_ϵ гомеоморфно $S \times R$, где S — душа слоя L_ϵ. Заметим, что L_ϵ не может быть гомеоморфно нетривиальному линейному расслоению, поскольку в этом случае существовал бы путь в душе, обращающий ориентацию линейного расслоения, а значит, и души, так как L_ϵ ориентируемо. В этом случае душа была бы неориентируема, вследствие чего имело бы место равенство $H_{2n-1}(L_\epsilon) = H_{2n-1}(S) = 0$, что невозможно.

Лемма 1. *M_ϵ разделяет L_ϵ.*

Доказательство. Если это не так, тогда существует замкнутый путь α, такой что $[0] \neq [\alpha] \in H_1(L_\epsilon, Z)$ и находящийся в общем положении с M_ϵ, т.е. индекс пересечения $[M_\epsilon] \circ [\alpha]$ был бы равен 1, но $[M_\epsilon] \circ [\alpha] = k[S] \circ [\alpha] = 0$, так как L_ϵ ретрагируется на S. Полученное противоречие доказывает лемму.

Следствие 1. *Пусть $\overset{o}{I} \times M \to S^{2n+1}$ такое же, как и выше, и $M_{1\epsilon} \cup M_{2\epsilon} \in L_\epsilon$, где $M_{i\epsilon} = t_{i\epsilon} \times M(t_{i\epsilon} \in \overset{o}{I})$ $i = 1, 2$. Тогда $M_{1\epsilon} \cup M_{2\epsilon}$ разбивает L на три связные компоненты: $L_{1\epsilon} \cup \Omega \cup L_{2\epsilon}$, где Ω — многообразие с краем $M_{1\epsilon} \cup M_{2\epsilon}$.*

Лемма 2. *$\overline{L_{1\epsilon}} \cap \overline{L_{2\epsilon}} \supset L$. (Замыкание берется в S^{2n+1}.)*

Доказательство. $L_{1\epsilon}$ и $L_{2\epsilon}$ — некомпактны, так как в противном случае $[M_{1\epsilon}]$ или $[M_{2\epsilon}]$ представлял бы нулевой элемент в $H_{2n-1}(B)$, поэтому существует $x \in \overline{L_{1\epsilon}} \setminus L_{1\epsilon}$. Тогда существует достаточно малая слоеная окрестность Ox точки x, такая что $Ox \cap M_{1\epsilon} = \emptyset$. Нетрудно видеть, что множество предельных точек открыто в слое L_x, содержащем x (достаточно рассмотреть слоеную окрестность точки x). Но очевидно, что оно также является замкнутым в L_x (в топологии L_x). Значит, весь слой, содержащий x, принадлежит $\overline{L_{1\epsilon}}$. Поэтому из теоремы 4 следует, что $L \subset \overline{L_x} \subset \overline{L_{1\epsilon}}$, так как внутри B нет больше компактных слоев, кроме L. Аналогично верно и для $\overline{L_{2\epsilon}}$. Следовательно, $\overline{L_{1\epsilon}} \cap \overline{L_{2\epsilon}} \supset L$.

Лемма 3. *Ω — компактное многообразие с краем.*

Доказательство. Выберем $S_1 = S \times \widetilde{t_1}$ и $S_2 = S \times \widetilde{t_2}$ такими, что $S_1 \in L_{1\epsilon}$ и $S_1 \cap M_{1\epsilon} = \emptyset$ и соответственно $S_2 \in L_{2\epsilon}$ и $S_2 \cap M_{2\epsilon} = \emptyset$. Это всегда можно сделать, так как $M_{1\epsilon}$ и $M_{2\epsilon}$ компактны. Понятно, что $\Omega \subset S \times [\widetilde{t_1}, \widetilde{t_2}]$, следовательно, Ω — компактно.

Замечание 1. В следствии 1 можно выбрать $t_{1\epsilon}$ и $t_{2\epsilon}$ так, чтобы $\Omega \cap t \times M = \emptyset$ для $t \in (t_{1\epsilon}, t_{2\epsilon})$. Это можно сделать, поскольку множество $A = \{t \times x_0 \mid x_0$ — фиксировано, $t \in (t_{1\epsilon}, t_{2\epsilon})\}$ — дискретно в L_ϵ, следовательно, $A \cap \Omega$ — конечно как дискретное подмножество компакта.

