Математическая физика, анализ, геометрия
2000, т. 7, № 1, с. 91–114

Усреднение уравнений Максвелла на многообразиях сложной микроструктуры

Е.Я. Хруслов, А.П. Паль-Валь

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
Пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61164, Украина

E-mail: khruslov@ilt.kharkov.ua
apalval@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 5 июля 1999 года

Рассматривается задача Коши для однородной системы уравнений Максвелла на четырехмерных многообразиях $\tilde{M}_\varepsilon^4 = R_+^1 \times M_\varepsilon^3$, где M_ε^3 – римановы многообразия сложной микроструктуры. M_ε^3 состоят из нескольких экземпляров пространства R^3 с большим числом дырок, соединенных посредством тонких трубок. Зависимость от малого параметра $\varepsilon > 0$ такова, что число трубок неограниченно растет, а их толщина уменьшается при $\varepsilon \to 0$. Изучается асимптотическое поведение электромагнитного поля без зарядов и токов на $\tilde{M}_\varepsilon^4$ при $\varepsilon \to 0$. Получено, что плотность электрического заряда возникает в уравнениях Максвелла в результате усреднения.

Введение

Согласно концепции Дж. Уилера, электромагнитные поля могут существовать во Вселенной, свободной от электрических зарядов и токов. Моделью такой Вселенной могут служить многообразия с ручками. Потоки электрической компоненты поля через ручки интерпретируются как электрические заряды (картина Уилера) [1]. Отправляясь от этой идеи, в настоящей работе мы строим усреднение простейшей модели картины Уилера, когда число ручек неограниченно растет.

Мы рассматриваем задачу Коши для однородной системы уравнений Максвелла на четырехмерных многообразиях (локально изоморфных пространствам Минковского) вида $\tilde{M}_\varepsilon^4 = R_+^1 \times M_\varepsilon^3$, где M_ε^3 — многообразия сложной микроструктуры. А именно, M_ε^3 состоят из m ($m \geq 1$) экземпляров трехмерного эвклидова пространства R^3 с большим числом $N(\varepsilon)$ дырок

$B_{\varepsilon i}$, $(i = 1, \ldots, N(\varepsilon))$, соединенных попарно посредством тонких трубок. При этом зависимость от ε такова, что при $\varepsilon \to 0$ число трубок неограниченно растет, их диаметры уменьшаются, и распределяются они все плотнее в некоторой области $\Omega \subset R^3$. Метрика на M_ε^3 задается некоторым фиксированным метрическим тензором g_ε. Для простоты будем предполагать, что она совпадает со стандартной плоской эвклидовой метрикой R^3 всюду вне некоторых достаточно малых окрестностей трубок. Наша цель — изучить асимптотическое поведение электромагнитного поля без зарядов и токов при $\varepsilon \to 0$ и показать, что плотность электрического заряда возникает в уравнениях Максвелла в результате усреднения картины Уилера.

Задача Коши для системы уравнений Максвелла в вакууме (для простоты, мировые константы полагаем равными 1) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} E_\varepsilon(x,t) = *dH_\varepsilon(x,t); & \delta E_\varepsilon(x,t) = 0; \\ -\frac{\partial}{\partial t} H_\varepsilon(x,t) = *dE_\varepsilon(x,t); & \delta H_\varepsilon(x,t) = 0; \end{cases} \quad (x,t) \in M_\varepsilon^3 \times R_+^1, \tag{0.1}$$

$$E_{\varepsilon 0}(x) = E_\varepsilon(x,0); \quad H_{\varepsilon 0}(x) = H_\varepsilon(x,0); \qquad x \in M_\varepsilon^3,$$

$$\int\limits_{S_{\varepsilon i}^k} E_{\varepsilon 0} d\mathbf{S} = \Phi_{\varepsilon i}^k; \quad \int\limits_{S_{\varepsilon i}^k} H_{\varepsilon 0} d\mathbf{S} = 0; \qquad i = 1, \ldots, N(\varepsilon); \quad k = 1, \ldots, m, \tag{0.2}$$

