Математическая физика, анализ, геометрия
1999, т. 6, № 3/4, с. 288–316

Конформные субмерсии кэлеровых многообразий. II

С.И. Окрут

Харьковский государственный университет
Украина, 310077 Харьков, пл. Свободы, 4

E-mail: sergey.i.okrut@univer.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 25 мая 1997 года

Статья является продолжением первой части работы и посвящена исследованию глобальных свойств кэлеровых многообразий, допускающих голоморфную конформную субмерсию с вертикальным показателем конформности на другое кэлерово многообразие; слои субмерсии предполагаются вполне геодезическими. Такие кэлеровы многообразия можно рассматривать как кэлеров аналог скрещенного произведения в римановой геометрии. Полные кэлеровы многообразия с субмерсией указанного типа необходимо являются расслоенными пространствами с изоморфными слоями. Предложен метод конструирования расслоений, в том числе полных, а также компактных с неримановой проекцией, являющейся субмерсией того же типа. Показано, что для существования таких расслоений с одномерными слоями необходимо и достаточно, чтобы база была ходжевым многообразием. Дана голоморфная классификация всех возможных полных одномерных слоев субмерсии указанного выше типа.

Эта статья является продолжением первой части работы[1] и посвящена исследованию глобальных свойств кэлеровых многообразий, допускающих голоморфную конформную субмерсию с вертикальным показателем конформности на другое кэлерово многообразие. Метрику кэлеровых многообразий с субмерсией указанного типа можно рассматривать [1] как кэлеров аналог скрещенного произведения в римановой геометрии. В первой части работы в теоремах 3.6 и 5.4 было получено описание строения кэлеровой метрики многообразия E, допускающего голоморфную конформную субмерсию с вертикальным показателем конформности и вполне геодезическими одномерными слоями. Параграф 6 посвящен вопросам "в целом". В теореме 6.1

[1] См. — Мат. физ., анализ, геом., 1998, т. 5, № 3/4, с. 228–248. Для удобства чтения ссылки [1–7] здесь приведены те же, что и в первой части статьи.

установлено, что базой голоморфной конформной субмерсии с вертикальным показателем конформности и вполне геодезическими одномерными слоями обязательно служит многообразие Ходжа. Далее рассматриваются расслоения, которые допускают такую кэлерову структуру, что проекция является голоморфной конформной субмерсией, а слои — вполне геодезическими одномерными многообразиями. Если ходжева форма базы такого расслоения не является когомологичной нулю, то расслоение обязательно нетривиальное. Метод построения таких расслоений с вертикальным (непостоянным) показателем конформности и вполне геодезическими слоями предложен в теореме 6.6. С помощью этого метода можно конструировать полные, в том числе компактные, кэлеровы расслоенные пространства с проекцией указанного типа. Показано, что достаточным условием существования таких расслоений является ходжевость базы, теорема 7.1. Приведены конкретные примеры 7.2–7.4 полных расслоений указанного типа. В параграфе 8 рассматривается вопрос о строении "в целом" полных кэлеровых многообразий, допускающих голоморфные конформные субмерсии с вертикальным показателем конформности и вполне геодезическими слоями. Такими многообразиями, как показано в теореме 8.6, являются введенные в определении 8.4 скрещенные кэлеровы расслоения. Рассмотрен случай, когда слои субмерсии имеют минимальную комплексную размерность. Найдены все римановы поверхности, которые могут служить слоями скрещенного кэлерова расслоения. Этому посвящен § 9. В последнем параграфе решена задача о построении многообразий Штейна как тотальных пространств скрещенного кэлерова расслоения, теорема 10.8.

Произвольно выбираемые многообразия, функции и тензорные поля предполагаются гладкими (класса C^∞). Основные понятия и обозначения соответствуют принятым (например, в [3, 4]).

§ 6. Топология базы голоморфной конформной субмерсии

Многообразие Кэлера M, Φ_0 принято называть ходжевым, если все периоды кэлеровой формы Φ_0 целократны некоторому вещественному числу. Это эквивалентно тому, что кэлерова форма, $\Phi_0 = r\Phi_M$, пропорциональна некоторому образу Φ_M целочисленного когомологического класса при естественном гомоморфизме $H^2(M,\mathbb{Z})$ в $H^2_{dR}(\mathbb{C}) \simeq H^2(\mathbb{C})$. Многообразиями Ходжа являются, например, $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}P^n$. Так как всякое комплексное подмногообразие ходжева многообразия является ходжевым, то все, естественным образом появляющиеся, кэлеровы многообразия также являются ходжевыми.

В данном параграфе будет показано, что топологическим критерием существования голоморфной конформной субмерсии является ходжевость базы. Далее будем считать, что все произвольно выбираемые расслоенные пространства являются локально тривиальными. Локальной тривиализацией расслоенного пространства L со стандартным слоем S и проекцией ν называется [4, пункт 9.47] пара (O,σ): окрестность базы O и отображение σ, диффеоморфно отображающее порцию $\nu^{-1}(O)$ на $O \times S$. Если расслоенные пространства наделены римановой метрикой, то *конформным* расслоением будет называться расслоение, проекция которого является конформной субмерсией. Согласно принятому в §4, рассматриваемые здесь голоморфные конформные субмерсии всегда имеют *непостоянный* показатель конформности.

Расслоение называется *голоморфным*, если: 1) как тотальное пространство, так и база расслоения являются комплексными многообразиями, а проекция ν — голоморфным отображением; 2) каждая точка обладает окрестностью O и локальной тривиализацией (O,σ), такой, что σ является голоморфным отображением. Стандартный слой голоморфного расслоения — это обязательно комплексное многообразие, и функции перехода расслоения для некоторого атласа локальных тривиализаций принимают значение в группе голоморфных преобразований стандартного слоя. Наконец, голоморфное расслоение будет называться *кэлеровым* расслоением, если база и тотальное пространство расслоения являются кэлеровыми многообразиями.

Под хорошим покрытием понимается такое локально конечное открытое покрытие $\{U_\alpha\}$, что все элементы покрытия и их конечные пересечения являются стягиваемыми множествами. Для любой кэлеровой формы Φ_M многообразия M ее образ при изоморфизме де Рама $H^2_{dR} \mapsto H^2(\mathbb{C})$ всегда можно представить вещественным 2-коциклом $x = (x_{\alpha\beta\gamma})$ хорошего покрытия $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha\}$. Этот коцикл определяется [8, с. 83–85] следующими условиями:

$$x_{\alpha\beta\gamma} = F_{\alpha\beta} + F_{\beta\gamma} + F_{\gamma\alpha}, \tag{6.1}$$

$$\operatorname{Im} F_{\alpha\beta} = F_\beta - F_\alpha, \tag{6.2}$$

$$-2i\partial\overline{\partial} F_\alpha = \Phi_\alpha = \Phi_M | U_\alpha, \tag{6.3}$$

где $F_{\alpha\beta}$ — голоморфные функции, определенные на $U_\alpha \cap U_\beta$, а F_α — вещественные функции на U_α (кэлеровы потенциалы).

Теорема 6.1. *Пусть многообразие M ($\dim_c M > 1$) с заданной 2-формой Φ_M является многообразием Кэлера и служит базой голоморфной конформной субмерсии с вертикальным (непостоянным) показателем конформности и вполне геодезическими одномерными слоями некоторого также кэлерова многообразия. Тогда M, Φ_M — многообразие Ходжа.*

Доказательство. Обозначим через Φ_M кэлерову форму базы M. Пусть ν — субмерсия, заданная на кэлеровом многообразии E и удовлетворяющая условиям теоремы. Обозначим через f ее показатель конформности. Рассмотрим множество L, элементами которого служат векторные поля kW ($k \in \mathbb{C}$) произвольного слоя E. Эти поля пропорциональны полю $W = \exp(2f)\,\mathrm{gr}^{1,0} f$, суженному на слой E_z, где $z \in M$. Покажем, что на L можно ввести структуру голоморфного линейного расслоения относительно проекции pr на M, сопоставляющую точку базы z каждому элементу L, т.е. векторному полю kW слоя E_z. В соответствии с леммой 4.3 в каждом слое E_z найдется точка Ξ, в которой поле W не обращается в 0. В некоторой открытой окрестности O точки Ξ многообразие E, как установлено в теореме 3.6, изоморфно кэлерову продолжению с некоторой функцией продолжения y. Из доказательства этой теремы следует, что субмерсия ν отображает множество O на такое открытое множество U базы M, что на U определен кэлеров потенциал F_M для Φ_M. Пусть w — координата в окрестности точки Ξ вдоль слоя субмерсии, которая выражается через координату ζ из (1.2) по формуле $w = \exp(\zeta)$. В соответствии с леммой 4.1 векторное поле W будет иметь локально координатное представление $W = -2\pi w\partial/\partial w$. Любому векторному полю вида kW, суженному на слой E_z ($z \in U$) поставим в соответствие пару $(kw; z)$ и тем самым зададим отображение

$$\sigma \,:\, \mathrm{pr}^{-1}(U) \mapsto U \times \mathbb{C}. \tag{6.4}$$

Из паракомпактности многообразия M следует, что для него можно выбрать такое хорошее покрытие $\mathcal{U}$, каждый элемент U_α которого обладает свойствами построенного выше множества U. Тогда соответствующая система σ_α, U_α отображений задает атлас тривиализаций голоморфного линейного расслоения. Действительно, функции перехода

$$f^\alpha_\beta = \frac{w_\beta}{w_\alpha} \,:\, U_\alpha \cap U_\beta \mapsto \mathbb{C}^* \tag{6.5}$$

являются голоморфными, потому что w_α — голоморфная не обращающаяся в нуль на O_α функция. Покажем, что функции f^α_β зависят лишь от точки z, в которую проектируется слой L. На основании формулы (1.2)

$$|f^\alpha_\beta| = e^{2\pi(F_\beta - F_\alpha)}. \tag{6.6}$$

Выражение в правой части равенства есть функция лишь от z. Если модуль голоморфной функции f^α_β не зависит от w, то и сама эта функция не зависит от w. Таким образом, из теоремы единственности для голоморфной функции и равенства (6.2) получаем следующее:

$$f^\alpha_\beta = \exp(-2\pi i F_{\alpha\beta}). \tag{6.7}$$

В итоге доказано, что структурная группа для голоморфного расслоения L — это $\mathbb{C}^*$ и функции перехода действуют в каждом слое L линейными преобразованиями $f^\alpha_\beta \cdot kw_\alpha = kw_\beta$.

