Математическая физика, анализ, геометрия
1999, т. 6, № 3/4, с. 353–360

Замечание к работе А.А. Гольдберга "Оцiнка модуля логарифмiчної похiдної функцiї Мiттаг–Леффлера та її застосування"

И.Н. Пересёлкова

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

E-mail: peresyolkova@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 26 января 1998 года

Получена оценка сверху модуля логарифмической производной функции типа Миттаг–Леффлера $E_\rho(z,\mu)$. С помощью этого результата описывается множество тех значений ρ и μ, при которых функция типа Миттаг–Леффлера является функцией ограниченного индекса.

1. Введение

Пусть $\rho > 0, \mu \in \mathbf{C}$. Функцией типа Миттаг–Леффлера называется целая функция

$$E_\rho(z,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k/\rho)}.$$

Эта функция является обобщением классической функции Миттаг–Леффлера $E_\rho(z) \equiv E_\rho(z,1)$. Асимптотические свойства функци и $E_\rho(z,\mu)$ подробно изучены в [1, 2], разнообразные их применения также приведены в [1].

Пусть $l(x) = 1$ при $0 \le x \le 1, l(x) = x^{\rho-1}$ при $1 \le x < \infty, a_k$– нули $E_\rho(z,\mu), G(q) = \bigcup_k \{z : |z - a_k| \le q/l(|a_k|)\}, q > 0$. А.А. Гольдберг доказал [3, теорема 1], что логарифмическая производная классической функции Миттаг–Леффлера обладает следующим свойством.

Теорема А. *Для любого достаточно малого* $q > 0$ *существует число* $P > 0$ *такое, что*

$$|E_\rho'(z,1)/E_\rho(z,1)| \le Pl(|z|), \quad z \notin G(q).$$

В настоящей статье показываем, что с помощью некоторых дополнений и уточнений рассуждений А.А. Гольдберга [3] теорему А можно распространить на функцию типа Миттаг–Леффлера $E_\rho(z,\mu)$, $\rho>0$, при довольно широких предположениях относительно параметра μ. Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть выполняется одно из следующих условий:*

(а) $\rho > 1/2, 1+\frac{1}{\rho} > \mu > \begin{cases} 1-3/\rho, \mu \neq 1/\rho - n, n \in \mathbf{Z}_+, \\ 1-2/\rho, \mu = 1/\rho - n, n\in \mathbf{Z}_+, 1/\rho \notin \mathbf{N}; \end{cases}$

(б) $0<\rho\le 1/2, 1+1/\rho > \mu \in \mathbf{R}$.

Тогда для любого достаточно малого $q>0$ существует число $P>0$ такое, что

$$|E_\rho^{'}(z,\mu)/E_\rho(z,\mu)| \le Pl(|z|), \quad z\notin G(q). \tag{1}$$

Очевидно, достаточно доказать (1) при $|z|>2$. Поэтому, как и в [3], далее будем считать, что $|z|>2$ и $l(|z|)=|z|^{\rho-1}$. Из асимптотических формул для нулей функции $E_\rho(z,\mu)$, полученных в [2], легко следует, что для произвольного $q>0$ и произвольного $z\in\mathbf{C}$ в круге с центром в z и радиуса $q/l(|z|)$ располагается равномерно (относительно z) ограниченное число нулей $E_\rho(z,\mu)$. Вместе с (1) это, на основании [4], позволяет утверждать справедливость следующей теоремы, являющейся обобщением теоремы 2 из [3].

Теорема 2. *Пусть выполняется одно из условий теоремы 1. Тогда функция $f(z)=E_\rho(z,\mu)$ является функцией ограниченного l-индекса.*

Напомним (см. [4]), что последнее означает существование такого $N\in\mathbf{Z}_+$, что

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)} \le \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!l^k(|z|)} : 0\le k\le N\right\}$$

для всех $n\in\mathbf{Z}_+, z\in\mathbf{C}$.

Из теоремы 2 при помощи леммы 1 из [5] получаем такое следствие.