Рассмотрим замкнутый путь $\overline{\gamma} = \gamma \cup [t_{1\epsilon}, t_{2\epsilon}] \times x_0$, где $x_0 \in M$, а γ — гладкий путь в L_ϵ, соединяющий $t_{2\epsilon} \times x_0$ с $t_{1\epsilon} \times x_0$. Обнесем репер $\{e_1, \dots e_{2n}\}$ вдоль пути $\overline{\gamma}$ так, чтобы получившееся поле реперов, которое обозначим так же, как сам репер, было касательным к слоению, а векторное поле e_{2n} —

касательно к γ и ортогонально к $[t_{1\epsilon}, t_{2\epsilon}] \times M$. Нетрудно видеть, что при полном обходе пути e_{2n} перейдет в $\pm e_{2n}$.

Предположим, что e_{2n} при обходе пути $\overline{\gamma}$ меняет ориентацию. Если $\{e_1 \dots e_{2n-1}\}$ не меняет ориентацию, то это будет противоречить ориентируемости слоения. Случай, когда e_{2n} не меняет ориентации, а $\{e_1 \dots e_{2n-1}\}$ — меняет, аналогичен. Если же $\{e_1 \dots e_{2n-1}\}$ меняет ориентацию, то заклеим Ω гладким многообразием $[t_{1\epsilon}, t_{2\epsilon}] \times M$. По построению Ω (см. замечание 1) мы получим вложенное компактное многообразие $\overline{\Omega}$. Ясно, что в индуцированной топологии $\overline{\Omega}$ есть C^0 — многообразие, однако $\overline{\Omega}$ наделяется естественной гладкой структурой [7], ибо Ω и $[t_{1\epsilon}, t_{2\epsilon}] \times M$ — гладкие многообразия с краем. Действительно, пусть $V = \partial\Omega = \partial([t_{1\epsilon}, t_{2\epsilon}] \times M)$. С помощью "воротников" многообразию V в Ω и $[t_{1\epsilon}, t_{2\epsilon}] \times M$ можно построить гомеоморфизм окрестности $U \subset \overline{\Omega}$ многообразия V на $V \times R$, переводящий $x \in V$ в $(x, 0)$ и диффеоморфно отображающий $U \cap \Omega$ и $U \cap ([t_{1\epsilon}, t_{2\epsilon}] \times M)$ на $V \times [0, \infty)$ и $V \times (-\infty, 0]$ соответственно. Мы наделяем U дифференциальной структурой, индуцируемой этим гомеоморфизмом. Дифференциальная структура на $\overline{\Omega}$ составляется из дифференциальных структур на $\Omega \setminus \partial\Omega$, $[t_{1\epsilon}, t_{2\epsilon}] \times M \setminus \partial([t_{1\epsilon}, t_{2\epsilon}] \times M)$ и U. Путь $\overline{\gamma}$ можно выбрать так, что он будет гладким относительно этой структуры. Пусть $\overline{e_{2n}}$ — касательное к $\overline{\gamma}$ векторное поле относительно этой гладкой структуры, совпадающее с e_{2n} на γ. Тогда поле $\{e_1 \dots \overline{e_{2n}}\}$ меняет ориентацию при обходе пути $\overline{\gamma}$, а это означает, что $\overline{\Omega}$ — неориентируемо, чего не может быть, так как отсюда следовало бы, что $H^{2n}(\overline{\Omega}, Z) = 0$. А из двойственности Александера имеем: $\overline{H}_0(S^{2n+1} \setminus \overline{\Omega}, G) \simeq \overline{H}^{2n}(\overline{\Omega}, G)$, где $\overline{H}$ — приведенные гомологии (когомологии) [6]. Противоречие получаем в том, что при $G = Z_2$ правая часть равенства изоморфна Z_2, поэтому множество $S^{2n+1} \setminus \overline{\Omega}$ должно иметь две связные компоненты. А при $G = Z$ правая часть равна нулю и $S^{2n+1} \setminus \overline{\Omega}$ должно иметь только одну связную компоненту.