Рассмотрим экспоненциальную последовательность

$$0 \mapsto \mathbb{Z} \mapsto \mathcal{O} \overset{2\pi i \exp}{\longmapsto} \mathcal{O}^* \mapsto 0,$$

где $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}^*$ — пучки ростков: голоморфных функций на M и голоморфных функций, не обращающихся в 0 . Через $\mathbb{Z}$ обозначен постоянный целочисленный пучок.

С одной стороны, хорошо известно, что группа Пикара голоморфных линейных расслоений изоморфна 1-й группе когомологий с коэффициентами в пучке $\mathcal{O}^*$ и характеристическим отображением c из (6.8), порожденным экспоненциальной последовательностью, и отображается во 2-ю группу целочисленных когомологий:

$$\mathrm{Pic}(M) \simeq H^1(\mathcal{O}^*) \overset{c}{\longmapsto} H^2(\mathbb{Z}). \tag{6.8}$$

То есть характеристический класс $c(L)$ — целочисленный, и он может быть вычислен как связывающий гомоморфизм короткой точной последовательности. Явное вычисление значения $c(L)$ для расслоения L, заданного функциями перехода (6.7), приводит к формуле

$$c(L) = \{c_{\alpha\beta\gamma} = -F_{\alpha\beta} - F_{\beta\gamma} - F_{\gamma\alpha}, \quad U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset\}.$$

С другой стороны, образ Φ_M при изоморфизме де Рама $H^2_{dR} \mapsto H^2(\mathbb{C})$, который вычислен известным методом, приведенным, например в [8, с. 83–85], при использовании формул (6.1)–(6.3) с точностью до знака представляется тем же 2-коциклом, что и $\{c_{\alpha\beta\gamma}\}$. Таким образом, Φ_M как класс в $H^2(\mathbb{C})$ когомологичен $-c(L)$, т.е. Φ_M является формой Ходжа. ■

Следствие 6.2. *Если глобально тривиальное расслоение $E = M \times S$ над M является кэлеровым конформным расслоением с вертикальным (непостоянным) показателем конформности и имеет вполне геодезические одномерные слои, то кэлерова форма базы M когомологична нулю.*

Доказательство. В процессе доказательства теоремы 6.1 было установлено, что кэлерова форма базы Φ_M когомологична взятому с противоположным знаком характеристическому классу специально построенного голоморфного линейного расслоения L. Причем из построения L следует, что если E тривиальное расслоение, то L тоже тривиальное расслоение, и поэтому $c(L) = 0$. ■

Следствие 6.3. *Компактное кэлерово многообразие не может служить базой тривиального кэлерова конформного расслоения с вертикальным непостоянным показателем конформности и вполне геодезическими одномерными слоями.*

Пусть дано многообразие Ходжа M, Φ_M и некоторая целая форма, т.е. кратная образу целочисленного неделимого класса при изоморфизме де Рама, $\Omega = \Phi_M/m$, где $m \in \mathbb{Z}$. Линейное эрмитово расслоение L, h над M будем называть *присоединенным* к форме Ω, если форма кривизны эрмитовой связности (в смысле [4 с. 113]) совпадает с формой Ω. Как показано в [8, с. 79–80], с точностью до изоморфизма де Рама характеристический класс такого расслоения L, определяемый с помощью связывающего гомоморфизма для экспоненциальной последовательности, совпадает с формой кривизны, $c(L) = \Omega$.

Лемма 6.4. *Если Φ_M форма Ходжа многообразия M, то существует линейное эрмитово расслоение L, h, присоединенное к форме Φ_M, у которого локально координатные представления эрмитова скалярного произведения h_α относительно некоторого атласа $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha\}$ имеют вид*

$$h_\alpha = \exp(-4\pi F_\alpha),$$

где F_α — вещественные кэлеровы потенциалы для Φ_M на U_α.

Доказательство. Применяя определенный формулами (6.1)–(6.3) изоморфизм де Рама в случае ходжевой формы Φ_M, можно заключить, что в этом случае 2-коцикл $x = \{x_{\alpha\beta\gamma}\}$ когомологичен целочисленныму 2-коциклу $c = \{c_{\alpha\beta\gamma}\}$. Таким образом, существуют такие комплексные числа $P_{\alpha\beta}$, что

$$c_{\alpha\beta\gamma} = x_{\alpha\beta\gamma} + P_{\alpha\beta} + P_{\beta\gamma} + P_{\gamma\alpha} \tag{6.9}$$

для любых α, β, γ, таких, что $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$. Покрытие при этом, если необходимо, заменяется более тонким. Как известно [8, с. 83–85], функции f_α^β, определенные формулой (6.10), являются функциями перехода голоморфного линейного расслоения, характеристический класс $c(L)$ которого равен Φ_M:

$$f_\alpha^\beta = \exp\left(2\pi i Q_{\alpha\beta}\right) : U_\alpha \cap U_\beta \mapsto \mathbb{C}^*, \tag{6.10}$$

$$Q_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} + P_{\alpha\beta}.$$

Обозначим через $\mathbb{Z}$ постоянный $\mathbb{Z}$-пучок, а через $\mathcal{O}^*$ — пучок ростков необращающихся в нуль голоморфных функций на M. Хорошо известно, например из [9, гл. I, § 2, формула (11)], тó достаточно очевидное обстоятельство, что экспоненциальная последовательность является короткой точной последовательностью для любого комплексного многообразия. По построению голоморфного линейного расслоения L над M, его характеристический класс $c(L)$, определенный из экспоненциальной последовательности, совпадает с целочисленным когомологическим классом c из формулы (6.9). При этом, конечно, $c(L)$ отождествляется со своим образом в комплексных когомологиях

$H^2(\mathbb{C})$ посредством отображения в когомологиях индуцированного естественным вложением $\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{C}$.

Переходя к построению эрмитова скалярного произведения h в L, следует прежде всего отметить, что комплексные числа $P_{\alpha\beta}$ в (6.9) можно выбрать чисто вещественными. Если бы это было не так, то можно было бы сделать замену $P_{\alpha\beta} := \operatorname{Re} P_{\alpha\beta}$, отбросив мнимую часть. Так как x — вещественный коцикл, то значение $c_{\alpha\beta\gamma}$, определенное формулой (6.9), после такой замены не изменится. Эрмитово скалярное произведение h определим локально координатными представлениями h_α относительно использованного выше атласа $\mathcal{U}$:

$$h_\alpha = \exp(-4\pi F_\alpha), \tag{6.11}$$

где функции кэлерова потенциала F_α те же, что и прежде. Корректность так определенного эрмитова скалярного произведения следует из сравнения крайних частей в цепи равенств

$$h_\alpha |f_\alpha^\beta|^2 = h_\alpha \exp(-4\pi \operatorname{Im} F_{\alpha\beta}) = h_\beta, \tag{6.12}$$

при получении которых использовалась формула (6.2) и отсутствие мнимой части у величин $P_{\alpha\beta}$. ■

Лемма 6.5. *Если Φ_M — форма Ходжа многообразия M, то существует линейное эрмитово расслоение L^*, h^*, присоединенное к форме $\Omega = -\Phi_M$, у которого локально координатные представления эрмитова скалярного произведения h_α^* относительно некоторого атласа $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha\}$ имеют вид*

$$h_\alpha^* = \exp(4\pi F_\alpha),$$

где F_α — это вещественные кэлеровы потенциалы для Φ_M на U_α.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Характеристическое отображение c из (6.8) является групповым гомоморфизмом относительно операции тензорного умножения расслоений в группе $\operatorname{Pic}(M)$ и сложения когомологических классов в $H^2(M, \mathbb{Z})$. Поэтому из формулировки леммы следует, что голоморфное линейное расслоение L^* — это расслоение, двойственное к расслоению L из леммы 6.4. И значения функций перехода $\varphi_\alpha^\beta = \exp(-2\pi i Q_{\alpha\beta})$ расслоения L^* для атласа $\mathcal{U}$, определяемого формулами (6.1)–(6.3), являются обратными к значениям голоморфных функций перехода расслоения L из формулы (6.10). Определенное в формулировке леммы локальное представление эрмитова скалярного произведения корректно, потому что вместо формулы (6.12) выполняются следующие равенства:

$$h_\alpha^* |\varphi_\alpha^\beta|^2 = h_\alpha^* \exp(4\pi \operatorname{Im} F_{\alpha\beta}) = h_\beta^*. \quad ■$$

З а м е ч а н и е. Множество голоморфных линейных расслоений L над кэлеровым многообразием M с одним и тем же характеристическим классом $c(L) = \Omega$ представляет из себя многообразие Пикара $\mathrm{Pic}^0(M)$ [8, теорема 10.3]. На основании теоремы 1, приведенной в [7 с. 204], эрмитово скалярное произведение для компактного ходжева многообразия M, которое определено на фиксированном присоединенном к Ω расслоении, единственно с точностью до умножения скалярного произведения на положительную константу. Для некомпактного ходжева многообразия произвол обусловлен лишь запасом непостоянных голоморфных функций на M, так как умножение эрмитова произведения на модуль экспоненты такой голоморфной функции оставляет эрмитово произведение присоединенным к той же форме Ω.