Следствие. *Пусть выполняется одно из условий теоремы 1 и, более того, $0<\rho\le 1$. Тогда функция $E_\rho(z,\mu)$ является функцией ограниченного индекса (то есть ограниченного l-индекса при $l(r)\equiv 1$).*

2. Доказательство теоремы 1(а)

Не будем подробно излагать все доказательство, а ограничимся только указанием тех изменений, которые нужно произвести в рассуждениях из [3]. Как и в [3], далее исключаем из рассмотрения тривиальные случаи $\rho=1,\mu=1$ и $\rho=1/2,\mu=1$.

Из известных асимптотических формул для $E_\rho(z,\mu)$ ([1], с. 133) получаем, что для произвольно малого η, $0<\eta<\min\{\pi-\pi\alpha/2,\pi\alpha/2\}$ (здесь и далее $\alpha=1/\rho$) в $\{z:|\arg z|\le\pi\alpha/2-\eta\}$ справедливо

$$\frac{\left(z^{\rho(\mu-1)}E_\rho(z,\mu)\right)'}{z^{\rho(\mu-1)}E_\rho(z,\mu)}=\rho z^{\rho-1}+O(z^{-\beta-1}e^{-z^\rho}),\quad \beta=1+\rho(1-\mu),\quad z\to\infty,\tag{2}$$

а в $\{z:\pi\alpha/2+\eta\le|\arg z|\le\pi\}$ —

$$\frac{\left(z^{\rho(\mu-1)}E_\rho(z,\mu)\right)'}{z^{\rho(\mu-1)}E_\rho(z,\mu)}=-\beta z^{-1}+O(z^{-2}),\quad z\to\infty.\tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что в указанных углах справедлива оценка (1) с достаточно большим P. Далее, повторяя рассуждения из [3, с. 23], имеем, что достаточно получить оценку (1) в угле

$$W_1=\{z:\pi\alpha/2-\eta<\arg z<\pi\alpha/2+\eta,\ |z|>2\}.$$

В W_1 функция $E_\rho(z,\mu)$ может быть записана в виде

$$z^{\rho(\mu-1)}E_\rho(z,\mu)=\rho e^{z^\rho}-\frac{a}{z^\beta}+O\left(\frac{1}{z^{\beta+1}}\right),\quad a=\frac{1}{\Gamma(\mu-1/\rho)},\quad z\to\infty.\tag{4}$$

Обозначим через λ_n нули функции $E_\rho(z,\mu)$, лежащие в верхней полуплоскости. Из (4) следует, что

$$\rho e^{\lambda_n^\rho}=\frac{a}{\lambda_n^\beta}+O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\beta+1}}\right),\quad n\to\infty.$$

Пусть, как и в [3, с. 24], $\zeta=\lambda_n+q\lambda_n^{1-\rho}e^{i\theta},0\le\theta\le2\pi$. Тогда

$$\begin{aligned}\zeta^{\rho(\mu-1)}E_\rho(\zeta,\mu)&=\rho e^{\lambda_n^\rho}\exp\{\rho q e^{i\theta}+O(\lambda_n^{-\rho})\}-\frac{a}{(\lambda_n+q\lambda_n^{1-\rho}e^{i\theta})^\beta}+O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\beta+1}}\right)\\
&=\frac{a}{\lambda_n^\beta}\exp\{\rho q e^{i\theta}+O(\lambda_n^{-\rho})\}-\frac{a}{(\lambda_n+q\lambda_n^{1-\rho}e^{i\theta})^\beta}+O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\beta+1}}\right)\\
&=\frac{a}{\lambda_n^\beta}(\exp\{\rho q e^{i\theta}+O(\lambda_n^{-\rho})\}-1)+\frac{aq\beta\lambda_n^{1-\rho}e^{i\theta}}{\lambda_n^{1+\beta}(1+q\lambda_n^{-\rho}e^{i\theta})^\beta}+O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\beta+1}}\right)\\
&=\frac{a}{\lambda_n^\beta}(\exp\{\rho q e^{i\theta}+O(\lambda_n^{-\rho})\}-1)+O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\rho+\beta}}\right)+O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\beta+1}}\right).\end{aligned}$$

