Математическая физика, анализ, геометрия
1999, т. 6, № 3/4, с. 372–384

Пространство Бернштейна B_σ как банахово пространство

Б.М. Шумяцкий

Харьковская государственная академия городского хозяйства
Украина, 310002, г. Харьков, ул. Революции, 6
E-mail: boris@kadets.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 8 сентября 1997 года

Пространство Бернштейна B_σ состоит из всех целых функций экспоненциального типа не выше σ, ограниченных на $\mathbf{R}$. Доказывается, что B_σ, наделенное супремум-нормой, — несепарабельное банахово пространство, содержащее изометрическую копию ℓ_∞, но неизоморфное ℓ_∞; что B_σ недополняемо в B_ρ, $\sigma < \rho$; что B_σ изометрично второму сопряжённому к B_σ^0 — подпространству в B_σ, которое состоит из стремящихся к нулю на $\mathbf{R}$ функций; что на $(B_\sigma^0)^*$ совпадают слабая и сильная сходимости последовательностей (свойство Шура).

1. Введение

Определение 1.1. *Пространством Бернштейна с параметром $\sigma > 0$ называется нормированное пространство B_σ, которое состоит из целых функций экспоненциального типа не выше σ, ограниченных на вещественной оси, с нормой*

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : \quad x \in \mathbf{R}\}.$$

Функцию из B_σ часто будем отождествлять с её ограничением на $\mathbf{R}$ ввиду теоремы единственности.

В дальнейшем используем следующие обозначения:

$B(X)$ — замкнутый единичный шар пространства X;

B_σ — пространство Бернштейна с параметром σ;

B_σ^0 — подпространство в B_σ, состоящее из функций, которые стремятся к нулю на $\mathbf{R}$ при $x \to \pm\infty$;

$BC(\mathbf{R})$ — пространство комплекснозначных ограниченных непрерывных функций на $\mathbf{R}$, наделённое sup-нормой;

$BC^0(\mathbf{R})$ — подпространство в $BC(\mathbf{R})$, состоящее из функций, которые стремятся к нулю при $x \to \pm\infty$;

$\mathbf{C}^+(\mathbf{C}^-)$ — верхняя (нижняя) полуплоскость $\mathbf{C}$;

$C(\bar{\mathbf{R}})$ — подпространство в $BC(\mathbf{R})$, состоящее из функций, которые имеют предел при $x \to \infty$;

$C(\mathbf{T})$ — пространство комплекснозначных непрерывных функций на единичной окружности в $\mathbf{C}$, наделённое sup-нормой;

e_λ — экспонента с показателем λ, то есть $e_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$;

F — преобразование Фурье;

I — тождественный оператор;

λ — мера Лебега на $\mathbf{R}$;

$\ell_\infty(\mathbf{R})$ — пространство всех комплекснозначных ограниченных функций на $\mathbf{R}$, наделённое sup-нормой;

ρ — топология равномерной сходимости на компактах;

$S(X)$ — единичная сфера банахова пространства X;

T_τ — оператор сдвига на τ, т.е. $(T_\tau f)(t) = f(t+\tau)$.

Мы благодарны рецензентам за внимательное отношение к статье, позволившее устранить несколько опечаток, исключить некоторые излишние рассуждения и добавить необходимые ссылки и следствия.

2. Предварительные сведения

Определение 2.1. *Функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ называется функцией экспоненциального типа не выше σ, если она целая и*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists C_\varepsilon > 0 : |f(z)| \le C_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}$$

([2, п. 80]).

Утверждение 2.2. *Для любой функции f из B_σ и любых $x, y \in \mathbf{R}$*

$$|f(x+iy)| \le \|f\| \cdot e^{\sigma|y|}$$

([3, п. 4.3.1]).

Утверждение 2.3. *Для любой функции f из B_σ выполнено неравенство Бернштейна:*

$$\sup\{|f'(x)| : x \in \mathbf{R}\} \le \sigma\|f\|,$$

то есть оператор дифференцирования можно рассматривать как оператор из B_σ в B_σ и его норма не выше σ [2, п. 83].

