Математическая физика, анализ, геометрия
1999, т. 6, № 3/4, с. 361–371

О представлении линейных непрерывных функционалов в одном пространстве голоморфных в круге функций

Р.Ф. Шамоян

*Брянский государственный педагогический университет
Россия, 241036, г. Брянск, ул. Бежицкая, 14*

Статья поступила в редакцию 1 октября 1997 года

Дано описание сопряженного пространства класса голоморфных в $= \{z : |z| < 1\}$ функций, для которых предел $-\lim\limits_{r\to 1-0} \frac{(1-r)^2}{\omega(1-r)} D^{\alpha+2} \times \left(f(re^{i\varphi})\right) = 0$, равномерно по φ, $\omega(\delta)$ — функция типа модуля непрерывности, $\alpha \geq 0$. Этот результат обобщает известную теорему Дюрена–Ромберга–Шильдса о сопряженном пространстве класса $\lambda_\alpha^{(n)}$, $0 < \alpha \leq 1$, $n \geq 0$.

Полное описание линейных непрерывных функционалов в пространствах голоморфных в круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функций, n-я производная которых на $\bar{\mathbb{D}}$ удовлетворяет условию Гельдера порядка α, дано в работе [1]. Для того чтобы сформулировать этот результат, введем обозначения. Пусть $0 < \alpha \leq 1$, $n \geq 0$. Обозначим через $\lambda_\alpha^{(n)}$ пространство голоморфных в $\mathbb{D}$ функций f, для которых $f^{(n)} \in lip(\alpha, \bar{\mathbb{D}})$, $0 < \alpha \leq 1$, с нормой

$$\|f\|_{\lambda_\alpha^{(n)}} = \|f\|_\infty + \sup_{\varphi,\theta\in[-\pi,\pi]} \frac{|f^{(n)}(e^{i\theta}) - f^{(n)}(e^{i\varphi})|}{|e^{i\theta} - e^{i\varphi}|^\alpha}, \ \alpha \in (0,1),$$

$$\|f\|_{\lambda_1^{(n)}} = \|f\|_\infty + \sup_{\varphi,\theta\in[-\pi,\pi]} \left\{ \frac{|f^{(n)}(e^{i(\theta+\varphi)}) - 2f^{(n)}(e^{i\varphi}) + f^{(n)}(e^{i(\theta-\varphi)})|}{|e^{i\theta} - e^{i\varphi}|} \right\}, \ \alpha = 1. \tag{1}$$

Положим также

$$B^p = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_{B^p} = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1-r)^{1/p-2} |f(re^{i\varphi})| r \, dr d\varphi < +\infty \right\}, p \in (0,1).$$

Теорема (П. Дюрен, Б. Ромберг, А. Шильдс [1]). *Пусть Φ — линейный непрерывный функционал на $\lambda_\alpha^{(n)}$, $0 < \alpha \le 1$. Тогда существует функция $g \in B^p$, где $\frac{1}{n+2} \le p < \frac{1}{n+1}$, $\alpha = \frac{1}{p} - n - 1$, такая, что функционал Φ представим в виде*

$$\Phi(f) = \lim_{\rho\to 1-0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\rho e^{i\varphi}) f(e^{-i\varphi})\, d\varphi\,, \tag{2}$$

причем существуют положительные константы C_1 и C_2 такие, что

$$C_1 \|g\|_{B^p} \le \|\Phi\| \le C_2 \|g\|_{B^p}\,. \tag{3}$$

Обратно, каждая функция $g \in B^p$ по формуле (2) порождает линейный непрерывный функционал на $\lambda_\alpha^{(n)}$, для которого справедливы оценки (3).

В данной работе обобщаем результаты этой теоремы сразу в двух направлениях. Во-первых, рассматриваем пространства голоморфных в круге функций с ограничениями на производные дробного порядка β; во-вторых, вместо гельдеровских классов рассматриваем классы функций с произвольным модулем непрерывности $\omega(\delta)$, удовлетворяющим известному условию Зигмунда $\int_0^\delta \frac{\omega(u)}{u}\, du = O(\omega(\delta))$, $\delta \to 0$. При этом отметим, что доказательство указанного результата, на наш взгляд, существенно проще, чем доказательство теоремы Дюрена–Ромберга–Шильдса.