где $E_\varepsilon(x,t), H_\varepsilon(x,t)$ — векторы напряженностей электрического и магнитного полей соответственно; $S_{\varepsilon i}^k = \partial B_{\varepsilon i}^k$ — границы дырок; d обозначает оператор внешнего дифференцирования на M_ε^3, δ — метрически сопряженный к нему оператор относительно метрики g_ε на M_ε^3, $*$ — оператор Ходжа на M_ε^3 (см. дополнения, п. 1). Таким образом, предполагаются заданными начальные электрическое $E_{\varepsilon 0}(x) = E_\varepsilon(x,0)$ и магнитное $\mathrm{H}_{\varepsilon 0}(x) = H_\varepsilon(x,0)$ поля, а также потоки начального электрического и начального магнитного полей через трубки. (Последнее условие требует точного описания, что будет сделано в п. 1.)

Изучается асимптотическое поведение решения $\{E_\varepsilon(x,t), H_\varepsilon(x,t)\}$ этой задачи при $\varepsilon \to 0$ и доказывается, что при некоторых условиях оно сходится к решению $\{E_k(x,t), H_k(x,t),\ k = 1, \ldots, m\}$ следующей задачи для неоднородной системы уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} E_k(x,t) = \mathrm{rot H_k(x,t)};\ \mathrm{div E_k(x,t)} = \rho_\mathrm{k}(\mathrm{x}); \\ -\frac{\partial}{\partial t} H_k(x,t) = \mathrm{rot E_k(x,t)};\ \mathrm{div H_k(x,t)} = 0; \end{cases} (x,t) \in R^3 \times R_+^1;\ k = 1, \ldots, m; \tag{0.3}$$

$$E_k(x,0) = E_{0k}(x); \quad H_k(x,0) = H_{0k}(x); \qquad x \in R^3;\ k = 1, \ldots, m, \tag{0.4}$$

где функции $\rho_k(x)$ (плотности электрического заряда) возникают в результате усреднения картины Уилера и выражаются в терминах потоков $\Phi^k_{\varepsilon i}$ начального электрического поля через трубки.

Переформулируем результат в терминах дифференциальных форм, как это принято в геометродинамике [1]. Рассмотрим 2-форму электромагнитного поля

$$F_\varepsilon(\tilde{x}) = \sum_{\alpha<\beta} \mathcal{F}^\varepsilon_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta = (E_{\varepsilon 1} dx^1 + E_{\varepsilon 2} dx^2 + E_{\varepsilon 3} dx^3) \wedge dx^0$$

$$+(*H_\varepsilon)_{23} dx^2 dx^3 + (*H_\varepsilon)_{31} dx^3 dx^1 + (*H_\varepsilon)_{12} dx^1 dx^2,$$

которая отвечает электромагнитному тензору, имеющему в пространстве Минковского стандартный вид

$$\mathcal{F}^\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 0 & E_{\varepsilon 1} & E_{\varepsilon 2} & E_{\varepsilon 3} \\ -E_{\varepsilon 1} & 0 & -H_{\varepsilon 3} & H_{\varepsilon 2} \\ -E_{\varepsilon 2} & H_{\varepsilon 3} & 0 & -H_{\varepsilon 1} \\ -E_{\varepsilon 3} & -H_{\varepsilon 2} & H_{\varepsilon 1} & 0 \end{vmatrix} = -\mathcal{F}^\varepsilon_{\beta\alpha}; \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3\,.$$

Тогда однородная система уравнений Максвелла на $\tilde{M}^4_\varepsilon$ имеет вид

$$\begin{cases} dF_\varepsilon(\tilde{x}) = 0; \\ d * F_\varepsilon(\tilde{x}) = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} dF_\varepsilon(\tilde{x}) = 0; \\ \delta F_\varepsilon(\tilde{x}) = 0; \end{cases} \quad \tilde{x} \in \tilde{M}^4_\varepsilon = R^1 \times M^3_\varepsilon, \tag{0.5}$$