При достаточно больших n модуль $|\exp\{\rho q e^{i\theta}+O(\lambda_n^{-\rho})\}-1|$ ограничен снизу. Отсюда следует, что существует такая постоянная K, что

$$|\zeta^{\rho(\mu-1)}E_\rho(\zeta,\mu)| \geq K|\lambda_n|^{-\beta} \quad \text{для всех} \quad \lambda_n \in W_1.$$

Оценим $|(z^{\rho(\mu-1)}E_\rho(z,\mu))'_{z=\zeta}|$ сверху. Так как в W_1 имеем

$$(z^{\rho(\mu-1)}E_\rho(z,\mu))' = \rho^2 z^{\rho-1}e^{z^\rho} + a\beta z^{-\beta-1} + O(z^{-\beta-2}), \quad z \to \infty,$$

то

$$\begin{aligned}
|(z^{\rho(\mu-1)}E_\rho(z,\mu))'_{z=\zeta}| &\leq \rho|\zeta|^{\rho-1}|\rho e^{\zeta^\rho}| + O(|\zeta|^{-\beta-1}) \\
&\leq \rho|\zeta|^{\rho-1}|\rho e^{\lambda_n^\rho}||\exp\{\rho q + O(\lambda_n^{-\rho})\}| + O(|\lambda_n|^{-\beta-1}) \\
= \rho|\zeta|^{\rho-1}\frac{|a|}{|\lambda_n|^\beta}O(1) + O\left(\frac{|\zeta|^{\rho-1}}{|\lambda_n|^{1+\beta}}\right) &+ O(|\lambda_n|^{-\beta-1}) \leq K_1\frac{|\zeta|^{\rho-1}}{|\lambda_n|^\beta},
\end{aligned}$$

где K_1 — некоторая положительная постоянная. Теперь имеем, что на окружностях $\{\zeta : |\zeta-\lambda_n| = q|\lambda_n|^{1-\rho}\}$ выполняется

$$\left|\frac{(z^{\rho(\mu-1)}E_\rho(z,\mu))'_{z=\zeta}}{\zeta^{\rho(\mu-1)}E_\rho(\zeta,\mu)}\right| \leq \frac{K_1}{K}|\zeta|^{\rho-1}.$$

Таким образом, на границе множества $W_1 \setminus G(q)$ выполнятся (1) при достаточно большом P.

Оценим теперь модуль $|E'_\rho(z,\mu)/E_\rho(z,\mu)|$ на окружности

$$\{z : |z| = r_n\}, \quad r_n = (|\lambda_n| + |\lambda_{n+1}|)/2, \quad n \geq n_0.$$

Из теоремы Адамара получаем, что

$$E_\rho(z,\mu) = e^{P(z)}\prod_\nu E\left(\frac{z}{a_\nu}, p\right),$$

где $E(z,p)$ — канонический множитель Вейерштрасса рода p, $p=[\rho]$, $P(z)$ — многочлен степени не выше p. Тогда

$$E'_\rho(z,\mu)/E_\rho(z,\mu) = P'(z) + z^p\sum_\nu \frac{1}{a_\nu^p(z-a_\nu)}.$$

Пусть $n_0 \in \mathbf{N}$ настолько велико, что при $k \geq n_0$ выполняется $(2\pi)^\alpha k^\alpha \geq |\lambda_k| \geq (2\pi)^\alpha(k-1)^\alpha$. То, что n_0 можно выбрать настолько большим, чтобы выполнялось левое неравенство, очевидно. Покажем, что возможно выполнение правого неравенства. Известно [2, теорема 1], что все нули λ_k функции $E_\rho(z,\mu)$, лежащие в верхней полуплоскости, имеют такую асимптотику:

$$\lambda_k = e^{i\pi\alpha/2}(2\pi k)^\alpha(1 - \frac{\tau_\mu}{4\rho k} + \frac{i}{2\pi k}(\frac{\tau_\mu}{\rho}\log 2\pi k - \log c_\mu))^{1/\rho} + \beta_k,$$