Предположим, что e_{2n} и $\{e_1 \dots e_{2n-1}\}$ не меняют ориентации при обходе пути $\overline{\gamma}$. Тогда $\overline{\Omega}$ — ориентируемое C^0 — подмногообразие S^{2n+1}. Следовательно, $\overline{\Omega}$ разделяет S^{2n+1}. Пусть $L_{1\epsilon}$, Ω, $L_{2\epsilon}$ такие, как в следствии 1. Из леммы 2 следует, что найдутся точки x_1 и x_2, принадлежащие $L_{2\epsilon}$, которые лежат как по одну, так и по другую стороны от $\overline{\Omega}$. Возьмем x_1 достаточно близко к $t_{2\epsilon} \times M$. Соединим x_1 и x_2 гладким путем α в $L_{2\epsilon}$, трансверсальным к $[t_{1\epsilon}, t_{2\epsilon}] \times M$. Пусть t, принадлежащее $[t_{1\epsilon}, t_{2\epsilon}]$, — параметр, который соответствует ближайшей к x_1 вдоль пути α точке, принадлежащей $[t_{1\epsilon}, t_{2\epsilon}] \times M$. Нетрудно видеть, что вместо многообразия Ω можно рассмотреть компактное многообразие Ω_1 с краем $t \times M \cup t_{2\epsilon} \times M$, которое удовлетворяет замечанию 1, а компактное многообразие $\overline{\Omega_1} = \Omega_1 \cup [t, t_{2\epsilon}] \times M$ удовлетворяет уже разобранному случаю. Противоречие показывает, что слой L_ϵ должен содержать в замыкании еще один компактный слой L_1. Предположим, $L \subset B_1$.

Пусть $M_\omega \subset L_\epsilon$ и $M_\omega = t_\omega \times M_1$ при вложении $\overset{o}{I} \times M_1 \hookrightarrow S^{2n+1}$. Следовательно, $[M_\omega] = \alpha[M_\epsilon]$, так как $H_{2n-1}(L_\epsilon) = R$, но $[M_\epsilon] = [0]$ в $H_{2n-1}(A)$, поэтому $[M_1] = [M_\omega] = \alpha[M_\epsilon] = [0]$ в $H_{2n-1}(B_1)$ и представляет образующую в $H_{2n-1}(A_1)$, чего быть не может. Значит, $L \subset A_1$ и $L < L_1$.

Если внутри B в некоторой окрестности L все слои компактны, то найдется достаточно близкий к L компактный слой $L_\alpha \subset B$, такой что $B_\alpha \subset B$. Достаточно взять слой, соответствующий некоторому параметру t при вложении $\overset{o}{I} \times M \hookrightarrow B$. Так как $[M_\alpha] = [M]$ в B, то $B_\alpha \subset B$.

Утверждение 2 доказано.

Пусть $\{L_\alpha\}$ — некоторое линейно-упорядоченное подмножество множества компактных слоев относительно порядка, введенного выше. $\bigcap\limits_\alpha B_\alpha \neq \emptyset$, ибо в противном случае из покрытия $\{S^{2n+1} \setminus B_\alpha\}$ нельзя было бы выделить конечное подпокрытие. Это противоречило бы компактности сферы. Пусть L_0 — некоторый компактный слой, принадлежащий границе $\bigcap\limits_\alpha B_\alpha$. Он существует по теореме 4. Так как для любой точки x из L_0 и любой ее окрестности O_x существуют точки как принадлежащие, так и не принадлежащие $\bigcap\limits_\alpha B_\alpha$, то существует слой L_β и точка y из O_x такие, что y не лежит в B_β. Поэтому путь, соединяющий x с y, пересекает L_β из-за того, что L_β разделяет сферу. Так как окрестность точки x была взята произвольно, то достаточно близко к L_0 существует слой L_{α_0} такой, что $[M_{\alpha_0}] = [M_0] \neq [0]$ в $H_{2n-1}(B_{\alpha_0})$, где $M_{\alpha_0} \in L_{\alpha_0}$ такое, что $M_{\alpha_0} = t_0 \times M_0$ для некоторого t_0 при вложении $\overset{o}{I} \times M_0 \hookrightarrow S^{2n+1}$. Следовательно, $B_0 \subset B_{\alpha_0}$. Понятно, что $L_0 > L_\alpha$ для всех $L_\alpha \subset B$.

Из леммы Цорна следует, что во множестве компактных слоев существует максимальный элемент L_{max}. Однако из доказанного выше утверждения 2 ясно, что внутри B_{max}, где $B_{max} \in \{B_\alpha\}$, существует компактный слой L_γ такой, что $L_{max} < L_\gamma$. Это противоречие завершает доказательство теоремы A.