З а м е ч а н и е 2.4. Все пространства B_σ, $\sigma > 0$, изометричны, изометрию можно осуществить оператором растяжения $T_{\sigma_1}^{\sigma_2} : B_{\sigma_1} \to B_{\sigma_2}$,

$$(T_{\sigma_1}^{\sigma_2} f)(z) = f\Big(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} z\Big), \quad z \in \mathbf{C}.$$

3. Топология равномерной сходимости на компактах

При изучении пространства Бернштейна большую роль играет топология ρ равномерной сходимости на компактах.

Определение 3.1. *Топология ρ задаётся на B_σ счётным семейством норм $\{p_n\}_1^\infty$,*

$$p_n f = \max\{|f(z)| : |z| \le n\}.$$

Последовательность $\{f_n\}_1^\infty \subset B_\sigma$ является сходящейся к f в топологии ρ, если она сходится к f равномерно на компактах из $\mathbf{C}$.

Утверждение 3.2. *Свойства топологии ρ:*

1) согласованность с линейной структурой;

2) метризуемость;

3) ρ-замкнутость $B(B_\sigma)$;

4) ρ-компактность $B(B_\sigma)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) очевидно; 2) следует из того, что эта топология задаётся счётным семейством норм; 3) и 4) см. [2, п. 83].

Утверждение 3.3. *На шаре B_σ топологии поточечной и равномерной на компактах сходимости эквивалентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Топология поточечной сходимости очевидно отделима и слабее топологии равномерной сходимости на компактах, которая компактна. Значит, эти топологии эквивалентны.

Следствие 3.4. *Пространство B_σ полно по норме.*

4. B_σ содержит изометрическую копию ℓ_∞

Поскольку все B_σ изометричны (замечание 2.4), то достаточно рассмотреть случай $\sigma = 2$.

Обозначим через $\{e_n\}_{-\infty}^{\infty}$ канонические орты пространства $\ell_\infty(\mathbf{Z})$ и введём оператор $T:\ \ell_\infty(\mathbf{Z}) \to \mathrm{B}_2$,

$$(Ta)(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} a_k \psi_k(z),$$

где $a = \{a_n\}_{-\infty}^{\infty} \in \ell_\infty(\mathbf{Z})$, а $\psi_n(z) = \left(\frac{\sin(z-n\pi)}{z-n\pi}\right)^2$.

Утверждение 4.1. *Оператор T является изометрией.*

Доказательство. Заметим, что $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k(x) \equiv 1$ (эту формулу можно получить, например, дифференцированием разложения $\operatorname{ctg} z$, [4, гл. 4, п. 4.2]). Поэтому для любого $x \in \mathbf{R}$

$$\left|\sum_{k=-n}^{n} a_k \psi_k(x)\right| \le \|a\| \cdot \sum_{k=-n}^{n} a_k \psi_k(x) = \|a\|.$$

Это означает, что Ta является поточечным пределом элементов шара B_2 радиуса $\|a\|$. Значит, $Ta \in B_2$ и $\|Ta\| \le \|a\|$. С другой стороны,

$$\|Ta\| = \sup_{t\in\mathbf{R}} \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \psi_n(t)\right| \ge \sup_{k\in\mathbf{Z}} \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \psi_n(k\pi)\right| = \sup_{k\in\mathbf{Z}} |a_k| = \|a\|.$$

Значит, T — изометрия, что и требовалось доказать.

Замечание 4.2. Этим же оператором $c_0(\mathbf{Z})$ изометрически вкладывается в B_2^0, поскольку для $a \in c_0(\mathbf{Z})$ $\lim \sum_{k=-n}^{n} a_k \psi_k$ существует по норме, а $\psi_n \in B_2^0$.

5. Предсопряжённое к B_σ

В [5, гл. 3, теорема 1] доказывается, что для того чтобы нормированное пространство являлось сопряжённым, необходимо и достаточно, чтобы на нём существовала такая отделимая локально выпуклая топология τ, в которой замкнутый единичный шар этого пространства компактен. При этом на шаре пространства топология τ совпадает со слабой* топологией. Значит, B_σ является сопряжённым к некоторому банаховому пространству, и слабая* топология B_σ совпадает на шаре с ρ. При этом из-за метризуемости ρ предсопряжённое к B_σ сепарабельно [6, гл. 5, теорема 4.2].