где

$$c_\mu = \begin{cases} 1/\rho\Gamma(\mu - 1/\rho), & \text{когда } \mu \neq 1/\rho - n, n \in \mathbf{Z}_+, \\ 1/\rho\Gamma(\mu - 2/\rho), & \text{когда } \mu = 1/\rho - n, n \in \mathbf{Z}_+, 1/\rho \notin \mathbf{N}; \end{cases}$$

$$\tau_\mu = \begin{cases} 1 + \rho(1-\mu), & \text{когда } \mu \neq 1/\rho - n, n \in \mathbf{Z}_+, \\ 2 + \rho(1-\mu), & \text{когда } \mu = 1/\rho - n, n \in \mathbf{Z}_+, 1/\rho \notin \mathbf{N}; \end{cases}$$

$$\beta_k = O(1/|k|) + O((\log|k|)/|k|^{2-1/\rho}).$$

А значит,

$$|\lambda_k| = (2\pi k)^\alpha \left(1 - \frac{\tau_\mu}{4\rho k}\right) + O(k^{-1}) + O(k^{\alpha-2}\log k), \quad k \to \infty.$$

Поэтому

$$|\lambda_k| - (2\pi(k-1))^\alpha = (2\pi k)^\alpha - \frac{(2\pi)^\alpha}{4\rho}\tau_\mu k^{\alpha-1} + O(k^{-1}) + O(k^{\alpha-2}\log k) - (2\pi(k-1))^\alpha$$

$$= (2\pi k)^\alpha\{(1 - (1-1/k)^\alpha) - \frac{\alpha}{4}\tau_\mu k^{-1} + O(k^{-1-\alpha}) + O(k^{-2}\log k)\}$$

$$= (2\pi k)^\alpha\{\frac{\alpha}{k}(1 - \frac{\tau_\mu}{4}) + O(k^{-1-\alpha}) + O(k^{-2}\log k)\} \geq 0, \quad k \to \infty,$$

при $\tau_\mu < 4$, что и требуем в условии (а) теоремы 1.

Далее в точности повторяются те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы A (случай $\rho > 1/2$) [3, с. 25–27],. Завершаем доказательство теоремы 1(а) также аналогичным образом, рассматривая в W_1 функцию $\Psi(z) = z^{1-\rho}E_\rho'(z,\mu)/E_\rho(z,\mu)$.

3. Доказательство теоремы 1(б)

Повторяя рассуждения из [3, с. 27], получаем, что для доказательства оценки (1) достаточно рассмотреть $E_\rho'(z,\mu)/E_\rho(z,\mu)$ в угле $W = \{z : \pi - \eta < \arg z < \pi + \eta\}$.

Обозначим $(m = 0, 1, ..., m_0)$

$$\Psi_m(z) = \rho\{\exp(z^\rho e^{2m\pi i\rho})\exp(2m\pi i\rho(1-\mu))$$

$$+\exp(z^\rho e^{-2(m+1)\pi i\rho})\exp(-2(m+1)\pi i\rho(1-\mu))\}$$

определенную в W функцию, где однозначная в W ветвь z^ρ выбрана условием $\pi - \eta < \arg z < \pi + \eta, m_0 = \max\{m \in \mathbf{Z}_+ : m < 1/(2\rho) - 1/2\}$. Известно ([1, с. 137], что в W справедливо

$$z^{\rho(\mu-1)}E_\rho(z,\mu) = \sum_{m=0}^{m_0} \Psi_m(z) + O(1/|z|^\beta), \quad z \to \infty, \tag{5}$$

где $\beta = 1 + \rho(1-\mu) > 0$. Из (5) имеем

$$(z^{\rho(\mu-1)}E_\rho(z,\mu))' = \sum_{m=0}^{m_0} \Psi_m'(z) + O(1/|z|^{1+\beta}), \quad z \to \infty. \tag{6}$$