а начальные условия перепишутся следующим образом:

$$F_\varepsilon(0, x) = F_{\varepsilon 0}(x), \qquad x \in M^3_\varepsilon;$$

$$\int\limits_{\hat{S}^k_{\varepsilon i}} *F_\varepsilon = \Phi^k_{\varepsilon i}; \quad \int\limits_{\hat{S}^k_{\varepsilon i}} F_\varepsilon = 0; \qquad i = 1, \dots, N(\varepsilon),\ k = 1, \dots, m. \tag{0.6}$$

Здесь мы обозначаем через d оператор внешнего дифференцирования на $\tilde{M}^4_\varepsilon$; δ — метрически сопряженный к нему оператор относительно псевдоримановой метрики $ds^2 = (dx^0)^2 - \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{3} g_{\varepsilon\alpha\beta}(x) dx^\alpha \wedge dx^\beta$ (как обычно, x^0 обозначает временную переменную, x^α, $\alpha = 1, 2, 3$ — пространственные переменные), $g_{\varepsilon 0}(x) > 0$, $g_{\varepsilon\alpha\beta}(x)$ — компоненты метрического тензора на M^3_ε; $*$ — оператор Ходжа на $\tilde{M}^4_\varepsilon$ (см. дополнения, п. 1). Условие (0.6) означает, что предполагаются заданными периоды 2-форм $F_\varepsilon(x)$, $*F_\varepsilon(x)$ по циклам $\hat{S}^k_{\varepsilon i} = S^k_{\varepsilon i} \times \{0\} \subset M^3_\varepsilon \times R^1_+$, образующим базис двумерных гомологий на $\tilde{M}^4_\varepsilon$(см. дополнения, п. 2).

Усредненная задача Коши (0.3)–(0.4) в терминах электромагнитных 2-форм будет иметь вид

$$\begin{cases} dF_k(\tilde{x}) = 0; \\ d * F_k(\tilde{x}) = \rho_k(x)dx; \end{cases} \quad \tilde{x} \in R^1 \times R^3, \ k = 1, \ldots, m, \tag{0.7}$$

$$F_k(0, x) = F_{0k}(x); \qquad x \in R^3, \tag{0.8}$$

где функция пространственных переменных $\rho_k(x)$ (плотность электрического заряда) выражается в терминах заданных периодов $\Phi^k_{\varepsilon i}$ 2-формы $*F_\varepsilon(x)$; $dx = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ — элемент объема по пространственным переменным. В эквивалентности поставленных задач (0.1)–(0.2) и (0.5)–(0.6) а также усредненных систем (0.3)–(0.4) и (0.7)–(0.8) несложно убедиться.

Отметим, что в [2] аналогичный результат был получен для электростатических полей, что соответствует изучению гармонических 1-форм на римановых многообразиях M^3_ε. Мы рассматриваем нестационарную задачу для уравнений Максвелла (0.1)–(0.2), которая фактически является изучением гармонических 2-форм на четырехмерных многообразиях. Результаты, полученые в [2], будут использоваться нами при доказательстве.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата

Как уже было отмеченно, в качестве пространства-времени будут рассмотрены четырехмерные многообразия вида $\tilde{M}^4_\varepsilon = R^1_+ \times M^3_\varepsilon$. Поэтому прежде всего необходимо четко определить многообразия M^3_ε. Пусть Ω — фиксированная ограниченная область в пространстве R^3 и $\{B_{\varepsilon i}, i = 1, \ldots, N(\varepsilon)\}$ — семейство замкнутых попарно несвязных шаров в Ω, зависящих от малого параметра $\varepsilon > 0$. Мы предполагаем, что общее число $N(\varepsilon)$ шаров стремится к бесконечности, их диаметры стремятся к нулю, когда $\varepsilon \to 0$, и что для любого достаточно малого ε любая открытая подобласть $G \subset \Omega$ содержит несколько шаров.