Рассмотрим B_σ как естественное подпространство в $L_\infty(\mathbf{R})$. Если B_σ $\sigma(L_\infty(\mathbf{R}), L_1(\mathbf{R}))$-замкнуто, то B_σ изометрично $(L_1(\mathbf{R})/{}^{\perp}B_\sigma)^*$. Для доказательства $\sigma(L_\infty(\mathbf{R}), L_1(\mathbf{R}))$-замкнутости B_σ в $L_\infty(\mathbf{R})$ понадобятся две простые леммы.

Лемма 5.1. *Пусть X, Y — сепарабельные банаховы пространства, $Y^* \subset X^*$. Если $\sigma(Y^*,Y)$-сходимость мажорирует $\sigma(X^*,X)$-сходимость на $B(Y^*)$, то $B(Y^*)$ секвенциально замкнут в $\sigma(X^*,X)$.*

Очевидно с учётом теоремы Алаоглу и метризуемости $\sigma(X^*,X)$ на $B(X^*)$.

Лемма 5.2. *Пусть μ – конечная борелевская σ-аддитивная мера на $\mathbf{R}$, $\{f_n\}_1^\infty \subset B_\sigma$, $\|f_n\| \le 1$ и $f_n \xrightarrow{\rho} 0$. Тогда $(\mu, f_n) \to 0$.*

Очевидно следует из теоремы Лебега о мажорированной сходимости.

В частности, из этой леммы следует, что сходимость в $\sigma(L_\infty(\mathbf{R}), \mathbf{L_1}(\mathbf{R}))$ на ограниченных множествах в B_σ мажорируется ρ-сходимостью.

Докажем $\sigma(L_\infty(\mathbf{R}), L_1(\mathbf{R}))$-замкнутость B_σ в $L_\infty(\mathbf{R})$. Из лемм 5.1 и 5.2 следует, что шар B_σ секвенциально замкнут в $\sigma(L_\infty(\mathbf{R}), L_1(\mathbf{R}))$. Поскольку эта топология метризуема на шаре $L_\infty(\mathbf{R})$, то, следовательно, шар B_σ в ней замкнут, отсюда по теореме Крейна–Шмульяна [6, гл. 5, теорема 5.7] всё B_σ замкнуто в $\sigma(L_\infty(\mathbf{R}), L_1(\mathbf{R}))$.

В заключение заметим, что

$$^\perp B_\sigma = \{\varphi \in L_1(\mathbf{R}) : \quad (F\varphi)(\xi) = 0, \quad \xi \notin [-\sigma,\sigma]\},$$

поскольку множество в правой части — аннулятор подпространства

$$\operatorname{lin}\{e_\lambda\}_{\lambda \in [-\sigma,\sigma]},$$

которое ρ- и, следовательно, $\sigma(L_\infty(\mathbf{R}), L_1(\mathbf{R}))$-полно в B_σ (см. [2, п. 85]).

6. B_σ изометрично второму сопряжённому к B_σ^0

Докажем, что построенное пространство $^*B_\sigma = (L_1(\mathbf{R})/{}^\perp\mathbf{B}_\sigma)$, которое является изометрическим предсопряжённым к B_σ, изометрично сопряжённому к B_σ^0. Для этого снова рассмотрим B_σ как естественное подпространство в $L_\infty(\mathbf{R})$, а B_σ^0 рассмотрим как естественное подпространство в $BC^0(\mathbf{R})$. Тогда $(B_\sigma^0)^*$ изометрично $(BC^0(\mathbf{R}))^*/(\mathbf{B_\sigma^0})^\perp$. $(BC^0(\mathbf{R}))^*$ есть пространство конечных σ-аддитивных борелевских мер на $\mathbf{R}$ (мера μ действует на функцию f как $\int_{\mathbf{R}} f d\mu$). $L_1(\mathbf{R})$ естественно вкладывается в $(BC^0(\mathbf{R}))^*$.