Пусть

$$r_k = \frac{(k - 1/2 - \rho(1-\mu))^\alpha \pi^\alpha}{(\sin \pi\rho)^\alpha}, \quad a_k = -r_k,$$

$$\zeta = a_k + d r_k^{1-\rho} e^{i\theta}, \quad d = q/4, \quad 0 < q \le 2, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\Psi_m(\zeta)| &\le \rho \exp(r_k^\rho \cos(2m+1)\pi\rho - d\rho\cos(\theta + (2m+1)\pi\rho) + O(r_k^{-\rho})) \\ &+\rho \exp(r_k^\rho \cos(2m+1)\pi\rho - d\rho\cos(\theta - (2m+1)\pi\rho) + O(r_k^{-\rho})) \\ &\le 2\rho \exp(r_k^\rho \cos(2m+1)\pi\rho + d\rho + O(r_k^{-\rho})), \quad k \to \infty, \end{aligned} \tag{7}$$

$$|\Psi_m'(\zeta)| \le 2\rho^2 r_k^{\rho-1} \exp(r_k^\rho \cos(2m+1)\pi\rho + d\rho + O(r_k^{-\rho})), \quad k \to \infty. \tag{8}$$

Оценим величину $|\Psi_0(\zeta)|$ снизу.

$$\begin{aligned} |\Psi_0(\zeta)| &= \rho|\exp(r_k^\rho e^{i\pi\rho})\exp(-d\rho e^{i(\theta+\pi\rho)})\exp(O(r_k^{-\rho})) \\ &+ \exp(r_k^\rho e^{-i\pi\rho})\exp(-d\rho e^{i(\theta-\pi\rho)})\exp(-2\pi i\rho(1-\mu))\exp(O(r_k^{-\rho}))| \\ &= \rho\exp(r_k^\rho \cos\pi\rho)|\exp(-d\rho e^{i(\theta+\pi\rho)} + i r_k^\rho \sin\pi\rho)(1+o(1)) \\ &+ \exp(-d\rho e^{i(\theta-\pi\rho)} - i(r_k^\rho \sin\pi\rho + 2\pi\rho(1-\mu)))(1+o(1))| \\ &= \rho\exp(r_k^\rho\cos\pi\rho)\exp(-d\rho\cos\theta\cos\pi\rho)|\exp(-i\pi\rho(1-\mu))| \end{aligned}$$

$$\times|\exp(d\rho\sin\theta\sin\pi\rho)\exp(-id\rho\cos\theta\sin\pi\rho)\exp(i(r_k^\rho\sin\pi\rho+\pi\rho(1-\mu)))(1+o(1))$$
$$+\exp(-d\rho\sin\theta\sin\pi\rho)\exp(id\rho\cos\theta\sin\pi\rho)\exp(-i(r_k^\rho\sin\pi\rho+\pi\rho(1-\mu)))(1+o(1))|$$
$$= \rho\exp(r_k^\rho\cos\pi\rho)\exp(-d\rho\cos\theta\cos\pi\rho)|\exp(d\rho\sin\theta\sin\pi\rho)\exp(-id\rho\cos\theta\sin\pi\rho)$$

$$\begin{aligned} &\times(1+o(1)) - \exp(-d\rho\sin\theta\sin\pi\rho)\exp(id\rho\cos\theta\sin\pi\rho)(1+o(1))| \\ &\ge \rho\exp(r_k^\rho\cos\pi\rho)\exp(-d\rho\cos\pi\rho)|2i\sin(d\rho\sin\pi\rho e^{i\theta}) + o(1)| \\ &\ge 2\rho\exp(r_k^\rho\cos\pi\rho)\exp(-d\rho\cos\pi\rho)\{\sin(d\rho\sin\pi\rho) + o(1)\}, \quad k \to \infty. \end{aligned} \tag{9}$$

Учитывая, что $\cos\pi\rho > \cos 3\pi\rho > \ldots > \cos(2m_0+1)\pi\rho > -1$, а также из (5)–(9) получим

$$|\zeta^{\rho(\mu-1)}E_\rho(\zeta,\mu)| = |\Psi_0(\zeta)|(1+o(1)), \quad k \to \infty, \tag{10}$$

$$|(z^{\rho(\mu-1)}E_\rho(z,\mu))'_{z=\zeta}| \le 2\rho^2 r_k^{\rho-1}\exp(r_k^\rho\cos\pi\rho)(e^{d\rho} + o(1)), \quad k \to \infty. \tag{11}$$