§ 1. Формулировка основного результата и доказательство вспомогательных утверждений

Символом $H(\mathbb{D})$ обозначим множество всех голоморфных в $\mathbb{D}$ функций. Предположим $f \in H(\mathbb{D})$. С каждой $f \in H(\mathbb{D})$, $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k$, $z \in \mathbb{D}$, и $\beta > -1$, свяжем функцию

$$D^\beta f(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(\beta+k+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(k+1)} a_k z^k,\ z \in \mathbb{D}, \tag{4}$$

где $\Gamma(z)$ — известная функция Эйлера. Назовем $D^\beta f$ производной порядка β от функции f (см. [3]). Очевидно, что если $f \in H(\mathbb{D})$, то $\mathbb{D}^\beta f \in H(\mathbb{D})$, при этом, когда $\beta = m$ целое, то

$$m! D^m f(z) = \frac{d^m}{dz^m} z^m f(z),\ z \in \mathbb{D}.$$

Определение (см. [2]). *Функцией типа модуля непрерывности назовем всякую функцию $\omega \in [0, +\infty)$, подчиненную следующим ограничениям:*

а) ω *не убывает,*
б) $\omega(\delta_1+\delta_2) \le \omega(\delta_1)+\omega(\delta_2)$, $\delta_1, \delta_2 \in [0,+\infty)$,
в) $\omega(0)=0$, $\omega(\lambda\delta) \le \lambda\omega(\delta)$, $\delta \ge 0$, $\lambda \ge 1$, (5)
г) $\frac{\omega(\delta)}{\delta}$ *убывает на отрезке* $[0,1]$.

Пусть ω — функция типа модуля непрерывности. Через λ_ω^β обозначим множество тех функций $f \in H(\mathbb{D})$, для которых

$$\lim_{r\to 1-0} \frac{(1-r)^2}{\omega(1-r)} D^{\beta+2}(f(re^{i\varphi})) = 0, \ \beta \ge 0, \tag{6}$$

и при этом сходимость имеет место равномерно относительно φ. Введем в λ_ω^β норму

$$\|f\|_{\lambda_\omega^\beta} = \sup_{z\in\mathbb{D}} \left\{ \frac{(1-|z|)^2 |D^{\beta+2} f(z)|}{\omega(1-|z|)} \right\}.$$

Через $A(\omega,\alpha)$ будем обозначать пространство голоморфных в $\mathbb{D}$ функций f, для которых

$$\|f\|_{A(\omega,\alpha)} = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1-r)^{\alpha-1}\omega(1-r)|f(re^{i\varphi})| r\, dr d\varphi < +\infty, \ \alpha \ge 0.$$

Когда $\alpha = 0$, будем предполагать, что

$$\int_0^1 \frac{\omega(u)}{u}\, du < +\infty\,. \tag{7}$$

Основным результатом работы является

Теорема. *Пусть* Φ *— линейный непрерывный функционал на* λ_ω^α, $g(z) = \Phi(l_z)$, *где* $l_z(\xi) = \frac{1}{1-\xi z}$, ξ, $z \in \mathbb{D}$. *Тогда функция* $g \in A(\omega,\alpha)$, *при этом функционал* Φ *представим в виде*

$$\Phi(f) = \lim_{\rho\to 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\rho e^{i\varphi}) f(e^{-i\varphi})\, d\varphi\,; \tag{8}$$

причем существуют положительные константы C_1 *и* C_2 *такие, что*

$$C_1\|g\|_{A(\omega,\alpha)} \le \|\Phi\| \le C_2\|g\|_{A(\omega,\alpha)}\,. \tag{9}$$

Обратно, каждая функция $g \in A(\omega,\alpha)$ *по формуле (8) порождает линейный непрерывный функционал на* λ_ω^α, *для которого справедлива оценка (9).*