Лемма 6.1. *B_σ^0 плотно в B_σ в топологии равномерной сходимости на компактах.*

Доказательство. Пусть $f \in B_\sigma$. Выберем функцию $f_0 \in B_\sigma^0$: $f_0(0) = 1$ и рассмотрим последовательность $f_n(z) = f((1-1/n)z) \cdot f_0(z)$. Очевидно, что $f_n \in B_\sigma^0$, $\|f_n\| \le \|f\| \cdot \|f_0\|$ и что $f_n \to f$ поточечно и, следовательно, равномерно на компактах. Лемма доказана.

Определим оператор $T :\ {}^*B_\sigma \to (B_\sigma^0)^*$:

$$T(\varphi + {}^\perp B_\sigma) = \varphi d\lambda + (B_\sigma^0)^\perp, \quad \varphi \in L_1(\mathbf{R}).$$

Понятно, что ${}^\perp B_\sigma \subset (B_\sigma^0)^\perp$, поэтому оператор T корректно определён. Очевидно, что он линеен. Проверим его изометричность:

$$\|T(\varphi + {}^\perp B_\sigma)\|_{(B_\sigma^0)^*} = \|\varphi + (B_\sigma^0)^\perp\|_{(B_\sigma^0)^*} = \sup\{|(\varphi, f)| :\ f \in B(B_\sigma^0)\},$$

а

$$\|\varphi + {}^\perp B_\sigma\|_{{}^*B_\sigma} = \sup\{|(\varphi, f)| :\ f \in B(B_\sigma)\}.$$

Учитывая лемму 6.1, получаем равенство этих выражений, т.е. изометричность оператора T.

Наконец, докажем сюръективность T, которая означает, что

$$\forall \mu \in (BC^0(\mathbf{R}))^* \quad \exists \psi \in L_1(\mathbf{R}) : \quad \mu \text{ и } \psi \text{ совпадают на } B_\sigma. \tag{1}$$

Для этого, очевидно, достаточно таких двух лемм:

Лемма 6.2. *Для выполнения (1) достаточно существования $K \in L_1(\mathbf{R})$:*

$$\forall f \in B_\sigma, \forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) = \int_{\mathbf{R}} f(t) K(t-x) dt.$$

Лемма 6.3. *K из леммы 6.2. существует.*

Доказательство леммы 6.2. $\forall f \in B_\sigma$

$$(\mu, f) = \int_{\mathbf{R}} f(x) d\mu(x) = \int_{\mathbf{R}} d\mu(x) \int_{\mathbf{R}} dt f(t) K(t-x)$$

$$= \int_{\mathbf{R}} dt f(t) \int_{\mathbf{R}} d\mu(x) K(t-x) = (\psi, f)$$

для $\psi(t) = \int_{\mathbf{R}} K(t-x) d\mu(x)$. Очевидно, что $\psi \in L_1(\mathbf{R})$ и перестановка интегралов обоснованна.

Доказательство леммы 6.3. Докажем, что для $\sigma = 1$ годится

$$K(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{\sin 4t}{t}.$$

В самом деле, $K \in L_1(\mathbf{R})$ и

$$\int\limits_{\mathbf{R}} f(t)K(t-x)dt = \int\limits_{\mathbf{R}} f(t+x)K(t)dt$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\int\limits_{\mathbf{R}} f(t+x)\frac{e^{6it}-e^{2it}}{t^2} - \frac{1}{8\pi}\int\limits_{\mathbf{R}} f(t+x)\frac{e^{-6it}-e^{-2it}}{t^2}$$

$$- - \frac{1}{8\pi}(I_1+I_2),$$

причём интегралы в предпоследнем выражении берутся в смысле главного значения в нуле. I_1 и I_2 легко вычисляются с помощью вычетов, $I_1 = I_2 = -4\pi f(x)$, что и требовалось доказать.

