Математическая физика, анализ, геометрия
1999, т. 6, № 3/4, с. 223–233

Асимптотическое поведение объемов выпуклых тел в многообразии Адамара

А.А. Борисенко, Д.И. Власенко

Харьковский государственный университет
Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4
E-mail: Alexander.A.Borisenko@univer.kharkov.ua
E-mail: Dmitry.I.Vlasenko@univer.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 5 февраля 1999 года

Получена оценка предела для отношения объема к площади семейства вложенных орисферически выпуклых тел, которые покрывают односвязное полное риманово многообразие неположительной секционной кривизны. Получен аналогичный результат в случае λ-выпуклых тел пространства Лобачевского.

1. Введение

Для евклидова пространства E^n отношение объема выпуклой компактной области к площади ее границы стремится к бесконечности, если радиус вписанного шара стремится к бесконечности.

Иная ситуация в пространстве Лобачевского. В 1972 году Сантало и Янесом [1] была доказана

Теорема 1. *Пусть $\{\Omega(t)\}_{t\in R^+}$ — семейство компактных h-выпуклых тел пространства Лобачевского L^2, распространяющихся на все пространство, тогда*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\text{площадь}(\Omega(t))}{\text{длина}(\partial\Omega(t))}=1.$$

Эта теорема была обобщена А.А. Борисенко и В. Микуэлем [2] на случай произвольной размерности пространства Лобачевского.

Теорема 2. *Пусть $\{\Omega(t)\}_{t\in R^+}$ — семейство компактных h-выпуклых тел пространства Лобачевского L^{n+1}, распространяющихся на все пространство, тогда*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\text{объем}(\Omega(t))}{\text{объем}(\partial\Omega(t))}=\frac{1}{n}.$$

Данная работа обобщает эту теорему на случай многообразия Адамара с ограниченной секционной кривизной $0 > -k_1 \geq K_\sigma \geq -k_2$.

Для того чтобы сформулировать полученные результаты, введем несколько определений.

Определение 1. *Полное риманово односвязное многообразие с неположительной секционной кривизной называется многообразием Адамара.*

Определение 2. *Зафиксируем точку p многообразия Адамара и луч l, выходящий из этой точки. Рассмотрим сферы, проходящие через точку p, с центрами на луче l. Предел последовательности этих сфер при радиусе, стремящемся к бесконечности, называется орисферой.*

Определение 3. *Тело называется h-выпуклым, если в каждой его граничной точке существует опорная орисфера и тело содержится в этой орисфере.*

Определение 4. *Семейство тел $\{\Omega(t)\}_{t\in R^+}$ многообразия Адамара распространяется на все многообразие, если для любой точки p многообразия существует $t_0 \in R^+$, что для любых $t > t_0$, $p \in \Omega(t)$.*

Теперь можем сформулировать результат данной работы.

Теорема 3. *Пусть $\{\Omega(t)\}_{t\in R^+}$ — семейство компактных h-выпуклых тел в многообразии Адамара размерности $n+1$ с ограниченной секционной кривизной $0 > -k_1 \geq K_\sigma \geq -k_2$, распространяющихся на все пространство. Тогда*

$$\frac{1}{n\sqrt{k_2}} \leq \varliminf_{t\to\infty} \frac{\text{объем}(\Omega(t))}{\text{объем}(\partial\Omega(t))} \leq \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\text{объем}(\Omega(t))}{\text{объем}(\partial\Omega(t))} \leq \frac{1}{n\sqrt{k_1}}.$$

Очевидно, что теорема 2 является следствием приведенной теоремы, если в теореме 3 положить $k_1 = k_2$. Необходимо отметить, что правая часть неравенства верна при более слабых требованиях, так как известна

Теорема 4 [3, с. 234]. *Пусть M — полное односвязное (n+1)-мерное риманово многообразие ($n \geq 2$) с секционными кривизнами $K_\sigma \leq -k_1 < 0$. Тогда для любого измеримого множества $E \subset M$ справедливо неравенство*

$$n\sqrt{k_1}V(E) \leq P(E),$$

где $P(E)$ — периметр множества E.