З а м е ч а н и е 1. Используя результаты [4, 5], легко видеть, что при условии $\int_0^\delta \frac{\omega(u)}{u}\,du = O(\omega(\delta))$, λ_ω^α совпадает с классом голоморфных в круге функций f, для которых

$$\sup_{|t|\le\delta}\sup_x |D^\alpha f(e^{i(x+t)}) - 2D^\alpha f(e^{ix}) + D^\alpha f(e^{i(x-t)})| = o(\omega(\delta)),\ \delta\to 0,\ \alpha\ge 0.$$

Лемма 1. *Пусть* $f\in\lambda_\omega^\alpha$, $f_R(z)=f(Rz)$, $z\in\mathbb{D}$, $0<R<1$, *тогда имеет место равенство*

$$\lim_{R\to 1-0}\|f-f_R\|_{\lambda_\omega^\alpha}=0. \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(z)=\sum_{k=0}^\infty a_k z^k$. Имеем

$$\|f-f_R\|_{\lambda_\omega^\alpha}=\sup_{z\in\mathbb{D}}\left\{\left|\mathbb{D}^{\alpha+2}f(z)-\mathbb{D}^{\alpha+2}f_R(z)\right|\frac{(1-|z|)^2}{\omega(1-|z|)}\right\}.$$

Пусть ε — произвольное положительное число. Из определения λ_ω^α следует, что

$$\sup_{R_0<|z|<1}\left|\frac{\mathbb{D}^{\alpha+2}f(z)(1-|z|)^2}{\omega(1-|z|)}\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

где R_0 — некоторое положительное число, зависящее только от ε. Докажем, что такая же оценка верна для функции f_R равномерно относительно R. Действительно, пусть $0<R_1<1$ — положительное число. Тогда, учитывая, что при $R_1<|z|<1$ и $\xi=Rz$, $R_1R<|\xi|<R$, получим

$$\sup_{R_1<|z|<1}\left|\mathbb{D}^{\alpha+2}f_R(z)\frac{(1-|z|)^2}{\omega(1-|z|)}\right|=\sup_{R_1<|z|<1}\frac{\left|\mathbb{D}^{\alpha+2}f(Rz)(1-|z|)^2\right|}{\omega(1-|z|)}$$

$$=\frac{1}{R^2}\sup_{RR_1<|\xi|<R}\frac{\left|\mathbb{D}^{\alpha+2}f(\xi)(R-|\xi|)^2\right|}{\omega\left(\frac{R-|\xi|}{R}\right)}\le C_1\sup_{RR_1<|\xi|<1}\left\{\frac{\left|\mathbb{D}^{\alpha+2}f(\xi)(1-|\xi|)^2\right|}{\omega(1-|\xi|)}\right\}.$$

Подбирая теперь R и R_1 таким образом, чтобы $R_0<RR_1$, получим оценку

$$\sup_{R_1<|z|<1}\left\{\frac{\left|\mathbb{D}^{\alpha+2}f_R(z)\right|(1-|z|)^2}{\omega(1-|z|)}\right\}$$

$$\le C_1\sup_{R_0<|\xi|<1}\left\{\frac{\left|\mathbb{D}^{\alpha+2}f(\xi)\right|(1-|\xi|)^2}{\omega(1-|\xi|)}\right\}<C_1\frac{\varepsilon}{2}. \tag{11}$$

Следовательно, имеем

$$\sup_{R_0<|z|<1}\frac{\left|\mathbb{D}^{\alpha+2}f(z)-\mathbb{D}^{\alpha+2}f_R(z)\right|(1-|z|)^2}{\omega(1-|z|)}<\varepsilon C. \tag{12}$$

В то же время легко видеть, что при $|z| \le R_0$, равномерно $\lim\limits_{R\to 1-0} f_R(z) = f(z)$. Поэтому получаем, что для произвольного $\varepsilon_1 > 0$ можно найти такое R_2, что

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{\left|(\mathbb{D}^{\alpha+2} f(z) - \mathbb{D}^{\,\alpha+2} f_R(z))\right| (1-|z|)^2}{\omega(1-|z|)} < \varepsilon_1\,,$$

как только $R_2 < R < 1$.

Лемма доказана.