7. B_σ недополняемо в B_ρ, $\sigma < \rho$

7.1. Инвариантное среднее в сопряжённом банаховом пространстве

Известно, что существует M — инвариантное среднее на $\ell_\infty(\mathbf{R})$, т.е. линейный функционал над $\ell_\infty(\mathbf{R})$, который инвариантен относительно сдвигов $\mathbf{R}$ и ставит каждой вещественнозначной функции f в соответствие число, лежащее между $\sup f$ и $\inf f$ (см. [6, гл. 2, п. 4, упр. 22–23]). Пусть X — банахово пространство и $\{x_t^*\}_{t\in\mathbf{R}}$ — ограниченное семейство в X^*. Сопоставим последовательности $\{x_t^*\}_{t\in\mathbf{R}}$ её среднее M по переменной t по естественному правилу

$$(\underset{t\in\mathbf{R}}{\mathrm{M}}\{x_t^*\}, x) = \underset{t\in\mathbf{R}}{\mathrm{M}}\{(x_t^*, x)\}.$$

Из условия ясно, что M применимо. Полученное среднее лежит в X^*, так как является непрерывным линейным функционалом над X. Очевидно, что $\|\underset{t\in\mathbf{R}}{\mathrm{M}}\{x_t^*\}\| \le \sup\limits_{t\in\mathbf{R}}\|x_t^*\|$ и что M инвариантно относительно сдвигов.

7.2. Недополняемость B_σ в B_ρ, $\rho > \sigma$

Будем рассуждать от противного: пусть существует ограниченный проектор P из B_ρ на B_σ. К противоречию придём в два этапа:

1) из существования P выведем существование P_0 — проектора, коммутирующего со сдвигами;

2) докажем, что такой проектор неограничен.

Эта схема доказательства такая же, как в доказательстве Рудина недополняемости $H_1(\mathbf{T})$ в $L_1(\mathbf{T})$ (см., например, [11, ч. I, гл. 5]). Отличие состоит в том, что группа, по которой необходимо проводить усреднение, некомпактна.

1) Рассмотрим B_σ как сопряжённое пространство к пространству ${}^*B_\sigma$, равному $L_1(\mathbf{R})/{}^\perp\mathbf{B}_\sigma$. Определим P_0 так:

$$P_0 f = \underset{t\in\mathbf{R}}{\mathrm{M}}\{T_t P T_{-t} f\},$$

где M — инвариантное среднее на B_σ. Поскольку B_σ инвариантно относительно сдвигов, то для любой функции $f \in B_\sigma$ $P_0 f \in B_\sigma$ и $P_0 f = f$, т.е. P_0 — проектор на B_σ. Ясно, что $\|P_0\| \le \|P\| < \infty$. Докажем, что P_0 коммутирует со сдвигами.

Поскольку операторы T_t очевидно слабо* непрерывны, то они являются сопряжёнными к некоторым операторам в ${}^*B_\sigma$, обозначим эти операторы ${}^*T_t$. Пусть $f \in B_\sigma$, $\psi \in {}^*B_\sigma$. Имеем

$$\begin{aligned}(T_\tau P_0 f, \psi) &= (P_0 f, {}^* T_\tau \psi) \\ = (\underset{t\in\mathbf{R}}{\mathrm{M}}\{T_t P T_{-t} f\}, {}^* T_\tau\psi) &= \underset{t\in\mathbf{R}}{\mathrm{M}}\{(T_t P T_{-t} f, {}^* T_\tau\psi)\} \\ = \underset{t\in\mathbf{R}}{\mathrm{M}}\{(T_{t+\tau} P T_{-t} f, \psi)\} &= \underset{t\in\mathbf{R}}{\mathrm{M}}\{(T_t P T_{-t+\tau} f, \psi)\} \\ &= (P_0 T_\tau f, \psi)\end{aligned}$$

(в предпоследнем равенстве использована инвариантность M относительно сдвигов). Ввиду произвольности f и ψ получаем, что $T_\tau P_0 = P_0 T_\tau$ при всех $\tau \in \mathbf{R}$.

Обозначим $g_\lambda = P_0 e_\lambda$, $\lambda \in [-\rho, \rho]$. Тогда для всех $x, \tau \in \mathbf{R}$

$$g_\lambda(x+\tau) = (T_\tau P_0 e_\lambda)(x) = (P_0 T_\tau e_\lambda)(x) = e^{i\lambda\tau} g_\lambda(x).$$

Подставляя $x = 0$, получаем

$$g_\lambda(\tau) = e^{i\lambda\tau} g_\lambda(0).$$

Поскольку P_0 — проектор на B_σ, то, значит, $P_0 e_\lambda = e_\lambda$ для $\lambda \in [-\sigma, \sigma]$, иначе $P_0 e_\lambda = 0$.