Теорема 6.6. *Каждое ходжево многообразие M может служить базой кэлерова конформного расслоения E с вертикальным показателем конформности f и вполне геодезическими одномерными слоями. В качестве стандартного слоя может выступать риманова поверхность, голоморфно эквивалентная одной из следующих поверхностей:*

а) *единичному кругу с выколотым центром B_1^*;*

б) *комплексной прямой с выколотой точкой $\mathbb{C}^*$;*

в) *всей комплексной прямой $\mathbb{C}$;*

г) *B_1 — единичному кругу в $\mathbb{C}$;*

д) *$\mathbb{C}P^1$ — сфере Римана, при этом f имеет ровно два экстремальных значения;*

е) *кольцу $K = \{w \in \mathbb{C} \mid A < |w| < B\}$, причем $0 < A < B < +\infty$.*

При этом в случаях а), б) и е) показатель конформности f всюду невырожденный, а в случаях в) и г) имеет только одно экстремальное значение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Φ_M форма Ходжа многообразия M. Воспользуемся леммами 6.4 и 6.5. Пусть линейное эрмитово расслоение L, h является присоединенным к форме $\Omega = \Phi_M$, а L^*, h^* — к форме $\Omega = -\Phi_M$. Через $\|\Xi\|$ будем обозначать норму вектора Ξ как в первом, так и во втором расслоениях. Тогда

$$h_\alpha w_\alpha \overline{w}_\alpha = \|\Xi\|^2 \qquad h^*_\alpha w_\alpha \overline{w}_\alpha = \|\Xi\|^2. \tag{6.13}$$

Пусть $l = l(s)$ гладкая невырожденная на промежутке от A до B функция ($0 \le A < B \le +\infty$), такая что выполняется неравенство в (6.14) для некоторого C из промежутка от A до B. Пусть равенством в (6.14) определена положительная функция $p(s)$ для $\lambda = 1$ или для $\lambda = -1$. Пусть E — подрасслоение в L или в L^*, состоящее из векторов, норма которых принадлежит промежутку от A до B. Формулами (6.14), (6.15) определим на E ($\lambda = 1$ или

$\lambda = -1$ для L или L^*, соответственно) форму типа (1,1), где ν — это проекция в расслоении L или L^*. Далее,

$$p^2(s) = p_c^2 - 2\lambda \int_C^s \sigma \left(\frac{dl}{d\sigma}\right)^2 d\sigma > 0, \tag{6.14}$$

$$\Phi = -\frac{2i}{\pi}\partial l(s) \wedge \overline{\partial} l(s) + p^2(s)\nu^*\Phi_M, \qquad s = \|\Xi\|. \tag{6.15}$$

Сопоставляя выражение, полученное для s из формул (6.15), (6.13) при помощи лемм 6.4 и 6.5, с выражением (4.6), приходим к выводу, что форма Φ, заданная формулой (6.15), в каждой порции над U_α совпадает с формой Φ из примера 4.6. На основании примера 4.6 можно заключить, что расслоение E, оснащенное формой Φ, является кэлеровым конформным расслоением с вертикальным показателем конформности и вполне геодезическими слоями. Выбором параметров A, B и функции $l(s)$ можно реализовать каждый пункт теоремы, кроме д). Так, для функции $l(s)$, определенной на $(0; B)$, где $0 < B \leq +\infty$, реализуются пп. а), б). Для $l(s)$, определенной на $[0; B)$, реализуются пп. в), г). Для пункта е) параметры выбираются так: $0 < A < B < +\infty$. Выбор указанных параметров и функции $l(s)$, очевидно, возможен для $\lambda = \pm 1$.

Случай д) требует отдельного рассмотрения. Пусть $l(s)$ произвольная гладкая невырожденная (в нуле справа) функция, определенная на $[0; +\infty)$. Причем $l(s)$ выберем так, чтобы порядок производной $l'(s)$ на бесконечности относительно величины $1/s$ был равен 2. Это условие обеспечивает, в частности, сходимость несобственного интеграла в (6.16):

$$\frac{dl}{ds} \sim \frac{k}{s^2}(s \to +\infty), \quad 2\int_0^{+\infty} \sigma \left(\frac{dl}{d\sigma}\right)^2 d\sigma = p_0^2 - p_\infty^2 > 0, \tag{6.16}$$

$$p^2(s) = p_1^2 - 2\int_1^s \sigma \left(\frac{dl}{d\sigma}\right)^2 d\sigma > 0. \tag{6.17}$$

Выберем произвольное положительное число p_1 таким, чтобы выполнялось неравенство в (6.17). Тогда пара равенств (6.16) и $p_1^2 = (p_0^2 + p_\infty^2)/2$ однозначно задают значение p_0 $(0 < p_1 < p_0)$ положительной функции $p(s)$, определяемой равенством (6.17). При этом $p_0 = p(0)$ и p_∞ есть ее предел при $s \to +\infty$, $p_\infty > 0$. Например, функция $l(s) = \cos(\pi/(4\sqrt{s+1}))$ удовлетворяет условию невырожденности, и для нее выполняется эквивалентность из (6.16).

Перейдем к построению расслоения E случая д), слой которого — сфера. Расслоение будет получено, образно говоря, путем заклеивания расслоения L

в бесконечности. Пусть $L \oplus L^*$ — это прямая сумма голоморфных линейных расслоений, определяемая традиционным образом, как например в [9, с. 69]. В обоих слагаемых кэлерова структура определяется с помощью формулы (6.15), но функции $l(s)$ и $p(s)$ для первого экземпляра расслоения, определенные выше формулами (6.16), (6.17), для второго экземпляра расслоения определяются иначе. Обозначим их с волной вверху:

$$\widetilde{l}(r) = l\left(\frac{1}{r}\right), \quad \widetilde{p}^2(r) = p_1^2 + 2\int\limits_1^r \rho\left(\frac{d\widetilde{l}}{d\rho}\right)^2 d\rho.$$

Эквивалентность в (6.16) означает невырожденность $\widetilde{l}$ в нуле. Рассмотрим отображение инверсии между указанными расслоениями с вырезанными нулевыми сечениями L_0 и L_0^*. В ранее введенных координатах эта инверсия определяется так: $(z; w_\alpha) \mapsto (z; w_\alpha^{-1})$. Из формул (6.13) и лемм 6.4, 6.5 следует, что нормы векторов при таком преобразовании взаимно обратны. Так как функции l и p переходят в функции $\widetilde{l}$ и $\widetilde{p}$ при замене переменных r на $1/s$, то инверсия осуществляет кэлеров изоморфизм между двумя кэлеровыми многообразиями L_0 и L_0^*. Выберем в качестве функции склейки инверсное отображение. Полученное после склейки многообразие обозначим через E. Из построения ясно, что E имеет своим слоем S^2 и удовлетворяет всем остальным требованиям теоремы. ∎

§ 7. Субмерсии полных кэлеровых многообразий

Расслоенное пространство называется полным, если оно является полным как риманово многообразие.

Теорема 7.1. *Каждое полное ходжево многообразие M может служить базой полного кэлерова конформного расслоения E с вертикальным показателем конформности f и вполне геодезическими одномерными слоями. В качестве стандартного слоя полного расслоения E может выступать риманова поверхность, голоморфно эквивалентная одной из следующих поверхностей:*

а) *единичному кругу с выколотым центром B_1^*;*

б) *комплексной прямой с выколотой точкой $\mathbb{C}^*$;*

в) *всей комплексной прямой $\mathbb{C}$;*

г) *B_1 — единичному кругу в $\mathbb{C}$;*

д) *$\mathbb{C}P^1$ — сфере Римана, при этом f имеет ровно два экстремальных значения.*

Причем в случаях а) и б) показатель конформности f всюду невырожденный, а в случаях в) и г) — имеет одно экстремальное значение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем применять теорему 6.6, выбирая специальным образом функцию $l(s)$. Для того чтобы построенное кэлерово расслоение E оказалось полным, необходимо выбирать функцию l, удовлетворяющей дополнительному свойству:

(1) для случаев а), б) образ функции l совпадает со всей вещественной прямой, $\operatorname{Im} l = (-\infty; +\infty)$;

(2) для случаев в), г) $A = 0$ и $\operatorname{Im} l = [0; +\infty)$.