Однако для h-выпуклых множеств оценка не может быть улучшена, что следует из теоремы 2. Если не выполняется условие h-выпуклости, то, как показали Е. Галлего и А. Ревентос [4], в плоскости Лобачевского кривизны $-k$ для любого $\lambda \in [0; k)$ существует последовательность выпуклых многоугольников, распространяющихся на всю плоскость, и пределом отношения площади к длине этих многоугольников будет заданное число λ.

2. Вспомогательные результаты

Нам понадобится неравенство для якобианов экспоненциальных отображений. Введем соответствующее определение.

Определение 5. *Пусть* $\gamma : [0, s] \to M$, $\gamma(0) = p$ *— нормальная геодезическая в римановом пространстве* M, $\dim M \geq 2$. *Тогда* $J(t)$ *— якобиан экспоненциального отображения* $\exp_p : T_pM \to M$ *в точке* $t\gamma'(0)$.

Теорема 5 [3, с. 223]. *Если на геодезической* $\gamma : [0, s] \to M$ *нет точек, сопряженных* $p = \gamma(0)$, *и во всех точках* γ *секционные кривизны*

1) не меньше k, *то на* $[0, s]$ $\frac{J(t)}{J(s)} \geq \frac{J_k(t)}{J_k(s)}$;

2) не превосходят k, *то на* $[0, s]$ $\frac{J(t)}{J(s)} \leq \frac{J_k(t)}{J_k(s)}$.

Утверждение 1. *Пусть* $s > 0$, $n > 0$. *Тогда*

$$\frac{1}{(1 - e^{-2ks})^n} \left(\frac{1}{kn}(1 - \frac{1}{e^{kns}}) - \frac{n}{k(n-2)}(e^{-2ks} - e^{-kns}) \right)$$

$$< \int\limits_0^s \frac{(\sinh kt)^n}{(\sinh ks)^n} dt < \frac{1}{kn} \left(1 - \frac{1}{e^{kns}} \right).$$

Доказательство. Преобразуем исходное выражение

$$\int\limits_0^s \frac{(\sinh kt)^n}{(\sinh ks)^n} dt = \int\limits_0^s \frac{(e^{kt} - e^{-kt})^n}{(e^{ks} - e^{-ks})^n} dt = \int\limits_0^s e^{kn(t-s)} \left(\frac{1 - e^{-2kt}}{1 - e^{-2ks}} \right)^n dt.$$

Полученное выражение оценим сверху

$$\int\limits_0^s e^{kn(t-s)} \left(\frac{1 - e^{-2kt}}{1 - e^{-2ks}} \right)^n dt < \int\limits_0^s e^{kn(t-s)} dt = \frac{1}{kn} \left(1 - \frac{1}{e^{kns}} \right).$$

Для оценки снизу нам понадобится неравенство $(1-a)^n \geq 1 - an, 0 < a < 1$.

$$\int\limits_0^s e^{kn(t-s)} \left(\frac{1 - e^{-2kt}}{1 - e^{-2ks}} \right)^n dt > \int\limits_0^s e^{kn(t-s)} \frac{1 - ne^{-2kt}}{(1 - e^{-2ks})^n} dt$$

$$= \frac{1}{(1 - e^{-2ks})^n} \int\limits_0^s (e^{kn(t-s)} - ne^{kn(t-s)-2kt}) dt$$

$$= \frac{1}{(1-e^{-2ks})^n}\left(\frac{1}{kn}(1-\frac{1}{e^{kns}}) - \frac{n}{k(n-2)}(e^{-2ks}-e^{-kns})\right),$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим геодезический треугольник Δ в многообразии Адамара M, образованный точками $p, q \in M$ и бесконечно удаленной точкой z. Пусть $l = d(p,q)$, $\alpha = \angle(pq, qz)$, $\beta = \angle(qp, pz)$. Так как орисфера определяется точкой и лучом с началом в этой точке и концом в бесконечно удаленной точке, то можем обозначать орисферу парой точек. Две орисферы называются параллельными, если они имеют общую точку на абсолюте. Известно, что если орисфера проходит через точку абсолюта z, то она ортогональна всем геодезическим, проходящим через точку z. Таким образом, параллельные орисферы являются параллельными поверхностями. Обозначим расстояние между параллельными орисферами, задаваемые парами точек (p,z) и (q,z), через d.