Рассмотрим бесконечную область

$$\Omega_\varepsilon = R^3 \setminus \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} B_{\varepsilon i}$$

и несвязное объединение m экземпляров (листов) $\Omega_\varepsilon : \tilde{\Omega}_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \times \{1, \ldots, m\}$.

Построим новое многообразие M^3_ε, склеивая границы трехмерных трубок с границами дырок на $\tilde{\Omega}_\varepsilon$. Точнее, M^3_ε определяется следующими данными:

- для любого $\varepsilon > 0$ число $mN(\varepsilon)$ — четное и задано разбиение множества всех пар $\{(i, k) : i = 1, \ldots, N(\varepsilon), \ k = 1, \ldots, m\}$ на двухэлементные подмножества $[(i, k), (j, l)]$-связанных пар;

- для каждой связанной пары $[(i,k),(j,l)]$ пусть $T^{kl}_{\varepsilon ij} = S^2 \times [0,1]$ — сферическая трехмерная трубка (S^2 — единичная 2-сфера). Граница $\partial T^{kl}_{\varepsilon ij}$ такой трубы состоит из двух компонент

$$\partial T^{kl}_{\varepsilon ij} = \Gamma^k_{\varepsilon i} \bigcup \Gamma^l_{\varepsilon j};$$

- для любых (i,k) задан диффеоморфизм

$$h^k_{\varepsilon i} : \Gamma^k_{\varepsilon i} \leftrightarrow \partial B^k_{\varepsilon i},$$

  где $\partial B^k_{\varepsilon i}$ — компонента границы $\partial\Omega^k_\varepsilon$ на k-м листе $\Omega^k_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \times k$.

Многообразие M^3_ε есть объединение листов Ω^k_ε $(k = 1, \dots, m)$ и трубок $T^{kl}_{\varepsilon ij}$, граничные точки которых идентифицируются согласно диффеоморфизмам $h^k_{\varepsilon i}$:

$$M^3_\varepsilon = \left(\bigcup_{k=1}^m \Omega^k_\varepsilon\right) \bigcup \left(\bigcup_{[(i,k),(j,l)]} T^{kl}_{\varepsilon ij}\right).$$

M^3_ε предполагается также ориентированным.

Мы вводим на M^3_ε дифференцируемую структуру, индуцирующую каноническую структуру дифференцируемого многообразия с границей на каждом листе Ω^k_ε и каждой трубке $T^{kl}_{\varepsilon ij}$. Обозначим через x точки M^3_ε и, при небходимости, $x^\alpha (\alpha = 1,2,3)$ — координаты в некоторой локальной координатной карте.

Наконец, на M^3_ε задана риманова метрика положительно определенным гладким метрическим тензором $\{g^\varepsilon_{\alpha\beta}(x);\ \alpha,\beta = 1,2,3\}$, индуцирующая стандартную плоскую метрику пространства R^3 вне некоторых достаточно малых окрестностей трубок на M^3_ε. Для простоты будем считать, что она индуцирует такую плоскую метрику на каждом листе Ω^k_ε.

Сформулируем теперь предположения о размерах и взаимном распределении дырок на M^3_ε. Пусть $x_{\varepsilon i}$ — центр шара $B_{\varepsilon i}$. Обозначим через $a_{\varepsilon i}$ его радиус и $r_{\varepsilon i}$ — расстояние от $x_{\varepsilon i}$ до объединения центров остальных шаров:

$$B_{\varepsilon i} = \{x \in R^3 : \mathrm{dist}(x, x_{\varepsilon i}) \le a_{\varepsilon i}\}, \quad i = 1, \dots, N(\varepsilon);$$

$$r_{\varepsilon i} = \min_{i \ne j} dist(x_{\varepsilon i}, x_{\varepsilon j}).$$

Предположим, что $a_{\varepsilon i} \to 0$, $r_{\varepsilon i} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, так что

(i) $$a_{\varepsilon i} = o(\varepsilon); \quad r_{\varepsilon i} = O(\varepsilon^{1/3}) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

где C не зависит от ε.