2) Докажем, что P_0 неограничен.

Выберем натуральное число n_0 так, чтобы $1 + 1/n_0 < \rho/\sigma$.

Введём $X = \mathrm{lin}\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$, $X = \mathrm{lin}\{e_k\}_{k=-n}^{n}$ с sup-нормой и $S_n : X \to X_n$ — операторы частных сумм. Известно, что операторы S_n неограниченны в совокупности.

Рассмотрим также $V_m^n : X \to X_{m+n}$ — суммы Валле Пуссена, $V_m^n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=m+1}^{m+n} S_k$, и $\sigma_n : X \to X$ — суммы Фейера, $\sigma_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} S_k$.

Известно, что $\sigma_n \to I$ по норме и ясно, что

$$V_m^n = \frac{m+n}{n}\sigma_{m+n} - \frac{m}{n}\sigma_m,$$

поэтому

$$V_{kn_0}^k = (n_0+1)\sigma_{k(n_0+1)} - n_0\sigma_{kn_0} \to I.$$

Введём $P_m^n = S_m\Big|_{X_{m+n}} : X_{m+n} \to X_m$, ясно, что $P_m^n V_m^n = S_m$.

Введём, наконец, операторы растяжения $U_n : X_n \to \operatorname{lin}\{e_\lambda\}_{|\lambda|<\rho} \subset B_\rho$, $(U_n f)(x) = f(\frac{\rho}{n}x)$. Это линейные изометрии.

Ясно, что для всех n и для всех $f \in X_{n(n_0+1)}$

$$P_0 U_{n(n_0+1)} f = U_{n(n_0+1)} P^n_{n(n_0+1)} f. \tag{2}$$

Поскольку $P_{nn_0}^n V_{nn_0}^n = S_{nn_0}$ для всех n и при этом нормы операторов $V_{nn_0}^n$, $n \in \mathbf{N}$, ограниченны в совокупности, в отличие от норм операторов S_{nn_0}, $n \in \mathbf{N}$, то нормы операторов $P_{nn_0}^n$ неограниченны в совокупности. Поэтому существуют функции h_n из $S(X_{n(n_0+1)})$, такие что нормы функций $P_{nn_0}^n h_n$ неограниченны.

Подставляя в (2) $f = h_n$ и беря норму от обеих частей, получаем

$$\|P_0 U_{n(n_0+1)} h_n\| = \|U_{n(n_0+1)} P^n_{n(n_0+1)} h_n\| = \|P^n_{n(n_0+1)} h_n\|.$$

По предположению в этом равенстве левая часть ограничена по n, а правая — по доказанному не ограничена. Полученное противоречие доказывает недополняемость B_σ в B_ρ.

Следствие 7.1. *B_σ недополняемо в $BC^0(\mathbf{R})$ и в $L_\infty(\mathbf{R})$, поскольку иначе ограничение проектора на B_ρ оказалось бы проектором из B_ρ на B_σ, что невозможно.*

8. Сопряжённое к B_σ^0 обладает свойством Шура

Напомним, что по определению банахово пространство X обладает свойством Данфорда–Петтиса, если из условий $x_n \xrightarrow{w} 0$ в X, $x_n^* \xrightarrow{w} 0$ в X^* следует, что $(x_n^*, x_n) \to 0$, и свойством Шура, если в нём совпадают слабая и сильная сходимости последовательностей. Свойство Шура очевидно сильнее.

Следуя терминологии [7, опр. III.D.29], подпространство X в $C(K)$ будем называть богатым, если существует вероятностная мера μ на K такая, что для любой ограниченной последовательности $\{x_n\}_1^\infty \subset X$ такой, что $\int_K |x_n(k)|d\mu(k) \to 0$, и для любой функции $\varphi \in C(K)$ следует $\operatorname{dist}(\varphi \cdot x_n, X) \to 0$.

Известно [7, теорема III.D.31], что богатое подпространство $C(K)$ обладает свойством Данфорда–Петтиса. Известно также [8], что пространство, которое сопряжено к пространству со свойством Данфорда–Петтиса, не содержащему ℓ_1, обладает свойством Шура.