Утверждение 2 [5]. *Пусть Δ — рассмотренный выше треугольник. В пространствах Лобачевского L_{k_1} и L_{k_2} существуют единственные треугольники Δ_{k_1} и Δ_{k_2} (с точностью до изометрии) с $l = l_{k_1} = l_{k_2}$ и $d = d_{k_1} = d_{k_2}$ и для углов выполняются неравенства*

$$\alpha_{k_2} \le \alpha \le \alpha_{k_1},\ \beta_{k_2} \le \beta \le \beta_{k_1}.$$

Далее нам понадобится конформная модель пространства Лобачевского L^n. В этой модели пространство Лобачевского представлено шаром единичного радиуса, граница шара — абсолют, геодезическими будут евклидовы полуокружности, которые ортогональны абсолюту, а орисферами — шары, касающиеся абсолюта. Тогда в L^n метрика $ds^2 = \frac{4(dx_1^2+\ldots+dx_n^2)}{(1-(x_1^2+\ldots+x_n^2))^2}$.

Утверждение 3. *Пусть точка p содержится в оришаре, ограниченном орисферой O пространства Лобачевского L^n кривизны $-k$. Допустим, угол α образован лучом, выходящим из точки p, и нормалью к орисфере в точке пересечения луча и орисферы. Тогда*

$$\cos\alpha \ge \sqrt{1-e^{-2\sqrt{k}r}},$$

где r — расстояние от точки p до орисферы.

Это неравенство было получено в работе [2] для поверхности, являющейся границей пересечения двух оришаров.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся конформной моделью L^n, приведенной выше. В центр поместим точку p. Тогда геодезическими, проходящими через точку p, будут евклидовы отрезки. Орисферами в этой модели будут евклидовы сферы, касающиеся абсолюта. Так как у нас конформная модель, то оценка α сводится к элементарной задаче евклидовой геометрии — нахождению максимального угла, который образован евклидовым лучом, выходящим из точки p, и соответствующим радиусом. Нахождение данного угла осуществим в плоскости, содержащей этот луч и радиус, что соответствует рассмотрению случая размерности два.

В круг единичного радиуса с центром в точке p вписана окружность O с центром в точке o, которая касается круга в точке z. Пусть расстояние от точки p до окружности равно s, тогда радиус окружности равен $\frac{1+s}{2}$, так как $|pz| = 1$. Тогда $|op| = \frac{1-s}{2}$.

Положим, что q — произвольная точка окружности O. Рассмотрим треугольник pqo. Пусть $\angle pqo = \alpha$, $\angle qpo = \beta$, тогда $\frac{\sin\alpha}{|po|} = \frac{\sin\beta}{|oq|}$. Отсюда $\sin\alpha = \frac{1-s}{1+s}\sin\beta$, и находим, что максимум α достигается, когда $pq \perp po$. Итак, в прямоугольном треугольнике pqo $\sin\alpha = \frac{1-s}{1+s}$, значит, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{s}}{1+s}$.

Величина s является евклидовым расстоянием; пересчитаем эту величину в расстояние r плоскости Лобачевского кривизны $-k$ в нашей модели с метрикой $ds^2 = \frac{4(dx_1^2+dx_2^2)}{k(1-(x_1^2+x_2^2))^2}$:

$$r = \int\limits_0^s \frac{2dt}{\sqrt{k}(1-t^2)} = \frac{1}{\sqrt{k}}\ln\frac{1+s}{1-s}.$$

Откуда $s = \frac{e^{\sqrt{k}r}-1}{e^{\sqrt{k}r}+1}$, и $\frac{2\sqrt{s}}{1+s} = \sqrt{1-e^{-2\sqrt{k}r}}$, что и требовалось доказать.

3. Основная лемма

Для доказательства теоремы получим оценку отношения объема к площади для произвольного компактного h-выпуклого множества многообразия Адамара через радиус вписанного шара. Тогда теорема станет простым следствием этой оценки, когда устремим радиусы вписанного и описанного шаров к бесконечности.