Эти дополнительные условия на $l(s)$ должны выполняться одновременно с прежним условием справедливости неравенства в (6.14) для любых s. Это означает, что несобственный (в силу дополнительных условий) интеграл в (7.1)

$$\int\limits_A^B \sigma \left(\frac{dl}{d\sigma}\right)^2 d\sigma > 0 \tag{7.1}$$

при $\lambda = 1$ должен сходится на верхнем пределе, а при $\lambda = -1$ — на нижнем. При таком выборе $l(s)$ слой S расслоения E является полным римановым многообразием. В пункте д) слой является полным римановым многообразием по построению, более того, компактом. Случай а) реализуется, например, для функции $l(s)$, заданной равенством (7.2) для $\lambda = 1$. Очевидно, что кольцо с внешним радиусом, равным бесконечности, голоморфно эквивалентно кругу с выколотым центром. Случай б) реализуется, например, для функции $l(s)$, заданной равенством (7.3) при $\lambda = 1$:

$$l(s) = \ln\ln(s/A) \, : \, (A; +\infty) \mapsto \mathbb{R}, \tag{7.2}$$

$$l(s) = \ln\ln(1+s) \, : \, (0; +\infty) \mapsto \mathbb{R}, \tag{7.3}$$

$$l(s) = \ln\left(1 + \ln(1+s)\right) \, : \, [0; +\infty) \mapsto \mathbb{R}, \tag{7.4}$$

$$l(s) = \operatorname{tg}\frac{\pi s}{2B} \, : \, [0; B) \mapsto \mathbb{R}, \tag{7.5}$$

случай в) — для функции $l(s)$, заданной равенством (7.4) для $\lambda = 1$, а случай г) реализуется, например, для функции $l(s)$ заданной равенством (7.5) для $\lambda = -1$.

Итак, во всех случаях а)–д) построено расслоение E с полным слоем, являющееся кэлеровым продолжением многообразия M вдоль кривой. В (4.10) имеется выражение для римановой метрики g, ассоциированной с Φ. Отображение, сопоставляющее вектору Ξ вещественное число $l\left(\|\Xi\|\right)/\sqrt{2\pi}$, является римановой субмерсией из E на $\mathbb{R}$ относительно канонической метрики прямой. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность векторов Ξ_k в E относительно расстояния, порожденного g. Числовая последовательность $l\left(\|\Xi_k\|\right)$ также является фундаментальной и, следовательно, ограниченной. Так как $p^2(l)$ — гладкая функция от l, то существуют такие положительные числа c и r, что неравенства в (7.6) выполняются при $\Xi = \Xi_k$ $\forall k$. Пусть замкнутое в E подмножество Q состоит из векторов Ξ, норма которых удовлетворяет неравенствам в (7.6). Последовательность Ξ_k содержится в Q:

$$r \geq p^2\left(\|\Xi\|\right) \geq c, \tag{7.6}$$

$$q = \frac{1}{2\pi}\left(dl^2 + d^c l^2\right) + c \cdot \nu^* g_M. \qquad (7.7).$$

Рассмотрим риманову метрику на Q, определенную формулой (7.7). Из формулы (4.10) и второго неравенства в (7.6) следует, что $q \leq g$, поэтому Ξ_k является фундаментальной последовательностью и относительно расстояния, порожденного q. Из первого неравенства в (7.6) следует, что спроектированная на базу последовательность $\nu_*\Xi_k$ является фундаментальной последовательностью в M относительно расстояния, порожденного g_M. Из полноты базы получаем, что при $k \to \infty$ $\nu_*\Xi_k \to z \in U$, где U — некоторое замкнутое множество базы, допускающее тривиализацию. Обозначим $P = Q \cap \nu^{-1}(U)$. Риманово многообразие (P, q) является прямым произведением полных римановых многообразий: замкнутого подмногобразия полного риманова пространства S и базы с римановой метрикой cg_M. Поэтому (P, q) также является полным римановым многообразием, и относительно расстояния, порожденного q, рассматриваемая последовательность сходится. Из первого неравенства в (7.6) следует, что $g \leq r \cdot q$, поэтому последовательность Ξ_k сходится и относительно расстояния, порожденного g. Таким образом, E является полным кэлеровым многообразием. ■

З а м е ч а н и е. Формулой (7.2) в расслоении E определена кэлерова метрика, слоями которой служат псевдосферы Бельтрами кривизны -2π.

П р и м е р 7.2. Хорошо известно, что кэлерова форма Φ_M на $\mathbb{C}P^n$ метрики постоянной голоморфной кривизны, равной 4π, является формой Ходжа. Голоморфное линейное расслоение H^*, двойственное расслоению Хопфа H, обладает тем свойством, что $c(H^*) = \Phi_M$. Если из H^* (или H) вырезать нулевое сечение, то полученное многообразие будет диффеоморфно $E = S^{2n+1} \times \mathbb{R}$. Согласно пункту б) теоремы 7.1 на E существуют полные кэлеровы метрики, относительно которых проекция расслоения Хопфа является голоморфной конформной субмерсией с вертикальным невырожденным показателем конформности и вполне геодезическими слоями. А согласно пункту в) той же теоремы само расслоение H^* (или H) допускает кэлерову метрику с теми же свойствами, но показатель конформности на нулевом сечении будет иметь максимальное (соответственно минимальное) значение.

П р и м е р 7.3. Пусть M многообразие Кэлера–Эйнштейна отрицательной (положительной) скалярной кривизны. Тогда на основании пункта в) теоремы 7.1 каноническое K (соответственно антиканоническое K^*) расслоение допускает полную кэлерову метрику, такую что проекция расслоения является голоморфной конформной субмерсией с вертикальным показателем конформности и вполне геодезическими слоями. Причем на нулевом сечении K (и K^*) достигается глобальный максимум (соответственно минимум), и нулевые сечения будут вполне геодезическими подмногообразиями.

П р и м е р 7.4. Рассмотрим положительный неделимый целочисленный класс α произвольного ходжева многообразия M. Пусть $P(m)$, $m \in \mathbb{N}$, главное расслоение со структурной группой S^1, соответствующее элементу $m\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z})$, как в [4, теорема 9.129]. Можно показать, что расслоение E из пункта д) теоремы 7.1 является расслоением, ассоциированным с $P(m)$ со стандартным слоем $\mathbb{C}P^1$. В обозначениях указанной теоремы $E = E(m)$. Из указанной теоремы Берара–Бержери известно, что E допускает кэлеровы метрики. В теореме же 7.1 показано, что на E имеются такие полные кэлеровы метрики, что проекция расслоения является конформной субмерсией с вертикальным показателем конформности и со вполне геодезическими слоями. Показатель конформности имеет два критических значения: наибольшее и наименьшее. По лемме 5.3 соответствующие поверхности уровня являются вполне геодезическими подмногообразиями.

§ 8. Когда голоморфная конформная субмерсия является проекцией расслоения

Теорема 8.1 является обобщением известной теоремы R. Hermann [4, п. 9.42].

Теорема 8.1. *Если $\nu : E \mapsto M$ конформная субмерсия полного риманова многообразия E с вертикальным показателем конформности, то ν является проекцией локально тривиального расслоения ν, база которого — также полное риманово многообразие.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть X^H горизонтальный лифт векторного поля X базы. Из [10, теорема 3.2(i) и формула (3.4)] следует такое равенство:

$$\nabla_{X^H} X^H = (\nabla_X X)^H - \|X^H\|^2 \operatorname{gr} f. \tag{8.1}$$

Пусть $\gamma = x_s$ ($|s| < \varepsilon$) геодезическая базы и s ее натуральный параметр. Через $X = \{X_s = \dot{x}_s\}$ обозначим векторное поле скорости, $\|X\| = 1$. Интегральные кривые Ξ_s горизонтального лифта X^H проектируются в интегральные кривые поля X, т.е. $\nu(\Xi_s) = x_s$. Рассмотрим систему уравнений (8.2)–(8.3) для кривых $\Xi_s \in E$:

$$\nabla_Z Z + \|Z\|^2 \operatorname{gr} f = 0, \tag{8.2}$$

$$Z = \dot{\Xi}_s. \tag{8.3}$$

На основании теоремы существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и формулы (8.1) решение Ξ_s с такими начальными условиями, что $Z_0 = \dot{\Xi}_0$ — это горизонтальный вектор, является горизонтальной кривой, проектирующейся на геодезическую базы. Вычислим

$$\frac{d}{ds}\|Z\|^2 = 2g(\nabla_Z Z, Z) = -2\|Z\|^2 df(Z) = 0$$

при условии, что показатель конформности — вертикальная функция. Таким образом, норма вектора скорости — величина постоянная вдоль любой интегральной кривой системы (8.2)–(8.3).

Покажем, что всякая интегральная кривая Ξ_s $(0 \le s < \varepsilon)$ продолжается в точку $s = \varepsilon$. Рассмотрим последовательность $s_n \to \varepsilon$ при $n \to \infty$. Обозначим $\Xi_n = \Xi_{s_n}$. Тогда

$$\operatorname{dist}(\Xi_m, \Xi_n) = \Big|\int\limits_{s_m}^{s_n} \|Z\| ds\,\Big| = e^{f(\Xi_0)}|s_n - s_m|.$$

Поэтому последовательность Ξ_n является фундаментальной. Из полноты E следует, что существует $\Xi = \lim_{n\to\infty} \Xi_n$. Очевидно, Ξ не зависит от выбора последовательности s_n. Поэтому $\Xi = \lim_{s\to\varepsilon} \Xi_s$. Отсюда, во-первых, следует, что геодезическая базы x_s может быть продолжена в точку $x = \lim_{s\to\varepsilon} x_s$. По теореме Хопфа–Ринова база M является полным римановым многообразием. Горизонтальный лифт геодезической, продолженной за точку $s = \varepsilon$, с началом в точке Ξ, позволяет получить продолжение интегральной кривой Ξ_s за точку $s = \varepsilon$, вновь используя теорему о единственности решения задачи Коши для (8.2)–(8.3). Таким образом, интегральные кривые системы уравнений (8.2)–(8.3) бесконечно продолжаемые. А из связности сегмента следует существование и единственность горизонтального лифта любой геодезической, соединяющей пару точек базы. Так как любую кривую базы можно аппроксимировать геодезическими дугами, то горизонтальное распределение субмерсии ν является связностью Эресмана [4, с. 337]. По теореме Эресмана [4, п. 9.40] ν является на самом деле проекцией локально тривиального расслоения. ∎

Следствие 8.2. *В условиях теоремы 8.1 горизонтальное распределение субмерсии является связностью Эресмана.*

З а м е ч а н и е. Из сравнения результата Номидзу–Одзеки в [11] и теоремы 8.1 следует, что условие вертикальности показателя конформности в теореме 8.1 является существенным.