Доказательство теоремы B. Так как компактное многообразие положительной секционной кривизны имеет конечную фундаментальную группу [8], то его универсальная накрывающая — компактна. Поэтому в дальнейшем можно считать, что $\pi_1(M^{2n+1}) = 0$.

Случаи $k = 0$ и $k \geq 2$ доказываются полностью аналогично.

Для случая $k = 1$ последовательность Майера–Виеториса (см. (6)) будет иметь такой вид:

$$\begin{aligned} 0 = H_{2n}(M^{2n+1}) &\longrightarrow H_{2n-1}(L) \\ \longrightarrow H_{2n-1}(\widetilde{A}) \oplus H_{2n-1}(\widetilde{B}) &\longrightarrow H_{2n-1}(M^{2n+1}). \end{aligned} \tag{4}$$

Из последовательности видно, что существует компонента B такая, что $H_{2n-1}(L) \to H_{2n-1}(B)$ — нетривиальна.

Отметим, что порядок на множестве компактных слоев нужно ввести несколько по другому, так как, вообще говоря, у нас нет однозначности в выборе A_α и B_α, поэтому определим B_α однозначно следующим образом.

Всякий компактный слой L_α, лежащий внутри B, разбивает M^{2n+1} на две компоненты. Обозначим их через A_α и B_α, причем B_α та из них, которая лежит внутри B.

Теперь введем порядок на множестве компактных слоев: $L_\alpha < L_\beta$, если $B_\beta \subset B_\alpha$ и $[M_\alpha]$ является образующей в $H_{2n-1}(B_\alpha)$ для всех α.

Наконец, последнее место в теореме A, где используется тот факт, что объемлющее пространство — сфера, это есть двойственность Александера. Однако в случае крайних гомологий и когомологий двойственность Александера верна для односвязных компактных многообразий [6]. Все остальные рассуждения в теореме B полностью аналогичны.

Приложение. Голономия.

Рассмотрим слой L и гладкий путь s на нем. Построим вдоль этого пути семейство трансверсальных отрезков. Они составляют цилиндр $I \times I$ (слоение предполагаем трансверсально ориентируемым). Слои слоения будут высекать на этом цилиндре линии, которые определяют диффеоморфизм окрестности центра одного основания в окрестность центра другого основания. Этот диффеоморфизм не меняется при гомотопии (с закрепленными концами). Рассматривая только замкнутые пути, получаем представление фундаментальной группы слоя L в группе локальных диффеоморфизмов отрезка в его центре. Это и есть голономия. Если рассмотреть только линейные части локальных диффеоморфизмов, то получим представление фундаментальной группы в группе $GL(1)$, изоморфной R. Это представление называется линейной голономией слоя L.

Автор выражает благодарность проф. А.А. Борисенко за научное руководство и внимание к работе, Ю.А. Николаевскому за предложенное им упрощение некоторых мест доказательства, а также Т.Ю. Яценко за помощь в подготовке данной работы.

Список литературы

[1] *И. Тамура*, Топология слоений. Мир, Москва (1979), 317 с.

[2] *S. Garret*, Un analogue feuillite du theoreme de Cartan–Hadamard. — C. R. Acad. Sci. (1991), Ser. 1, p. 519–522.

[3] *J. Cheeger and D. Gromoll*, On structure of complete manifolds of nonegative curvature. — Ann. of Math. (1972), v. 96, No. 3, p. 413–443.

[4] *W. Thurston*, A generalization of Reeb stability theorem. — Topology (1974), v. 13, p. 347–352.

[5] *Y. Plante*, Generalization of the Poincaré–Bendixson theorem for foliations of codimension one. — Topology (1973), v. 12, p. 177–181.

[6] *А. Дольд*, Лекции по алгебраической топологии. Мир, Москва (1976), 464 с.

[7] *М. Хирш*, Дифференциальная топология. Мир, Москва (1979), 280 с.

[8] *Р. Бишоп, Р. Криттенден*, Геометрия многообразий. Мир, Москва (1967), 355 с.

On hyperfoliations of spheres

D.V. Bolotov

It is proved that a sphere of positive curvature of a dimension more than or equal to five admits no hyperfoliation of non-negative curvature

Про гіпершарування сфер

Д.В. Болотов

Доведено, що не існує гіпершарування невід'ємної кривини на сфері позитивної кривини вимірності більшої чи рівної п'яти.