Основная лемма. *Пусть E — компактное h-выпуклое тело в $(n+1)$-мерном многообразии Адамара с ограниченной секционной кривизной $0 > -k_1 \geq K_\sigma \geq -k_2$. Тогда*

$$\frac{\sqrt{1-e^{-2\sqrt{k_1}r}}}{(1-e^{-2\sqrt{k_2}r})^n}\left(\frac{1}{\sqrt{k_2}n}(1-\frac{1}{e^{\sqrt{k_2}nr}}) - \frac{n}{\sqrt{k_2}(n-2)}(e^{-2\sqrt{k_2}r}-e^{-\sqrt{k_2}nr})\right)$$

$$< \frac{\text{объем}(E)}{\text{объем}(\partial E)} < \frac{1}{\sqrt{k_1}n}\left(1-\frac{1}{e^{\sqrt{k_1}nR}}\right),$$

где r и R *— радиусы вписанного и описанного шаров.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим компактное h-выпуклое тело E, для которого:

$$\frac{\text{объем}(E)}{\text{объем}(\partial E)} = \frac{\int\limits_{S^n} \int\limits_0^{l(u)} J(t)t^n \, dt d\Omega}{\int\limits_{S^n} \frac{J(l(u))l^n(u)}{<\partial_l, N>} d\Omega}, \tag{1}$$

где $d\Omega$ — метрика сферы, $J(t)$ — определитель Якоби экспоненциального отображения, l(u) — длина геодезических, выходящих из центра вписанного шара — точки $o \in E$, вписанный шар существует, так как E выпуклое множество; ∂_l — градиент расстояния от точки o, N — единичный вектор нормали к ∂E.

Преобразуем выражение (1):

$$\frac{\text{объем}(E)}{\text{объем}(\partial E)} = \frac{\int\limits_{S^n} \frac{\int\limits_0^{l(u)} J(t)t^n dt}{J(l(u))l^n(u)} J(l(u))l^n(u) d\Omega}{\int\limits_{S^n} \frac{J(l(u))l^n(u)}{<\partial_l, N>} d\Omega}.$$

Для оценки этого выражения снизу необходимо исследовать функцию $g(l(u)) = \frac{\int_0^{l(u)} J(t)t^n dt}{J(l(u))l^n(u)}$ и $< \partial_l, N >$. Для подмногообразия с отрицательной кривизной $-k_1 \geq K_\sigma \geq -k_2$ можем утверждать по теореме 5, что $\frac{J_{-k_1}(t)}{J_{-k_1}(s)} \geq \frac{J(t)}{J(s)} \geq \frac{J_{-k_2}(t)}{J_{-k_2}(s)}$, где $J_k(t)$ — якобиан экспоненциального отображения пространства постоянной кривизны k.

Явно $J_k(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh \sqrt{-k}t\right)^n t^{-n}$ [3, с. 222]. Тогда

$$\int\limits_0^{l(u)} \frac{(\sinh \sqrt{k_1}t)^n}{(\sinh \sqrt{k_1}l(u))^n} dt \geq \int\limits_0^{l(u)} \frac{J(t)t^n}{J(l(u))l^n(u)} dt \geq \int\limits_0^{l(u)} \frac{(\sinh \sqrt{k_2}t)^n}{(\sinh \sqrt{k_2}l(u))^n} dt.$$

Применив утверждение 1, находим

$$\frac{1}{(1 - e^{-2\sqrt{k_2}r})^n} \left(\frac{1}{\sqrt{k_2}n}(1 - \frac{1}{e^{\sqrt{k_2}nr}}) - \frac{n}{\sqrt{k_2}(n-2)}(e^{-2\sqrt{k_2}r} - e^{-\sqrt{k_2}nr})\right)$$

$$< g(l(u)) < \frac{1}{\sqrt{k_1}n}\left(1 - \frac{1}{e^{\sqrt{k_1}nR}}\right),$$

где r и R — соответственно радиусы вписанного и описанного шаров.

Далее необходимо получить оценку $< \partial_l, N >$ снизу. Мы должны оценить угол между геодезической, выходящей из центра вписанного шара, и нормалью в точке пересечения геодезической с поверхностью. Тем самым приходим к рассмотрению треугольника Δ, который образован центром вписанного шара, — точкой p, точкой q, принадлежащей орисфере и бесконечно удаленной точкой z. Угол между pq и нормалью будет углом треугольника pqz при вершине q, который обозначим α. Так как $0 > -k_1 \geq K_\sigma \geq -k_2$, то в пространствах постоянной кривизны L_{k_1} и L_{k_2} существуют единственные треугольники со стороной, равной $d(p,q)$, и таким же расстоянием между параллельными орисферами. Для этих треугольников из того, что $0 > -k_1 \geq K_\sigma \geq -k_2$, получаем оценку для соответствующих углов из утверждения 2:

$$\alpha_{k_2} \leq \alpha \leq \alpha_{k_1},\ \beta_{k_2} \leq \beta \leq \beta_{k_1}.$$

Нам необходима оценка $\alpha \leq \alpha_{k_1}$.