Определим следующие пространства:

$L_2(M_\varepsilon^3)^3$ — гильбертово пространство локально интегрируемых с квадратом векторных полей на M_ε^3 с нормой, отвечающей метрике M_ε^3:

$$||u||_\varepsilon = \left(\int\limits_{M_\varepsilon^3} \sum_{\alpha=1}^3 (u_\varepsilon^\alpha)^2 \sqrt{|g_\varepsilon|} dx \right)^{1/2};$$

$L_2(R^3)^{3m}$ — гильбертово пространство локально интегрируемых с квадратом m-мерных систем векторных полей на R^3 с нормой

$$||u|| = \left(\sum_{k=1}^m \int\limits_{R^3} \sum_{\alpha=1}^3 (u_k^\alpha)^2 dx \right)^{1/2};$$

$L_2^{0\varepsilon}(R^3)^{3m}$ — подпространство $L_2(R^3)^{3m}$ равных нулю на $B_{\varepsilon i}^k$ $(i = \overline{1, N(\varepsilon)}, k = \overline{1, m})$ m-мерных систем векторных полей.

Пусть $P_\varepsilon : L_2(R^3)^{3m} \to L_2^{0\varepsilon}(R^3)^{3m}$ — оператор ортогонального проектирования на $L_2^{0\varepsilon}(R^3)^{3m}$; $Q_\varepsilon : L_2(M_\varepsilon^3)^3 \to L_2^{0\varepsilon}(R^3)^{3m}$ — оператор срезки

$$\Big[Q_{\varepsilon k} u_\varepsilon \Big](x) = \begin{cases} u_\varepsilon(x), & x \times \{k\} \in \ \Omega_\varepsilon^k; \\ 0, & x \in \ \bigcup_i B_{\varepsilon i}^k; \end{cases} \quad k = 1, \ldots, m. \tag{1.1}$$

Будем говорить, что $u_\varepsilon(x) \in L_2(M_\varepsilon^3)^3$ сходится к $u(x) = \{u_k(x) \in L_2(R^3)^3,\ k = 1, \ldots, m\} \in L_2(R^3)^{3m}$, если

$$\lim_{\varepsilon \to 0} ||Q_\varepsilon u_\varepsilon - P_\varepsilon u|| = 0. \tag{1.2}$$

Далее, $u_\varepsilon(x, t) \in L_2(M_\varepsilon^3 \times (0, T))^3$ сходится к $u(x, t) = \{u_k(x, t) \in L_2(R^3 \times (0, T))^3,\ k = 1, \ldots, m\} \in L_2(R^3 \times (0, T))^{3m}$, если

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^T ||Q_\varepsilon u_\varepsilon(\cdot, t) - P_\varepsilon u(\cdot, t)||^2 dt = 0. \tag{1.3}$$

Что касается начальных условий, то, во-первых, начальное электрическое поле будет предполагаться безвихревым в трубках, т.е.

$$(j) \qquad dE_{\varepsilon 0}(x) = 0, \quad x \in T_{\varepsilon ij}^{kl}, \ \ i = 1, \ldots, N(\varepsilon),\ k = 1, \ldots, m.$$

Кроме того, предположим, что для любого k существуют слабые пределы в $L_2(R^3)^3$:

$$(jj) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} Q_{\varepsilon k} E_{\varepsilon 0} = E_{0k}; \quad \lim_{\varepsilon \to 0} Q_{\varepsilon k} H_{\varepsilon 0} = H_{0k}; \qquad k = 1, \ldots, m.$$