Из (10) по теореме Руше следует, что внутри круга $G'_k(d) = \{z : |z + r_k| < dr_k^{1-\rho}\}$ функция $E_\rho(z,\mu)$ имеет (при достаточно больших k) столько же нулей, что и $\Psi_0(z)$. А $\Psi_0(z)$ имеет в этом круге единственный нуль первого порядка в точке a_k, так как

$$\begin{aligned}\Psi_0(z) &= \rho\{\exp(z^\rho) + \exp(z^\rho e^{-2\pi i\rho})\exp(-2\pi i\rho(1-\mu))\}\\ &= \rho\exp(-i\pi\rho(1-\mu) + (1-e^{\pi i\rho})z^\rho)\\ &\times\{\exp(z^\rho e^{\pi i\rho} + \pi i\rho(1-\mu)) + \exp(z^\rho e^{-\pi i\rho} - \pi i\rho(1-\mu))\}\\ &= 2\rho\exp(-i\pi\rho(1-\mu) + (1-e^{\pi i\rho})z^\rho)\cdot e^{z^\rho\cos\pi\rho}\cos(z^\rho\sin\pi\rho + \pi\rho(1-\mu)).\end{aligned}$$

Итак, при достаточно больших k имеем

$$|\lambda_k - a_k| < dr_k^{1-\rho}.$$

Из (9)–(11) следует, что

$$\begin{aligned}\left|\frac{(z^{\rho(\mu-1)}E_\rho(z,\mu))'_{z=\zeta}}{\zeta^{\rho(\mu-1)}E_\rho(\zeta,\mu)}\right| &\le \rho r_k^{\rho-1}e^{d\rho(1+\cos\pi\rho)}/\sin(d\rho\sin\pi\rho)(1+o(1))\\ &= \rho|\zeta|^{\rho-1}e^{d\rho(1+\cos\pi\rho)}/\sin(d\rho\sin\pi\rho)(1+o(1)), \quad k\to\infty.\end{aligned}$$

Следовательно, на границе $W\setminus\bigcup_{k=1}^\infty G'_k(d)$ при достаточно большом P выполняется (1).

Далее доказательство теоремы 1(б) в точности повторяет доказательство теоремы А [3, с. 29].

Теорема 1 полностью доказана.

В заключение выражаю искреннюю благодарность И.В. Островскому за постановку задачи.

З а м е ч а н и е. После того как работа была подготовлена к печати, мне стало известно из устного сообщения А.А. Гольдберга, что близкие результаты получены М.Т. Бордуляк (Украина, Львов, Львовский государственный университет).

Список литературы

[1] *М.М. Джрбашян,* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. Наука, Москва (1966), 672 с.

[2] *A.M. Sedletskii,* Asymptotic formulae for zeros of a function of Mittag–Leffler's type. — Analysis Math. (1994), v. 20, p. 117–132.

[3] *А.А. Гольдберг,* Оцінка модуля логарифмічної похідної функції Міттаг-Леффлера та її застосування. — Мат. студії (1995), т. 5, с. 21–30.

[4] *М.Н. Шеремета, А.Д. Кузык,* О логарифмической производной и нулях целой функции ограниченного l-распределения значений. — Сиб. мат. журн. (1992), т. 33, № 2, с. 142–150.

[5] *А.А. Гольдберг, М.Н. Шеремета,* О существовании целой трансцендентной функции ограниченного l-индекса. — Мат. заметки (1995), т. 57, № 1, с. 125–129.

A remark to the paper of A.A. Gol'dberg "An estimate of modulus of logarithmic derivative of Mittag–Leffler function and its applications"

I.N. Peresyolkova

An upper estimate of modulus of logarithmic derivative of the function of Mittag–Leffler's type $E_\rho(z,\mu)$ is obtaind. Using this result we describe the set of pairs (ρ,μ) such that the function of Mittag–Leffler's type is a function of bounded index.

Зауваження до роботи А.А. Гольдберга "Оцінка модуля логарифмічної похідної функції Міттаг-Леффлера та її застосування"

І.М. Пересьолкова

Одержано оцінку зверху модуля логарифмічної похідної функції типу Міттаг-Леффлера $E_\rho(z,\mu)$. За допомогою цього результату описується множина тих значень ρ та μ, при яких функція типу Міттаг-Леффлера є функцією обмеженого індексу.