Говоря, что L является расслоением со стандартным слоем S, когда S — *риманово* (а в частности, и кэлерово) многообразие, будем подразумевать, что у каждой точки базы M имеется локальная тривиализация (O, σ), такая что сужение σ на каждый слой является римановой изометрией слоя (относительно индуцированной из L метрики) на стандартный слой S. Это же обстоятельство будем выражать, называя L расслоением с *изометричными* между собой слоями. Естественно, все слои расслоения при этом изометричны стандартному слою S.

Лемма 8.3. *Пусть ν субмерсия риманова многообразия E со вполне геодезическими слоями. Если горизонтальное распределение является связностью Эресмана, то E — расслоение с изометричными между собой слоями.*

Доказательство. Из теоремы Эресмана [4, п. 9.40], следует, что E является локально тривиальным расслоением. Предложение 3.3 из [12] означает, что диффеоморфизм слоев $\tau_\gamma : F_a \mapsto F_b$ в доказательстве Эресмана для случая вполне геодезичности слоев есть изометрия. ■

Если проекция расслоения является конформной субмерсией, то расслоение будет называться *конформным.* Будем говорить, что кэлерово расслоение (определение дано в начале § 6) имеет *изоморфные* между собой слои, если имеется атлас локальных тривиализаций, для которого сужение тривиализующих отображений σ на слой есть изоморфизм (т.е. голоморфная изометрия) кэлерова многообразия $\nu^{-1}(z)$ на стандартный слой S.

Определение 8.4. *Кэлерово конформное расслоение с вертикальным (непостоянным) показателем конформности и со вполне геодезическими и изоморфными между собой слоями будет нызываться скрещенным кэлеровым расслоением.*

Теорема 8.5. *Пусть ν голоморфная конформная субмерсия кэлеровых многообразий со вполне геодезическими слоями и вертикальным показателем конформности. Если горизонтальное распределение является связностью Эресмана, то E — скрещенное кэлерово расслоение.*

Доказательство. Учитывая лемму 8.3, достаточно показать, что изометрия слоев τ_γ является голоморфным отображением. Для этого покажем, что $(L_Z J)U = 0$, где Z — горизонтальный лифт вектора скорости геодезической γ из формулы (8.3). Так как $(L_Z J)U = J\nabla_U Z - \nabla_{JU} Z$, то, применив лемму 2.1, получим

$$(L_Z J)U = \omega(U)JZ - \omega^c(U)Z - \omega(JU)Z - \omega^c(JU)JZ = 0. \qquad ■$$

Теорема 8.5 и следствие 8.2 приводят к следующему утверждению.

Теорема 8.6. *Пусть $\nu : E \mapsto M$ голоморфная конформная субмерсия кэлеровых многообразий со вполне геодезическими слоями и вертикальным показателем конформности. Если E полное многообразие, то E — скрещенное кэлерово расслоение.*

§ 9. Скрещенные кэлеровы расслоения

Цель этого параграфа показать, что в кэлеровой геометрии можно строить аналоги скрещенных произведений. Такими аналогами являются определенные выше скрещенные кэлеровы расслоения. Как показывает следствие 6.2, получающийся при этом аналог является, вообще говоря, и в топологическом смысле "скрещенным". Здесь, в теореме 9.8, будет дано описание строения всех полных скрещенных кэлеровых расслоений с одномерными слоями. В кэлеровом случае оказывается, что нетривиально скрещенно "перемножать" можно лишь ходжеву базу с одной из допустимых римановых поверхностей. Расслоенное пространство, оснащенное римановой метрикой, будет называться *плоским*, если проекция расслоения является плоской субмерсией. Скрещенное произведение является примером плоского конформного расслоения со вполне геодезическими изометричными между собой слоями; в качестве проекции расслоения нужно выбрать проекцию на второй сомножитель [4, п. 9.11]. Вопрос о том, почему именно плоская конформная субмерсия римановых многообразий является вещественным аналогом голоморфной конформной субмерсии, освещен в [1].

П р и м е р 9.2. Все многообразия, построенные в доказательстве теорем 6.6 и 7.1, являются скрещенными кэлеровыми расслоениями. В отношении многообразий, полученных в теореме 7.1, это утверждение следует из теоремы 8.6. А для неполных расслоений из теоремы 6.6 можно указать изоморфизм любого слоя на стандартный слой в явном виде. Так как расслоенное пространство E в каждом из пунктов теоремы 6.6 по построению является кэлеровым продолжением, то его кэлерова метрика описывается с помощью формулы (4.10). Поэтому сужение локальной тривиализации

$$\sigma(\Xi) = (z_\alpha; w_\alpha e^{-2\pi\lambda F_\alpha}) : \nu^{-1}(U_\alpha) \mapsto U_\alpha \times S$$

на любой слой расслоения будет устанавливать изоморфизм на стандартный слой (S, γ). Кэлерова метрика стандартного слоя

$$\gamma = \frac{1}{2\pi}\left(dl^2(r) + d^c l^2(r)\right)$$

задается той же функцией $l(r)$, $r = |c|$, что и кэлерово продолжение в примере 4.6. Комплексную координату $c = a + ib$ стандартного слоя можно выбирать для каждого слоя над фиксированной точкой базы с координатами z с точностью до $c = kw$ вещественного множителя $k = \exp(-2\pi\lambda F_M(z,\overline{z}))$. Поэтому сужение σ — изоморфизм.

Предложение 9.3. *Всякое (полное) кэлерово многообразие M с кэлеровой формой Φ_M, когомологичной нулю, может служить базой (полного) скрещенного кэлерова расслоения E с одномерным стандартным слоем, голоморфно эквивалентным полосе $S = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid a < \operatorname{Re}\zeta < b\}$ или комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Причем аддитивная группа $\mathbb{R}$, порожденная полем $V = \frac{1}{2}e^{2f}\operatorname{gr}^c f$, где f — показатель конформности проекции расслоения, действует автоморфизмами на E послойно и свободно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть определяемый формулами (6.1)–(6.3) $x = (x_{\alpha\beta\gamma})$ есть 2-коцикл хорошего покрытия $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha\}$ для $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$, который представляет вещественный когомологический класс кэлеровой формы Φ_M базы. По условию предложения существуют такие комплексные числа $P_{\alpha\beta}$, что

$$x_{\alpha\beta\gamma} + P_{\alpha\beta} + P_{\beta\gamma} + P_{\gamma\alpha} = 0, \tag{9.1}$$

при этом покрытие заменяется возможно более мелким. (Как отмечалось в лемме 6.4, эти числа можно выбрать чисто вещественными.) Определим функции перехода для покрытия $\mathcal{U}$:

$$\varphi_\alpha^\beta = 2\pi i Q_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \mapsto \mathbb{C},$$

$$Q_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} + P_{\alpha\beta}.$$

Из формул (6.1) и (9.1) следует, что голоморфные функции φ_α^β в действительности являются функциями перехода некоторого голоморфного расслоения L над M со стандартным слоем $\mathbb{C}$ [3, гл.I, предложение 5.2]. Пусть ν проекция построенного расслоения, а ζ_α — комплексная координата вдоль слоев для каждой тривиализации над U_α. В порции расслоения $\nu^{-1}(U_\alpha)$ можно определить функцию t_α:

$$t_\alpha = \xi_\alpha - 2\pi F_\alpha, \quad \xi_\alpha = \operatorname{Re}\zeta_\alpha, \tag{9.2}$$

$$\zeta_\beta + \varphi_\alpha^\beta = \zeta_\alpha. \tag{9.3}$$

Используя формулу связи между координатами (9.3) и формулу (6.2), нетрудно видеть, что функция $t = t_\alpha$ корректно определена на всем L. Выберем определенную на интервале $(a;b)$ произвольную гладкую вещественную функцию $y = y(t)$ с отрицательной производной; возможно $a = -\infty$ или

$b = +\infty$. Рассмотрим подрасслоение $E = t^{-1}(a; b)$. Тогда формулой (1.1) на E определяется кэлерова структура, относительно которой, как показано в примере 1.2, E является кэлеровым конформным расслоением со всюду невырожденным показателем конформности и со вполне геодезическими слоями. Из рассмотрений, подобных приведенным в примере 9.2, следует, что сужение локальной тривиализации

$$\sigma(\Xi) = (z_\alpha; \zeta_\alpha - 2\pi F_\alpha) : \nu^{-1}(U_\alpha) \mapsto U_\alpha \times S$$

на любой слой расслоения будет являться кэлеровым изоморфизмом на стандартный слой, полосу S. Поэтому E — скрещенное кэлерово расслоение. Из формулы (1.9) следует такое представление для векторного поля $V = e^{2f} \operatorname{gr}^c f/2 = \pi\partial/\partial\eta_\alpha$, где $\eta_\alpha = \operatorname{Im}\zeta_\alpha$. Таким образом, однопараметрическая группа автоморфизмов слоя, порожденная V, совпадает с $\mathbb{R}$. ■

Будем говорить, что риманова поверхность (комплексная кривая) S, оснащенная кэлеровой метрикой, т.е. любой эрмитовой метрикой, является *допустимой*, если: 1) S является полной; 2) S допускает эффективное действие однопараметрической группы автоморфизмов кэлеровой структуры $G = \mathbb{R}$ или $= \mathbb{S}^1$; 3) на S определена гладкая эквивариантная функция f, имеющая лишь изолированные критические точки; 4) инфинитезимальный автоморфизм V, порождаемый группой G, представляется в виде $V = e^{2f} \operatorname{gr}^c f$. Функцию f на S также назовем допустимой.