Замечание 2. Очевидно, что если $p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k R^k z^k$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \|p_n - f_R\|_{\lambda_\omega^\alpha} = 0$. Поэтому можно утверждать, что существует $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ такое, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|p_n - f\|_{\lambda_\omega^\alpha} = 0$.

Лемма 2. *Пусть $\beta > 1$, тогда найдутся такие константы C_1 и C_2, что верны неравенства*

$$\frac{C_1}{(1-r)^{\beta-1}} \le \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}|^\beta} \le \frac{C_2}{(1-r)^{\beta-1}} \tag{13}$$

при $r \in [0,1)$.

Доказательство. Пусть

$$I(r) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}|^\beta} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\left((1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{\beta/2}}$$

$$= 2\int\limits_{0}^{\pi} \frac{d\theta}{\left((1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{\beta/2}} = 2\int\limits_{0}^{1-r} \frac{d\theta}{\left((1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{\beta/2}}$$

$$+2\int\limits_{1-r}^{\pi} \frac{d\theta}{\left((1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{\beta/2}} = 2I_1^{(\beta)} + 2I_2^{(\beta)}\,. \tag{14}$$

Очевидно, что

$$I_1^{(\beta)} \le \int\limits_{0}^{1-r} \frac{d\theta}{(1-r)^\beta} = \frac{1}{(1-r)^{\beta-1}}\,. \tag{15}$$

Для оценки $I_2^{(\beta)}$ заметим, что при $0 \le \theta \le \pi$ имеет место оценка $\sin\frac{\theta}{2} \ge \frac{\theta}{\pi}$. Поэтому

$$I_2^{(\beta)} \le \int\limits_{1-r}^{\pi} \frac{d\theta}{\left(4r\frac{\theta^2}{\pi^2}\right)^{\beta/2}} = \frac{\pi^\beta}{2^\beta r^{\beta/2}} \int\limits_{1-r}^{\pi} \frac{d\theta}{\theta^\beta} \le \frac{C(\beta)}{(1-r)^{\beta-1}}\,. \tag{16}$$

Не ограничивая общности, можно предположить $r > \frac{1}{2}$. Объединяя оценки (15) и (16), получим правую оценку (13). Чтобы получить левую оценку в (13), учтем, что $\sin^2 x \le x^2$:

$$I_1^{(\beta)} \ge \int_0^{1-r} \frac{d\theta}{\left((1-r)^2 + 4r\frac{\theta^2}{4}\right)^{\beta/2}}$$

$$\ge \int_0^{1-r} \frac{d\theta}{((1-r)^2 + 4r(1-r)^2)^{\beta/2}} \ge \frac{1-r}{(1-r)^\beta(1+4r)^\beta} \ge \frac{1}{5^\beta(1-r)^{\beta-1}}\,.$$

Следовательно,

$$I_1^{(\beta)} \ge \frac{c_0(\beta)}{(1-r)^{\beta-1}}\,.$$

Лемма 3. *Если $\omega(\delta)$ — функция типа модуля непрерывности, то*

$$\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r)^{\alpha-1}\omega(1-r)}{|1-r\rho e^{i\theta}|^{\alpha+3}} r\,dr d\theta \le const\frac{\omega(1-\rho)}{(1-\rho)^2},\ \ \rho\in[0,1].$$

Доказательство. Пусть

$$I(\rho) = \int_0^1 \omega(1-r)(1-r)^{\alpha-1}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta r dr}{|1-r\rho e^{i\theta}|^{\alpha+3}}\,.$$

По лемме 2

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{|1-r\rho e^{i\theta}|^{\alpha+3}} \le \frac{const}{(1-r\rho)^{\alpha+2}}\,.$$

Следовательно,

$$I(\rho) \le const\int_0^1 \frac{\omega(1-r)(1-r)^{\alpha-1}}{(1-r\rho)^{\alpha+2}}\,dr$$

$$= const\left\{\int_0^\rho \frac{\omega(1-r)(1-r)^{\alpha-1}}{(1-r\rho)^{\alpha+2}}\,dr + \int_\rho^1 \frac{\omega(1-r)(1-r)^{\alpha-1}}{(1-r\rho)^{\alpha+2}}\,dr\right\}.$$