В качестве $C(K)$, которое содержит B_σ^0, возьмём $C(\bar{\mathbf{R}})$, изометричное $C(\mathbf{T})$. Докажем, что B_σ^0 богато в $C(\bar{\mathbf{R}})$, тогда сопряжённое к B_σ^0 обладает свойством Шура (поскольку $(B_\sigma^0)^*$ сепарабельно, B_σ^0 не содержит ℓ_1).

Лемма 8.1. *Пусть $h \in C(\mathbf{R})\bigcap L_1(\mathbf{R})$, $h(x) > 0$, $x \in \mathbf{R}$. Тогда для любой ограниченной последовательности $\{f_n\}_1^\infty$ из B_σ следующие утверждения эквивалентны:*

а) $f_n \to 0$ поточечно;

б) $\int_{\mathbf{R}} |f_n(x)|h(x)dx \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из а) следует б) по теореме Лебега о мажорированной сходимости; докажем от противного, что из б) следует а).

Пусть $\exists\varepsilon_0 > 0$, $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, $\exists n_k \to \infty$: $\forall k \quad |f_{n_k}(x_0)| \geq \varepsilon_0$.

Обозначим $M = \sup\limits_n \|f_n\|$ и $\delta = \varepsilon_0/2\sigma M$, тогда по неравенству Бернштейна для $x \in \mathbf{R}$, $|x - x_0| \leq \delta$ и $k \in \mathbf{N}$ следует $|f_{n_k}(x)| \geq \varepsilon_0/2$. Значит,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f_{n_k}(x)|h(x)dx \geq \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f_{n_k}(x)|h(x)dx \geq \frac{\varepsilon_0}{2} \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h(x)dx \not\to 0,$$

что противоречит условию. Лемма доказана.

Лемма 8.2. *B_σ^0 богато в $C(\bar{\mathbf{R}})$, причём в качестве меры из определения богатого подпространства можно взять $hd\lambda$, где h удовлетворяет условию леммы 8.1.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{f_n\}_1^\infty \subset B_\sigma$ — ограниченная последовательность, $M = \sup\limits_n \|f_n\| < \infty$, $\int_{\mathbf{R}} |f_n(x)|h(x)dx \to 0$, $\varphi \in C(\bar{\mathbf{R}})$. Тогда по лемме 8.1 $f_n \to 0$ поточечно и, следовательно, равномерно на компактах. Это значит, что $\|(\varphi - \varphi(\infty)) \cdot f_n\| \to 0$. А поскольку $\mathrm{dist}(\varphi \cdot f_n, B_\sigma^0) = \mathrm{dist}((\varphi - \varphi(\infty)) \cdot f_n, B_\sigma^0) \leq \|(\varphi - \varphi(\infty)) \cdot f_n\|$, то лемма доказана.

Следствие 8.3. *Пространство $(B_\sigma^0)^*$ слабо секвенциально полно.*

9. Приложения

9.1. Примеры недополняемых пространств

Как известно [9, с. 105], пространство ℓ_∞ дополняемо в любом объемлющем банаховом пространстве. Поскольку B_σ недополняемо в $B_{2\sigma}$, получаем, что пространства B_σ и ℓ_∞ неизоморфны. Следовательно, B^0_σ неизоморфно c_0 (в противном случае $B_\sigma = (B^0_\sigma)^*$ и ℓ_∞ оказались бы изоморфны), аналогично ${}^*B_\sigma$ неизоморфно ℓ_1.

Поскольку дополняемые подпространства c_0 изоморфны c_0 [9, с. 54], то B^0_σ не может лежать в c_0 с дополнением. Кроме того, B^0_σ недополняемо в B^0_ρ при $\sigma < \rho$, так как иначе B_σ оказалось бы дополняемо в B_ρ (вторым сопряжённым проектором).

Рассмотрим оператор $T_\delta : B_\sigma \to \ell_\infty(\mathbf{Z})$,

$$(T_\delta f)_n = f(n\delta).$$

Как известно [10], при $0 < \delta < \pi/\sigma$ оператор T_δ является изоморфным вложением (для $0 < \delta < 2/\sigma$ это очевидно из неравенства Бернштейна). Понятно, что при таком вложении образ B_σ инвариантен относительно сдвигов в $\ell_\infty(\mathbf{Z})$, а образ B^0_σ лежит в $c_0(\mathbf{Z})$. Значит, $\{B^0_\sigma\}_{\pi/\delta>\sigma>0}$ даёт пример континуального семейства вложенных друг в друга без дополнения подпространств в $c_0(\mathbf{Z})$, инвариантных относительно сдвигов.