Лемма 9.4. *Пусть голоморфная конформная субмерсия с вертикальным (непостоянным) показателем конформности и с одномерными вполне геодезическими слоями определена на кэлеровом многообразии. Тогда всякий полный слой S является допустимой римановой поверхностью, а сужение показателя конформности f на слой S является допустимой функцией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вертикальное векторное поле $V = e^{2f} \operatorname{gr}^c f$ из леммы 4.5, суженное на слой S, является инфинитезимальной изометрией полного многообразия. По теореме 2.4 [3, гл. VI] V порождает глобальную однопараметрическую группу изометрий G. Кроме того, по следствию 4.2 G является также группой голоморфных преобразований. Наконец, из равенства $df(V) = 0$ следует эквивариантность показателя конформности относительно действия G. ■

Лемма 9.5. *Если допустимая риманова поверхность S с группой автоморфизмов G и допустимой функцией f имеет:*

а) *хотя бы одну критическую точку для f, то $G = S^1$;*

б) *не менее двух критических точек для f, то S является сферой Римана S^2 и имеет две критические точки для f.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Множество S_0 некритических точек для допустимой функции f является главным расслоением над одномерным связным (ввиду изолированности критических точек f) многообразием I. Кроме того, из изолированности критических точек f следует, что I не компакт, т.е. I — это открытый интервал, возможно неограниченный. Поэтому $S_0 \simeq I \times G$. Если допустимая риманова поверхность S имеет хотя бы одну неподвижную точку p, то орбитами группы автоморфизмов G в нормальной окрестности p служат равноудаленные от p точки концентрических окружностей. А так как множество критических точек f совпадает с множеством неподвижных точек для G, то действие G редуцируемо к действию S^1.

б) Под действием элементов из G геодезические переходят в геодезические, и действие G на множестве геодезических, исходящих из любой неподвижной точки, транзитивное. Три неподвижные точки p, q и s на допустимой римановой поверхности S не могут существовать по следующим причинам. Пусть γ — это минимизирующая длину геодезическая, соединяющая точку p с точкой q, а σ — минимизирующая длину геодезическая, соединяющая точку p с точкой s. Все эти три точки должны лежать на одной геодезической, потому что в G найдется автоморфизм, который переводит геодезическую в направлении γ в геодезическую в направлении σ. Однако по теореме 5.7 [3, гл. VIII] минимизирующая длину геодезическая не может содержать внутри себя точку, сопряженную одному из своих концов, поэтому $q = s$.

Покажем, что S является компактом. Пусть p и q две различные, как и выше, критические точки для f, а $L = \mathrm{dist}(p, q)$ — расстояние между ними. Из предположения противного следует, что на S существует точка s, удаленная от точки p на расстояние большее чем L. Пусть σ геодезическая, реализующая расстояние между p и s. Такими же рассуждениями, как и выше, можно показать, что точка q лежит на самом деле на геодезической σ, а это противоречит вышеотмеченной теореме из [3], так как q является сопряженной точкой для точки p. Таким образом, S — компакт. По теореме Риба, приведенной в [12, с. 203], S диффеоморфно двумерной сфере. А так как на S^2 имеется лишь одна комплексная структура, то лемма доказана. ■

Лемма 9.6. *Всякая некомпактная допустимая риманова поверхность с группой автоморфизмов G голоморфно эквивалентна одной из следующих римановых поверхностей:*

а) *полосе $\{\zeta \in \mathbb{C} \mid a < \mathrm{Re}\,\zeta < b\}$ или всей комплексной прямой $\mathbb{C}$, при этом $G = \mathbb{R}$ и G действует свободно;*

б) *единичному кругу с выколотой точкой B_1^*, или комплексной прямой с выколотой точкой $\mathbb{C}^*$, или кольцу в $\mathbb{C}$, при этом $G = S^1$ действует свободно;*

в) *единичному кругу B_1 в $\mathbb{C}$ или всей комплексной прямой $\mathbb{C}$, при этом $G = S^1$ и G дейстует эффективно с единственной неподвижной точкой.*

Доказательство. Пусть S_0 множество некритических точек для допустимой функции f. Как установлено при доказательстве леммы 9.5, $S_0 \simeq I \times G$. Если $S = S_0$, т.е. критических точек вовсе нет, то возможны лишь два случая. В первом случе $G = \mathbb{R}$, тогда допустимая поверхность S указанного вида существует. Действительно, это следует из предложения 9.3 и леммы 9.4 и соответствует реализации пункта а). Во втором случае $G = S^1$, тогда, как видно из теоремы 7.1, пп. а), б) и леммы 9.4, такая допустимая поверхность тоже существует, и реализуется пункт б). Причем полные кольца, очевидно, легко получаются конформным преобразованием метрики из неполных колец.

Если у допустимой функции f и существует критическая точка, то по лемме 9.5 она единственная и $G = S^1$. В этом случае риманова поверхность S получается заклеиванием вдоль орбит G цилиндра $S_0 = I \times S^1$ двумерным диском, который является нормальной окрестностью неподвижной точки p. Из теоремы 7.1, в), г) и леммы 9.4 видно, что такие допустимые поверхности существуют. Таким образом, реализуется пункт в). ■

Лемма 9.7. *Всякая компактная допустимая риманова поверхность голоморфно эквивалентна сфере Римана $\mathbb{C}P^1 = S^2$, при этом группа автоморфизмов есть S^1 и она действует эффективно с двумя неподвижными точками.*

Доказательство. Так как критические точки допустимой функции f изолированы, то на компактной поверхности S у f имеется обязательно две критические точки: минимум и максимум. Дальнейшее следует из леммы 9.5. ■

Теорема 9.8. *Если полное кэлерово многообразие E допускает голоморфную конформную субмерсию с вертикальным показателем конформности f и одномерными вполне геодезическими слоями на другое кэлерово многообразие, то слоем субмерсии может выступать допустимая риманова поверхность с группой автоморфизмов G, голоморфно эквивалентная лишь одной из следующих:*

а) *полосе $\{\zeta \in \mathbb{C} \mid a < \operatorname{Re}\zeta < b\}$ или всей комплексной прямой $\mathbb{C}$, при этом G, равное $\mathbb{R}$, действует свободно;*

б) *единичному кругу B_1^* или комплексной прямой $\mathbb{C}^*$ с выколотой точкой (в обоих случаях), при этом G, равное S^1, действует свободно;*

в) *единичному кругу B_1 в $\mathbb{C}$ или всей комплексной прямой $\mathbb{C}$, при этом G, равное S^1, действует эффективно с единственной неподвижной точкой;*

г) *$\mathbb{C}P^1$ — сфере Римана, при этом G, равное S^1, действует эффективно с двумя неподвижными точками.*

Причем показатель f в случаях а), б) невырожденный, а в случаях в), г) имеет одно и соответственно два экстремальных значения.

Доказательство. Учитывая леммы 9.4–9.7, нужно лишь показать, что риманова поверхность S не может быть голоморфно эквивалентной собственному кольцу. По теореме 5.4 E локально изоморфно кэлерову продолжению. В этом случае орбитами группы автоморфизмов G согласно лемме 4.5 служат вертикальные кривые, вдоль которых модуль $|w| = \text{const}$ координаты слоя из определения кэлерова продолжения в формулах (5.1)–(5.5) является постоянной величиной. Из полноты E следует, что если некоторый слой $\nu^{-1}(z)$ является кольцом, то $G = S^1$ и f не имеет критических точек. По теореме 8.5 E является скрещенным кэлеровым расслоением. Поэтому на основании теоремы 5.4 порция O расслоения E над некоторой окрестностью U точки базы z изоморфна кэлерову многообразию, кэлерова форма которого определяется формулами (5.2)–(5.5) на множестве

$$O = \{(w, z) \in \mathbb{C} \times U \ \mid \ A < |w| \exp(-2\pi\lambda F_M) < B\}.$$

Стандартный слой $S = \{w \in \mathbb{C} \mid A < |w| < B\}$ и $0 < A$, $B < \infty$. Из полноты S следует, что для образа функции $l(s)$ из формулы (5.4) выполняется равенство $\operatorname{Im} l(s) = \mathbb{R}$. Следовательно, $dl/ds \to \infty$ при $s \to B$, ибо в противном случае интеграл

$$\int_A^B \frac{dl}{ds} ds \tag{9.4}$$

в (9.4) сходится на верхнем пределе интегрирования. Поэтому с некоторого момента при $s \to B$ начинает выполняться неравенство

$$\left|\frac{dl}{ds}\right| < \left(\frac{dl}{ds}\right)^2,$$

и интеграл в (5.2) тоже расходится на верхнем пределе. Таким образом, функция $p^2(s)$ из формулы (5.3) не может быть положительной, если константа $\lambda > 0$. Из аналогичных рассуждений о расходимости интеграла в (9.4) на нижнем пределе интегрирования A следует, что функция $p^2(s)$ в формуле (5.3) не может быть положительной и при $\lambda < 0$. Следовательно, слой действительно не может быть голоморфно эквивалентным собственному кольцу.