Пусть

$$I_1(\rho) = \int_0^\rho \frac{\omega(1-r)(1-r)^{\alpha-1}}{(1-r\rho)^{\alpha+2}}\,dr\,.$$

Учитывая, что для функций типа модуля непрерывности $\frac{\omega(\delta)}{\delta}$ убывает (см. [2]), получаем

$$I_1(\rho) \le \frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho} \int\limits_0^\rho \frac{(1-r)^\alpha\,dr}{(1-r\rho)^{\alpha+2}} \le \frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho} \int\limits_0^\rho \frac{dr}{(1-r)^2} = \frac{c\,\omega(1-\rho)}{(1-\rho)^2}\,.$$

Оценим теперь

$$I_2(\rho) = \int\limits_\rho^1 \frac{\omega(1-r)(1-r)^{\alpha-1}}{(1-r\rho)^{\alpha+2}}\,dr\,.$$

Используем тот факт, что $\omega(\delta)$ — возрастающая функция. Тогда

$$I^2(\rho) \le \frac{\omega(1-\rho)}{(1-\rho)^{\alpha+2}} \int\limits_\rho^1 (1-r)^{\alpha-1}\,dr\,.$$

Следовательно, получаем $I^2(\rho) \le \frac{\omega(1-\rho)}{\alpha(1-\rho)^2}$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть f и g — голоморфные функции в $\mathbb{D}$. Тогда для любого r, $0 < r < 1$, имеет место равенство*

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\varphi}) g(re^{-i\varphi})\,d\varphi$$

$$= r^{-2(\alpha+2)} \frac{\alpha+2}{\pi} \int\limits_0^r \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(\rho e^{-i\varphi}) D^{\alpha+2} f(\rho e^{i\varphi}) (r^2-\rho^2)^{\alpha+1} \rho\,d\rho d\varphi, \quad \alpha \ge 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\varphi}) g(re^{-i\varphi})\,d\varphi = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k r^{2k}. \tag{17}$$

В то же время

$$r^{-2(\alpha+2)} \frac{\alpha+2}{\pi} \int\limits_0^r \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(\rho e^{-i\varphi}) D^{\alpha+2} f(\rho e^{i\varphi}) (r^2-\rho^2)^{\alpha+1} \rho\,d\rho d\varphi$$

$$= 2r^{-2(\alpha+2)}(\alpha+2) \int\limits_0^r \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k \rho^{2k} \frac{\Gamma(k+\alpha+3)}{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(k+1)} (r^2-\rho^2)^{\alpha+1} \rho\,d\rho = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k r^{2k}$$

$$\times\left(2r^{-2(\alpha+2)}(\alpha+2)\int\limits_0^1 t^{2k+1}r^2\frac{\Gamma(k+\alpha+3)}{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(k+1)}r^{2(\alpha+1)}(1-t^2)^{\alpha+1}\,dt\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kb_kr^{2k}\frac{\Gamma(k+\alpha+3)}{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(k+1)}(\alpha+2)2\int\limits_0^1 t^{2k+1}(1-t^2)^{\alpha+1}\,dt$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kb_kr^{2k}. \tag{18}$$

Ввиду равенства

$$\int\limits_0^1 t^{2k+1}(1-t^2)^{\alpha+1}\,dt=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+3)}\,.$$

Из (17) и (18) получим требуемое утверждение. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 3. Легко видеть, что при $\alpha=n$, $\omega(\delta)=\delta^{1/p-n-1}$, $n+1<\frac{1}{p}\le n+2$, $A(\omega,\alpha)=B^p$. Далее по теореме Дюрена–Ромберга–Шильдса $(\lambda^{(n)}_{1/p-n-1})^*=B^p$, $n+1<\frac{1}{p}\le n+2$, где X^* — сопряженное к X пространство. Следовательно, из нашего результата вытекает, что при $\alpha=n$, $\omega(\delta)=\delta^{1/p-n-1}$, $n+1<\frac{1}{p}\le n+2$, $(\lambda^{(n)}_{\beta})^*=(\lambda^{\alpha}_{\omega})^*$, $\beta=\frac{1}{p}-n-1$, или $(\lambda^{(n)}_{\beta})^*=(\lambda_{n,\beta})^*$, $0<\beta\le 1$, $\lambda_{n,\beta}\stackrel{\text{def}}{=}\left\{f\in H(\mathbb{D}):|f^{(n+2)}(z)|=o\left((1-|z|)^{\beta-2}\right),\ |z|\to 1-0\right\}$.