Далее в пространстве L_{k_1} при помощи утверждения 3 находим максимальное значение угла α_{k_1}. Таким образом,

$$\cos\alpha \geq \sqrt{1 - e^{-2\sqrt{k_1}r}},$$

где r — расстояние от точки p до орисферы, т.е. радиус вписанного шара.

Подставляя указанные оценки в выражение (1), получаем утверждение леммы.

4. О нормальной кривизне орисфер

Рассмотрим в многообразии Адамара с ограниченной секционной кривизной $0 > -k_1 \geq K_\sigma \geq -k_2$, k_1, $k_2 > 0$, орисферу и найдем ее нормальные кривизны. В двухмерном случае известно, что для геодезической кривизны k_g верно $\sqrt{k_2} \geq k_g \geq \sqrt{k_1}$ [6].

В многомерном случае в многообразии Адамара класса C^∞ орисфера будет поверхностью класса C^2 [7]. Поэтому нормальные кривизны орисферы определены для каждой точки в любом направлении. Известно, что для сфер многообразия Адамара с ограниченной секционной кривизной $0 > -k_1 \geq K_\sigma \geq -k_2$, k_1, $k_2 > 0$, нормальная кривизна сфер ограничена $\sqrt{k_2} \geq k_n \geq \sqrt{k_1}$ [8, с. 173]. В силу того, что орисфера является пределом сфер, будет верно

Утверждение 4. *В многообразии Адамара класса C^∞ с ограниченной секционной кривизной $0 > -k_1 \geq K_\sigma \geq -k_2$, k_1, $k_2 > 0$ нормальная кривизна орисфер ограничена $\sqrt{k_2} \geq k_n \geq \sqrt{k_1}$.*

5. О λ-выпуклых телах пространства Лобачевского

Рассмотрим в пространстве Лобачевского L^n кривизны -1 множество точек, равноудаленных от вполне геодезической гиперплоскости пространства Лобачевского. Данное множество образует две поверхности, которые называются эквидистантными гиперповерхностями плоскости. В конформной модели единичного шара это будут части евклидовых сфер, пересекающих абсолют под ненулевым углом.

Найдем нормальные кривизны эквидистантной гиперповерхности. Так как эквидистантная гиперповерхность является омбилической поверхностью, то достаточно рассмотреть в плоскости Лобачевского эквидистанту и найти ее геодезическую кривизну. Известно [3, с. 238], что кривизна эквидистанты, взятой на расстоянии $h = \operatorname{Arth} \lambda$ от прямой, будет равна λ. Также известно, что кривизна равняется $\cos\beta$, где β — меньший угол, который эквидистанта образует с абсолютом [9]. Назовем эквидистантную гиперповерхность с нормальными кривизнами, равными λ, *λ-плоскостью.*

В пространстве Лобачевского λ-плоскости занимают промежуточное положение между гиперплоскостями и орисферами. Гиперплоскость пространства Лобачевского — это 0-плоскость, а орисфера — это 1-плоскость. В L^2 λ-плоскость называется *λ-прямой.* Выпуклое тело, чьей границей является λ-плоскость, назовем λ-полупространством.

Определение 6. *Тело пространства Лобачевского называется λ-выпуклым, если в каждой его граничной точке существует опорная λ-плоскость и тело содержится в λ-полупространстве.*

О λ-выпуклости в римановом многообразии можно узнать из работы [3, с. 237]. Очевидно, в такой терминологии выпуклость будет 0-выпуклостью, а h-выпуклость — 1-выпуклостью. Отметим, что любое λ-выпуклое тело будет выпуклым.