То, что каждая из перечисленных римановых поверхностей может выступать в качестве слоя субмерсии указанного типа, показано в теореме 7.1 и предложении 9.3. ■

Следствие 9.9. *Пусть M произвольная некомпактная риманова поверхность, а S — одна из римановых поверхностей, перечисленных в теореме 9.8. Тогда на прямом произведении $E = M \times S$ существует структура полного скрещенного кэлерова расслоения относительно проекции на первый сомножитель.*

Доказательство. Пусть Φ_M кэлерова форма, ассоциированная с некоторой полной эрмитовой метрикой M. Как известно, всякая некомпактная риманова поверхность является многообразием Штейна и, следовательно, $H^{1,1}(M) = 0$ (см. также [14, пп. 26.1 и 15.14]). Таким образом, M, Φ_M — полное многообразие Ходжа. Поэтому в качестве расслоения L, присоединенного к Φ_M, можно выбрать $L = M \times \mathbb{C}$, так как в этом случае $c(L) = 0 \simeq \Phi_M$, и применить конструкцию из доказательства теоремы 6.6 или предложения 9.3. Из доказательства теоремы 9.8 следует, что в результате этой процедуры на многообразии $E = M \times S$ реализуется структура полного скрещенного кэлерова расслоения. ■

§ 10. Кэлеров потенциал многообразий, допускающих голоморфную конформную субмерсию

Теорема 10.1. *Пусть многообразие Кэлера E с кэлеровой формой Φ допускает голоморфную конформную субмерсию на кэлерово многообразие M, $\dim_c M > 1$, с вертикальным невырожденным показателем конформности и вполне геодезическими одномерными слоями. Тогда существует глобально определенный на E кэлеров потенциал F, т.е. $-2i\partial\overline{\partial}F = \Phi$.*

Доказательство. Согласно теореме 3.6 E локально изоморфно кэлерову продолжению с несущей функцией t, которая по лемме 3.3 глобально определена на всем E. Покажем, что глобально определенная на всем E функция $F(t)$ в формуле (10.1) является кэлеровым потенциалом:

$$F(t) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t e^{2y(\tau)}d\tau, \tag{10.1}$$

где $y(\tau)$ — это функция продолжения, т.е. вещественная функция, определенная на образе $\operatorname{Im} t$ несущей функции продолжения. Далее,

$$d^cF = JdF = -\frac{1}{2\pi}e^{2f}d^ct,$$

$$-2i\partial\overline{\partial}F = -dd^cF = \frac{1}{\pi}e^{2f}df \wedge d^ct + \frac{1}{2\pi}e^{2f}dd^ct$$
$$= \frac{1}{\pi}e^{2f}\left(\dot{y}(t)\right)^{-1}df \wedge d^cf - e^{2f}dd^cF_M = e^{2f}\left(\frac{1}{\pi}\dot{y}^{-1}(t)df \wedge d^cf + \Phi_M\right).$$

Сравнивая 2-форму в крайней правой части в последней цепочке равенств с определением 1.3 кэлерова продолжения, приходим к заключению, что эта форма совпадает с кэлеровой формой Φ. ■

Следствие 10.2. *Всякое многообразие Кэлера, допускающее голоморфную конформную субмерсию с вертикальным и невырожденным показателем конформности и со вполне геодезическими одномерными слоями, является многообразием Ходжа, а его форма Кэлера когомологична нулю.*

Будем говорить, что голоморфное отображение кэлеровых многообразий является *комплексным обратно геодезическим*, если прообраз всякого комплексного вполне геодезического подмногообразия является комплексным вполне геодезическим подмногообразием.

Теорема 10.3. *Всякая голоморфная конформная субмерсия ν кэлеровых многообразий с вертикальным показателем конформности и вполне геодезическими слоями является комплексной обратно геодезической субмерсией.*

Доказательство. Воспользуемся условием вертикальности показателя конформности и формулой Кошуля для ковариантной производной связности Леви–Чивита:

$$2\Phi(\nabla_{X^H}Y^H, Z^H) = e^{2f}\cdot 2\Phi_M(\nabla^M_X Y, Z) = 2\Phi((\nabla^M_X Y)^H, Z^H).$$

Здесь через ∇^M обозначена ковариантная производная кэлерова многообразия M. Сравнивая крайние выражения в цепочке приведенных выше равенств, заключаем, что

$$H\nabla_{X^H}Y^H = (\nabla^M_X Y)^H.$$

Пусть теперь W — комплексное вполне геодезическое подмногообразие в M, α — вторая основная форма для подмногообразия $\nu^{-1}(W)$ в N, X, Y — горизонтальные векторы относительно ν, касательные к $\nu^{-1}(W)$. Из последней формулы следует, что $\alpha(X,Y)=0$. Учитывая лемму 2.1 и условие вертикальности слоев субмерсии, можно сделать заключение о том, что $\alpha(U,X)=0$ и $\alpha(U,V)=0$. Таким образом, $\nu^{-1}(W)$ — вполне геодезическое подмногообразие в E. ■

Теорема 10.4. *Всякое (полное) ходжево многообразие может служить базой голоморфной конформной субмерсии, определенной на (полном) кэлеровом многообразии M с вертикальным (непостоянным) показателем конформности и вполне геодезическими слоями любой наперед заданной комплексной размерности.*

Доказательство. Определение 1.1 конформной субмерсии эквивалентно тому, что дифференциал конформной субмерсии сохраняет угол между парой горизонтальных векторов и их проекциями. А так как горизонтальное пространство суперпозиции $\sigma = \nu \circ \mu$ любых субмерсий всегда содержится в горизонтальном подпространстве внутренней субмерсии μ, т.е. $H_\sigma \subset H_\mu$, то суперпозиция конформных субмерсий снова является конформной субмерсией. Показатель же конформности суперпозиции будет равен сумме показателей каждой субмерсии. В этой сумме вместо показателя конформности f_ν субмерсии ν участвует, конечно же, полный прообраз $\mu^* f_\nu$ относительно субмерсии μ. Из описанного выше включения горизонтальных подпространств следует вертикальность функции $\mu^* f_\nu$; следовательно, показатель конформности суперпозиции σ также вертикален. Из теоремы 10.3 следует, что если субмерсия μ имела вертикальный показатель конформности, а субмерсия ν — вполне геодезические слои, то суперпозиция субмерсий σ будет иметь вполне геодезические слои.

Теперь сформулированное в теореме утверждение является следствием теоремы 6.6, а), б), е), а для случая полноты — следствием теорем 7.1, а), б), 9.3 и 10.1. Слоями субмерсии могут служить, например, в случае полноты, произведения допустимых римановых поверхностей $S_1 \times S_2 \times \ldots S_m$ из пп. а), б) теоремы 9.8. ∎

Пример 10.5. Всякое гладкое многообразие вида

$$S^{2n+1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C},$$

$$S^{2n+1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}^* \times \ldots \times \mathbb{C}^*, \quad S^{2n+1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{B}_1^* \times \ldots \times \mathbb{B}_1^*$$

допускает полную кэлерову метрику и голоморфную конформную субмерсию относительно этой метрики на $\mathbb{C}P^n$. Для построения такой метрики и субмерсии достаточно воспользоваться примером 7.2 и теоремой 10.4.

Лемма 10.6. *Голоморфная конформная субмерсия ν с вертикальным (непостоянным) показателем конформности f и вполне геодезическими одномерными слоями может иметь не более двух критических значений показателя конформности, и каждое критическое значение является экстремальным значением.*

Доказательство. В лемме 5.3 показано, что каждое критическое значение f является экстремальным, и нужно лишь показать, что критических значений существует не более двух. Пусть субмерсия ν определена на E. И пусть E_0 — открытое подмногообразие в E, состоящее из всех точек, где показатель конформности невырожденный. По теореме 3.6 E_0 является кэлеровым продолжением и на E_0 определена несущая функция продолжения t. Из доказательства теоремы 5.4 следует, что несущая функция стремится к бесконечности, $t(\Xi) \to \pm\infty$, когда расстояние от точки Ξ до некоторой поверхности экстремального значения N_0 стремится к нулю. Поэтому для показателя конформности может существовать не более двух экстремальных значений $f(\pm\infty)$. ■

Лемма 10.7. *Пусть многообразие Кэлера E с кэлеровой формой Φ допускает голоморфную конформную субмерсию на кэлерово многообразие M, $\dim_c M > 1$, с вертикальным (непостоянным) показателем конформности f и вполне геодезическими одномерными слоями. И пусть F_M — кэлеров потенциал базы, определенный в целом на M. Тогда если множество критических значений f не равно 2, то на E существует глобально определенный кэлеров потенциал F, т.е. $-2i\partial\overline{\partial}F = \Phi$.*

Доказательство. Из леммы 10.6 и теоремы 10.1 следует, что рассмотрение необходимо лишь для случая, когда экстремальное значение у показателя f только одно. Пусть E_0 — открытое подмножество в E, состоящее из всех точек, где показатель конформности — невырожденный. По теореме 3.6 E_0 является кэлеровым продолжением, и на E_0 определена несущая функция продолжения t. Пусть $s = \exp(\lambda t)$ — функция , построенная при доказательстве теоремы 5.4 по некоторой компоненте связности поверхности уровня N_0 экстремального значения; здесь λ — такая константа, что функция s на N_0 обращается в нуль. Так как экстремальное значение единственное, то функция s, определенная вышеприведенной формулой, задана уже на всем E и на поверхности уровня экстремального значения обращается в нуль. Из построения функции s и формул (5.6) следует справедливость равенств (10.2). Здесь F_M — это, как и прежде, кэлеров потенциал (точнее, его полный прообраз относительно субмерсии) кэлеровой формы Φ_M базы. Далее,

$$s = |w|e^{-2\pi\lambda F_M}, \quad d^c s = s(d\arg w - 2\pi\lambda d^c F_M), \tag{10.2}$$

$$dd^c s = \frac{1}{s} ds \wedge d^c s + 2\pi\lambda s \Phi_M. \tag{10.3}$$

Дифференцируя вторую формулу в (10.2), получаем равенство (10.3). Используя обозначения для параметров кэлерова продолжения из формулы