§ 2. Доказательство теоремы

Пусть Φ — линейный непрерывный функционал на $\lambda^{\alpha}_{\omega}$. Положим $g(z)=\Phi(l_z)$, где $l_z(\xi)=\frac{1}{1-\xi z}$, z, $\xi\in\mathbb{D}$. Тогда учитывая, что $l_z(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}(z\xi)^k$, причем ряд сходится к функции $l_z(\xi)$ в пространстве $\lambda^{\alpha}_{\omega}$ при любом $z\in\mathbb{D}$, получаем

$$g(z)=\Phi(l_z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\Phi(\delta_k)z^k\,, \tag{19}$$

где $\delta_k(\xi)=\xi^k$, $\xi\in\mathbb{D}$. Очевидно, что $\|\delta_k\|_{\lambda^{\alpha}_{\omega}}\le c_0k^{\alpha+3}$, $k=1,2,\dots$. Поэтому $g\in H(\mathbb{D})$. Докажем, что $g\in A(\omega,\alpha)$. Пусть $f\in\lambda^{\alpha}_{\omega}$ и

$$(Bf)(z)=\frac{(1-|z|^2)^2}{\omega(1-|z|)}D^{\alpha+2}f(z),\ z\in\mathbb{D}.$$

Легко видеть, что оператор B непрерывно отображает $\lambda^{\alpha}_{\omega}$ в пространство функций Ψ, непрерывных в $\mathbb{D}$ и обращающихся в нуль на $\Gamma=\partial\mathbb{D}$. Используя теоремы Ф. Рисса, Хана–Банаха и проводя стандартные рассуждения, можем утверждать, что существует мера μ на $\mathbb{D}$ такая, что

$$\Phi(f) = \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\xi|^2)^2}{\omega(1-|\xi|)} D^{\alpha+2} f(\xi)\, d\mu(\xi), \;\; f \in \lambda_\omega^\alpha\,, \tag{20}$$

причем

$$\int\limits_{\mathbb{D}} |d\mu| \le const \|\Psi\|.$$

Следовательно,

$$|g(z)| = |\Phi(l_z)| \le C_2 \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\xi|^2)^2}{\omega(1-|\xi|)} \frac{1}{|1-\xi z|^{\alpha+3}} |d\mu(\xi)|, \;\; z \in \mathbb{D}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{D}} \omega(1-|z|)(1-|z|)^{\alpha-1} |g(z)|\, dm_2(z)$$

$$\le C_2 \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\xi|)^2 |d\mu(\xi)|}{\omega(1-|\xi|)} \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)^{\alpha-1}\omega(1-|z|)}{|1-\xi z|^{\alpha+3}}\, dm_2(z)\,.$$

Отсюда, используя леммы 2 и 3, получаем

$$\|g\|_{A(\omega,\alpha)} \le C_3 \int\limits_{\mathbb{D}} |d\mu(\xi)| = C_3 \|\Phi\|.$$

Докажем теперь равенство (2). Имеем

$$\Phi(f_\rho) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \rho^k \Phi(z^k),$$

где

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad f_\rho(z) = f(\rho z).$$

Используя тот факт, что $\|f_\rho - f\|_{\lambda_\omega^\alpha} \to 0$ при $\rho \to 1-0$, получаем

$$\Phi(f) = \lim_{\rho\to 1-0} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \rho^k \Phi(\delta_k) = \lim_{\rho\to 1-0} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\varphi}) g(e^{-i\varphi})\, d\varphi\,.$$