Утверждение 5. *Пусть точка p содержится в выпуклом полупространстве, ограниченном эквидистантной омбилической гиперповерхностью нормальной кривизны λ в пространстве Лобачевского L^n кривизны -1. Пусть α — угол, образованный геодезическим лучом, который выходит из точки p, и нормалью к эквидистантной гиперповерхности в точке их пересечения. Пусть r — расстояние от точки p до эквидистанты. Если $r \geq \ln\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}$, то $\cos\alpha > \lambda$, если $r < \ln\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}$, то $\cos\alpha \geq \frac{2\sqrt{s(\lambda-s)(1-\lambda s)}}{1-s^2}$, где $s = \tanh\frac{r}{2}$.*

Доказательство. Достаточно провести рассуждения в случае $n = 2$, т.е. на плоскости Лобачевского. В конформной модели круга

λ-прямыми будут евклидовы отрезки и дуги окружностей, которые образуют с абсолютом, являющимся в данной модели окружностью, угол β, такой что $\cos\beta = \lambda$. Геодезическими будут обобщенные окружности, которые ортогональны абсолюту. Геодезические, проходящие через центр, будут евклидовыми отрезками. Пусть точка p — центр окружности, который совпадает с началом координат. Отложим на оси Oy отрезок pn, где координаты $n(0,s)$. Проведем λ-прямую, ортогональную pn, так, что отрезок pn содержится в λ-плоскости, которая ограничена этой λ-прямой. Луч, выходящий из p, обозначим pz, где z — точка на абсолюте.

Рассуждения утверждения 3 показывают, что при $\lambda = 1$ точка максимума угла α достигается, когда луч pz ортогонален отрезку pn. Эти рассуждения, приведенные для конформной модели шара, верны при $0 \le \lambda \le 1$ в силу того, что это есть евклидова задача о нахождении угла. В этих рассуждениях орицикл представлен окружностью и должен быть заменен λ-прямой — частью окружности, что позволяет дословно перенести доказательство, если луч $pz \perp pn$ пересекает λ-прямую. Если $pz \perp pn$ не пересекает λ-прямую, то величина угла α является возрастающей функцией от длины дуги окружности nx. Тогда супремум угла α достигается в точке v — точке пересечения λ-прямой с абсолютом. Величина этого угла равна β. Отметим, что угол $\beta = \angle(pvo)$, где o — центр окружности, на которой расположена λ-прямая. В этом случае $\alpha < \beta$; таким образом, получаем, что $\cos\alpha > \lambda$.

Найдем наименьшую длину отрезка pn, при котором $\cos\alpha > \lambda$. Эта длина достигается на λ-прямой, проходящей через точки абсолюта $a(1,0)$, $(-1,0)$. Рассмотрим прямоугольный треугольник apo. Пусть радиус $oa = R$, координаты — $n(0,s)$, тогда $op = R - s$. Угол $\angle(pao) = \beta$, следовательно, $R = \frac{1}{\cos\beta} = \frac{1}{\lambda}$. Применив теорему Пифагора, получим $s = \frac{1}{\lambda}(1 - \sqrt{1-\lambda^2})$. В метрике $ds^2 = \frac{4(dx^2+dy^2)}{(1-x^2-y^2)^2}$ находим искомую длину $r = \ln\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}$. То есть, при $r \ge \ln\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}$, $\cos\alpha > \lambda$.

Найдем наибольшее значение α, когда $r < \ln\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}$. Рассмотрим треугольник pvo, где $\beta = \angle(pvo)$. По теореме косинусов $(R-s)^2 = 1 + R^2 - 2R\lambda$, откуда $R = \frac{1-s^2}{2(\lambda - s)}$. На отрезке $pq \perp pn$, где q — точка пересечения луча pq с λ-прямой, достигается максимальный угол α. Из треугольника opq находим $\cos\alpha = \frac{\sqrt{R^2-(R-s)^2}}{R} = \frac{\sqrt{2R\lambda - 1}}{R} = \frac{2}{1-s^2}\sqrt{(\lambda - s)[\lambda(1-s^2) - (\lambda - s)]} = \frac{2\sqrt{s(\lambda-s)(1-\lambda s)}}{1-s^2}$. В метрике $ds^2 = \frac{4(dx^2+dy^2)}{(1-x^2-y^2)^2}$ величина $s = \tanh\frac{r}{2}$. Утверждение доказано.