(4.2), определим формулой (10.4) на всем многообразии E функцию F и покажем, что F является кэлеровым потенциалом многообразия E. (Ввиду следствия 5.6 интеграл в (10.4) всегда сходится на нижнем пределе.) Воспользуемся равенствами (10.3) и (4.3):

$$F = p_0^2 F_M + \frac{1}{2\pi\lambda} \int\limits_0^s \frac{1}{\sigma} \left(p_0^2 - p^2(\sigma)\right) d\sigma, \tag{10.4}$$

$$dF = p_0^2 dF_M + \frac{1}{2\pi\lambda} \frac{1}{s} \left(p_0^2 - p^2(s)\right) ds,$$

$$-dd^cF = -p_0^2 dd^c F_M + \frac{1}{2\pi\lambda} \frac{1}{s^2} \left(p_0^2 - p^2(s)\right) ds \wedge d^c s + \frac{1}{2\pi\lambda s} 2p(s) \frac{dp}{ds} ds \wedge d^c s$$

$$- \frac{1}{2\pi\lambda s} \left(p_0^2 - p^2(s)\right) dd^c s = \frac{1}{2\pi\lambda s} \frac{p^2(s)}{ds} ds \wedge d^c s + p^2(s) \Phi_M$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{dl}{ds}\right)^2 ds \wedge d^c s + p^2(s) \Phi_M \,.$$

Сравнение последней полученной формулы с формулой (5.4) позволяет заключить, что лемма доказана. ∎

Многообразие Штейна — это голоморфно выпуклое и голоморфно отделимое комплексное многообразие M^n, для любой точки z которого существуют n голоморфных функций, являющихся координатами в некоторой окрестности z [14, определение 5.1.3]. На многообразиях Штейна всегда разрешима первая проблема Кузена.

Теорема 10.8. *Пусть полное кэлерово многообразие E допускает голоморфную конформную субмерсию с вертикальным (непостоянным) показателем конформности, имеющим одно критическое значение. И пусть слои субмерсии являются вполне геодезическими одномерными подмногообразиями. Если база субмерсии M, $\dim_c M > 1$, является многообразием Штейна, то многообразие E также является многообразием Штейна.*

Доказательство. На многообразиях Штейна всякая кэлерова форма обладает потенциалом. Это следует, например, из [15, теорема 5.2.5, следствие 5.2.6]. Пусть Φ_M исходная кэлерова форма базы, а F_M — ее потенциал. Как и в доказательстве леммы 10.7, на E определена функция $s = \exp(\xi - 2\pi\lambda F_M)$, где $\xi(\Xi)$ плюригармоническая на E_0 функция, стремящаяся к $-\infty$, когда $\Xi \to N$. Здесь N — поверхность уровня критического значения для f, $E_0 = E \backslash N$.

Критерием того, что комплексное многообразие M является многообразием Штейна, служит существование строго плюрисубгармонической функции

F_0, множества меньших значений M_c из (10.5) которой относительно компактны в M для любого вещественного c [14, теорема 5.2.10]. Обозначим через ν голоморфную конформную субмерсию. Получаем

$$M_c = \{z \in M \mid F_0(z) < c\} \Subset M, \tag{10.5}$$

$$Q = p_0^2 \nu^* F_0 + \frac{1}{2\pi\lambda} \int\limits_0^r \frac{1}{\sigma} \left(p_0^2 - p^2(\sigma)\right) d\sigma. \tag{10.6}$$

Определим на E новую вещественную функцию $r = s\exp(2\pi\lambda(F_M - F_0))$. Тогда формулой (10.6), подобной формуле (10.4), определим функцию Q, строго плюрисубгармоническую на E. Свойство строгой плюрисубгармоничности Q прямо следует из доказательства леммы 10.7. Из доказательства теоремы 5.4 имеем, что если на N достигается максимум, то $\lambda > 0$, а если – минимум, то $\lambda < 0$. В обоих случаях второе слагаемое в правой части (10.6) неотрицательно и монотонно зависит от r. Каждое из слагаемых в (10.6) достигает на E минимального значения: F_0 как строго плюрисубгармоническая функция, удовлетворяющая (10.5), а второе слагаемое достигает нуля на N. Функция Q, определенная в (10.6), является кэлеровым потенциалом кэлеровой формы $\widetilde{\Phi}$, превращающей E в кэлерово продолжение из примера 4.6 относительно нового кэлерова многообразия $(M,\ \Phi_0)$. Здесь через Φ_0 обозначена кэлерова форма, потенциалом которой служит функция F_0. Исходная субмерсия служит проекцией этого продолжения.

Учитывая описание геометрического смысла функции длины $l(r)$ в примере 4.6, приходим к заключению, что множество меньших значений $\widetilde{M_c}$ для функции Q содержится в пересечении некоторой трубчатой окрестности конечного радиуса вполне геодезического подмногообразия N изоморфного M и прообраза множества меньших значений для функции F_0. Следовательно, множество $\widetilde{M_c} = \{\Xi \in E \mid Q(\Xi) < c\}$ содержится в некоторой замкнутой трубчатой окрестности некоторого компакта в N и поэтому является относительно компактным в $(E,\ \widetilde{\Phi})$. На основании отмеченного выше критерия можно заключить, что комплексное многообразие E — это многообразие Штейна. ■

Список литературы

[1] *С.И. Окрут*, Скрещенное произведение в кэлеровой геометрии. — Мат. физ., анализ, геом. (1997), т. 4, № 1/2, с. 145–188.

[2] *E. Calabi*, Metriques kähleriennes et fibres holomorphes. — Ann. Scient. Ecol. Norm. Sup., 4 ser. (1979), t. 12, p. 269–294.

[3] *Ш. Кобаяси, К. Номидзу*, Основы дифференциальной геометрии. В 2-х т. Наука, Москва (1981), т. 1, 344 с.; т. 2, 461 с.

[4] *А. Бессе*, Многообразия Эйнштейна. В 2-х т. Мир, Москва (1990), 703 с.

[5] *Ph. Tonder*, Foliations on Riemannien manifolds. Springer–Verlag, New York (1988), 247 p.

[6] *P. Molino*, Riemannian foliations. Birkhäuser, Boston (1988), 337 p.

[7] *Ш. Кобаяси*, Группы преобразований в дифференциальной геометрии. Наука, Москва (1986), 224 с.

[8] *Чжэнь Шэн-шэнь*, Комплексные многообразия. Изд-во иностр. лит., Москва (1961), 240 с.

[9] *Ф. Хирцебрух*, Топологические методы в алгебраической геометрии. Мир, Москва (1973), 280 с.

[10] *A. Gray*, Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions. — J. Math. and Mech. (1967), v. 16, No 7, p. 715–737.

[11] *K. Nomizu and H. Ozeki*, The existence of complete Riemannian metrics. — Proc. Amer. Math. Soc. (1961), v. 12, No 5, p. 889–891.

[12] *R. Hermann*, A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds be a fiber bundle. — Proc. Amer. Math. Soc. (1960), v. 11, No 2, p. 236–242.

[13] *М. Хирш*, Дифференциальная топология. Мир, Москва (1979), 280 с.

[14] *О. Форстер*, Римановы поверхности. Мир, Москва (1979), 247 с.

[15] *Л. Хермандер*, Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. Мир, Москва (1979), 279 с.

Conforlmal submersions of Kählerian manifolds. II

S.I. Okrut

The paper is a continuation of the first part of work and concerns the research of global properties of Kählerian manifolds which admit a holomorphic conformal submersion with a vertical exponent of the conformality of the submersion onto some other Kählerian manifold; the submersion fibers are assumed to be geodesic. The Kählerian manifolds may be considered as a kählerian analogue of the crossed product in the Kählerian manifolds with the above submersion are necessarily fiber spaces with isomorphic fibers. A method is proposed of constructing bundles including complete and compact fibers of a non-Riemannian projection wich is a submersion of the same type. It is shown that for such bundles with one-dimensional fibers to exist, it is necessary and sufficient that the base be a Hodge manigold. It is given the holomorphic classification of possible all of complete one-dimensional fibers of submersion of the stated above type.

Конформні субмерсії келерових многовидів. II

С.І. Окрут

Стаття є продовженням першої частини роботи і присвячена дослідженню глобальних властивостей келерових многовидів, що допускають голоморфну конформну субмерсію з вертикальним показником конформності на інший келерів многоловид; шари субмерсії припускаються цілком геодезичними. Такі келерові многовиди можна розглядати як келерів аналог схрещеного здобутку у рімановій геометрії. Повні келерові многовиди з субмерсією зазначеного типу необхідно є розшаровані простори з ізоморфними шарами. Запропоновано метод конструювання розшарувань, у тому числі повних, а також компактних з неріманововою проекцією, що є субмерсією того ж типу. Показано, що для існування таких розшарувань з одновимірними шарами необхідно та достатньо, щоб база була ходжевим многовидом. Дано голоморфну класифікацію усіх можливих повних одновимірних шарів субмерсії зазначеного типу.