Равенство (2) установлено. Одновременно доказана оценка в левой части (9). Для установления оценки правой части в (9) сначала докажем второе утверждение теоремы. Из леммы 4 следует, что для любого $\alpha \geq 0$, $0 < r < 1$, $g \in A(\omega, \alpha)$, $f \in \lambda_\omega^\alpha$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\varphi}) g(re^{-i\varphi})\, d\varphi$$

$$= 2r^{-2(\alpha+2)} \frac{\alpha+2}{2\pi} \int_0^r \int_{-\pi}^{\pi} g(\rho e^{-i\varphi}) D^{\alpha+2} f(\rho e^{i\varphi})(r^2 - \rho^2)^{\alpha+1} \rho\, d\rho d\varphi\,.$$

Поэтому, полагая $\Psi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\varphi}) g(e^{-i\varphi})\, d\varphi$, найдем, что

$$\Psi(r^2) = 2r^{-2(\alpha+2)} \frac{\alpha+2}{2\pi} \int_0^r \int_{-\pi}^{\pi} (r^2 - \rho^2)^{\alpha+1} g(\rho e^{-i\varphi}) D^{\alpha+2} f(\rho e^{i\varphi}) \rho\, d\rho d\varphi\,,$$

$$|\Psi(r^2)| \leq \frac{2\|f\|_{\lambda_\omega^\alpha}}{r^{2(\alpha+2)}} (\alpha+2) \int_0^r \int_{-\pi}^{\pi} (r^2 - \rho^2)^{\alpha-1} \omega(1-\rho) |g(\rho e^{i\varphi})| \rho\, d\rho d\varphi\,.$$

Следовательно, $\lim\limits_{r\to 1-0} \Psi(r)$ существует и $\left|\lim\limits_{r\to 1-0} \Psi(r)\right| \leq 2(\alpha+2)\|f\|_{\lambda_\omega^\alpha} \|g\|_{A(\omega,\alpha)}$. Учитывая (2) и то, что $g(z) = \Phi(l_z)$, получим $|\Phi(f)| \leq 2(\alpha+2)\|f\|_{\lambda_\omega^\alpha} \|g\|_{A(\omega,\alpha)}$. Поэтому $\|\Phi\| \leq 2(\alpha+2)\|g\|_{A(\omega,\alpha)}$. Отсюда следует и правая оценка в (9). Теорема доказана.

Список литературы

[1] *P.L. Duren, B.W. Romberg, and A.L. Shields*, Linear functionals on H^p spaces with $0 < p < 1$. — J. Reine Angew. Math. (1969), v. 238, p. 32–60.

[2] *В.И. Смирнов, Н.А. Лебедев*, Конструктивная теория функций комплексного переменного. Наука, Москва (1964).

[3] *М.М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. Наука, Москва (1966).

[4] *Н.К. Бари, С.Б. Стечкин*, Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. — Тр. Моск. мат. о-ва (1956), т. V, с. 483–522.

[5] *Е.М. Стейн*, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. Мир, Москва (1973).

A representation of linear functionals on some class of holomorphic functions in the unit disk

R.F. Shamoyan

A description is given for the dual space to the class of holomorphic functions in $= \{z : |z| < 1\}$ such that $\lim\limits_{r \to 1-0} \frac{(1-r)^2}{\omega(1-r)} D^{\alpha+2} \left(f(re^{i\varphi}) \right) = 0$, uniformly in φ, $\omega(\delta)$ being a function of modulus of continuity type, $\alpha \geq 0$. The result extends a known Duren–Romberg–Shields theorem on the dual space to the class $\lambda_\alpha^{(n)}$, $0 < \alpha \leq 1$, $n \geq 0$.

Про представлення лінійних неперервних функціоналів в одному просторі голоморфних в крузі функцій

Р.Ф. Шамоян

Дано опис спряженого простору класу голоморфних в $= \{z : |z| < 1\}$ функцій, для яких $\lim\limits_{r \to 1-0} \frac{(1-r)^2}{\omega(1-r)} D^{\alpha+2} \left(f(re^{i\varphi}) \right) = 0$, рівномірно за φ, $\omega(\delta)$ — функція типу модулю неперервності, $\alpha \geq 0$. Цей результат узагальнює відому теорему Дюрена–Ромберга–Шільдса про спряжений простір класу $\lambda_\alpha^{(n)}$, $0 < \alpha \leq 1$, $n \geq 0$.