Необходимо отметить, что данный результат обобщает утверждение 3, для получения которого теперь достаточно взять $\lambda = 1$. Тогда, следуя рассуждениям, приведенным в основной лемме, получим

Теорема 6. *Пусть E — компактное λ-выпуклое тело ($0 \le \lambda \le 1$) в ($n+1$)-мерном многообразии Лобачевского кривизны -1. Пусть r и R — радиусы вписанного и описанного шаров. Тогда:*

(1) при $r < \ln\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}$, верно

$$\frac{2\sqrt{s(\lambda-s)(1-\lambda s)}}{(1-e^{-2r})^n(1-s^2)}\left(\frac{1}{n}(1-\frac{1}{e^{nr}})-\frac{n}{(n-2)}(e^{-2r}-e^{-nr})\right)$$
$$<\frac{\text{объем}(E)}{\text{объем}(\partial E)}<\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{e^{nR}}\right),$$

где $s=\tanh\frac{r}{2}$;

(2) при $r \ge \ln\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}$, верно

$$\frac{\lambda}{(1-e^{-2r})^n}\left(\frac{1}{n}(1-\frac{1}{e^{nr}})-\frac{n}{(n-2)}(e^{-2r}-e^{-nr})\right)$$
$$<\frac{\text{объем}(E)}{\text{объем}(\partial E)}<\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{e^{nR}}\right).$$

Рассмотрим семейство компактных λ-выпуклых тел пространства Лобачевского L^{n+1}, распространяющихся на все пространство; тогда, устремив радиус вписанного шара к бесконечности, получим следующую теорему

Теорема 7. *Пусть $\{\Omega(t)\}_{t\in R^+}$ — семейство компактных λ-выпуклых тел пространства Лобачевского L^{n+1} кривизны -1, распространяющихся на все пространство. Тогда*

$$\frac{\lambda}{n}\le\varliminf_{t\to\infty}\frac{\text{объем}(\Omega(t))}{\text{объем}(\partial\Omega(t))}\le\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\text{объем}(\Omega(t))}{\text{объем}(\partial\Omega(t))}\le\frac{1}{n}.$$

Для случая размерности два эта теорема была получена Э. Галего и А. Ревентосом [9], в которой было показано, что в L^2 для любого числа из отрезка $[\lambda;1]$ указанный предел достигается.

Список литературы

[1] *L.A. Santalo and I. Yanez,* Average for polygons by random lines in euclidean and hyperbolic planes. — J. Appl. Probability, (1972) v. 9, p. 140–157.

[2] *A.A. Borisenko and V. Miquel,* Integral curvatures of h-convex hypersurfaces in hyperbolic space. — Illinois J. Math. (1999), v. 43, No. 1, p. 1–17.

[3] *Ю.Д. Бураго, В.А. Залгаллер,* Геометрические неравенства. Наука, Ленинград (1980).

[4] *E. Gallego and A. Reventos*, Asymptotic behavior of convex sets in the hyperbolic plane. — J. Diff. Geom. (1985), v. 21, p. 63–72.

[5] *E. Heintze and H.C. Im Hof*, Geometry of horospheres. — J. Diff. Geom. (1977), v. 12, p. 481–491.

[6] *Е.В. Шикин*, О регулярности орициклических координат. — Мат. заметки, (1975), т. 17, № 3, с. 475–484.

[7] *С.А. Щербаков*, Орисферическая координатная сеть на гиперболическом роге. В сб: Геометрия. Изд-во им. А.И. Герцена, Ленинград (1977), с. 117–128.

[8] *Ю.Д. Бураго, В.А. Залгаллер*, Введение в риманову геометрию. Наука, Санкт-Петербург (1994).

[9] *E. Gallego and A. Reventos*, Asymptotic behavior of λ-convex sets in the hyperbolic plane. Preprint (1998), 12 p.

Asymptotic behavior of volume of convex sets in Adamar manifold

A.A. Borisenko, D.I. Vlasenko

We estimate the limit at infinity of the quotients volume/area for a family of convex with respect to horospheres sets expanding over the whole simply connected complete Riemannian manifold of nonpositive sectional curvature. A similar result is obtained for λ-convex sets in Hyperbolic space.

Асимптотична поведінка об'ємів опуклих тіл в многовиді Адамара

О.А. Борисенко, Д.І. Власенко

Отримано оцінку границі для відношення об'єма до площі сім'ї вкладених орисферично опуклих тіл, які укривають однозв'язний повний ріманів многовид недодатної секційної кривини. Аналогічний результат отримано у випадку λ-опуклих тіл простору Лобачевського.