9.2. Об интерполяции в B_σ

Рассмотрим монотонную последовательность различных точек $\{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}} \subset \mathbf{R}$ и ограниченную последовательность $\{w_n\}_{n\in\mathbf{Z}} \subset \mathbf{C}$ и поставим интерполяционную задачу: найти функцию $w \in B_\sigma$ такую, что $w(x_n) = w_n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Вопрос условий существования и единственности решения такой задачи полностью решён в [10, с. 531–548]. Результаты п. 9.1 дают новое доказательство того, что не существует такой последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}} \subset \mathbf{R}$, чтобы для любой последовательности $\{w_n\}_{n\in\mathbf{Z}} \in \ell_\infty$ решение интерполяционной задачи существовало и было единственным, так как в противном случае B_σ оказалось бы изоморфно ℓ_∞, что не так. Аналогичный вывод можно сделать относительно интерполяционной задачи в B^0_σ ($\{w_n\}_{n\in\mathbf{Z}} \in c_0$), поскольку B^0_σ неизоморфно c_0.

Список литературы

[1] *С.Н. Бернштейн*, Собр. соч., том II. Изд-во АН СССР, Москва (1952).

[2] *Н.И. Ахиезер*, Лекции по теории аппроксимации. Наука, Москва (1965).

[3] *А.Ф. Тиман*, Теория приближения функций действительного переменного. Гос. изд-во физ.-мат. лит., Москва (1960).

[4] *А.И. Маркушевич*, Теория аналитических функций. Гос. изд-во техн.-теор. лит., Москва, Ленинград (1950).

[5] *Р.И. Петунин, А.Н. Пличко*, Теория характеристик подпространств и её приложения. Вища школа, Киев (1980).

[6] *Н. Данфорд, Дж. Шварц*, Линейные операторы. Общая теория. Изд-во иностр. лит., Москва (1962).

[7] *P. Wojtaszczyk*, Banach spaces for analysts. Cambridge University Press, Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sydney (1991).

[8] *P. Pethe and N. Thakare*, Note on Dunford–Pettis property and Schur property. — Indiana Univ. Math. J. (1978), v. 27, p. 91–92.

[9] *J. Lindenstrauss and L. Tzafriri*, Classical Banach spaces I. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1977).

[10] *Arne Beurling*, The Collected Works of Arne Beurling, v. 2. Birkhauser–Verlag, Basel (1989).

[11] *У. Рудин*, Функциональный анализ. Мир, Москва (1975).

Bernstein space B_σ as a Banach space

B.M. Shumiatskii

Bernstein space B_σ consists of all exponential type, less than or equal to σ, entire functions bounded on $\mathbf{R}$. B_σ equipped with a sup-norm is proved to be a non-separable Banach space non-isomorphic to ℓ_∞ but involving an isometric copy of ℓ_∞. B_σ is proved to be non-complemented in B_ρ, $\sigma < \rho$; B_σ is also proved to be isometric to a second dual of its subspace B_σ^0 consisting of functions tending to zero along $\mathbf{R}$. The coincidence of weak and norm convergence of sequences (Schur property) in the dual of B_σ^0 is proved.

Простір Бернштейна B_σ як банахів простір

Б.М. Шумяцький

Простір Бернштейна B_σ складається з усіх цілих функцій експоненційного типу не вище σ, які обмежено на $\mathbf{R}$. Доводиться, що B_σ, яке наділено супремум-нормою, — несепарабельний банахів простір, що містить ізометричну копію ℓ_∞, але не ізоморфний до ℓ_∞; що B_σ не має доповнення в B_ρ, $\sigma < \rho$; що B_σ ізометричний до другого спряженого до B_σ^0 — підпростору в B_σ, що складається з функцій, які прямують до нуля на $\mathbf{R}$; що на $(B_\sigma^0)^*$ співпадають слабка та сильна збіжності послідовностей (властивість Шура).