По заданным (0.2) числам $\Phi^k_{\varepsilon i}$ построим распределения на R^3:

$$\Phi_{\varepsilon k}(x) = \sum_i \Phi^k_{\varepsilon i}\delta(x - x_{\varepsilon i}), \quad x \in R^3,\ k = 1, \dots, m,$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака на R^3. Будем предполагать слабую сходимость этих распределений в $\mathcal{D}'(R^3)$:

$$(jjj) \qquad w - \lim_{\varepsilon \to 0} \Phi_{\varepsilon k}(x) = \Phi_k(x), \quad k = 1, \dots, m,$$

и выполнение следующего неравенства:

$$(jv) \qquad \sum_{i,k} a^{-1}_{\varepsilon i} |\Phi^k_{\varepsilon i}|^2 < C,$$

где константа C не зависит от ε. Благодаря условиям (i), (jv), $\Phi_k(x)$, $k = \overline{1,m}$, будут функциями из $L_2(R^3)$.

Существует единственное решение задачи (0.1)–(0.2) в классе $L_2(M_\varepsilon)^3$.

Основной результат работы содержит следующая

Теорема 1.1. *Предположим, что условия (i), (j)–(jv) выполняются при $\varepsilon \to 0$. Тогда решение $\{E_\varepsilon(x,t), H_\varepsilon(x,t)\}$ задачи Коши для однородной системы уравнений Максвелла (0.1)–(0.2) сходится в смысле (1.3) к решению $\{E_k(x,t), H_k(x,t)\}$ задачи (0.3)–(0.4).*

Доказательство теоремы 1.1 будем проводить следующим образом. Вначале представим систему уравнений Максвелла в вакууме (0.1) в виде системы гиперболических уравнений для $E_\varepsilon(x,t)$ и $H_\varepsilon(x,t)$ в отдельности. Затем, с помощью преобразования Лапласа, перейдем к соответствующей системе эллиптических уравнений с параметром [3] и будем исследовать ее асимптотическое поведение при $\varepsilon \to 0$ вариационными методами. В пункте 3 доказательство теоремы 1.1 будет завершено.

2. Стационарная задача

Система уравнений Максвелла в вакууме (0.1) легко может быть сведена к следующей системе гиперболических уравнений для электрического и магнитного полей в отдельности:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_\varepsilon(x,t) - \delta d E_\varepsilon(x,t) = 0; \quad \delta E_\varepsilon(x,t) = 0; \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} H_\varepsilon(x,t) - \delta d H_\varepsilon(x,t) = 0; \quad \delta H_\varepsilon(x,t) = 0; \end{cases} \quad (x,t) \in M^3_\varepsilon \times R^1_+. \tag{2.1}$$

Рассмотрим задачу Коши для системы уравнений (2.1) с начальными условиями

$$E_\varepsilon(x,0) = E_{\varepsilon 0}(x); \qquad H_\varepsilon(x,0) = H_{\varepsilon 0}(x);$$

$$\int\limits_{S^k_{\varepsilon i}} E_{\varepsilon 0} d\mathbf{S} = \Phi^k_{\varepsilon i}; \quad \int\limits_{S^k_{\varepsilon i}} H_{\varepsilon 0} d\mathbf{S} = 0; \qquad i = \overline{1, N(\varepsilon)},\ k = \overline{1, m}, \tag{2.2}$$

эквивалентную задаче (0.1)–(0.2). Тогда наша цель — показать, что при $\varepsilon \to 0$ решение $\{E_\varepsilon(x,t), H_\varepsilon(x,t)\}$ задачи (2.1)–(2.2) сходится в смысле (1.3) к решению $\{E(x,t), H(x,t)\} = \{E_k(x,t), H_k(x,t), k = \overline{1,m}\}$ следующей задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_k(x,t) - \Delta E_k(x,t) = 0; \quad \mathrm{div} E_k(x,t) = \rho_k(x); \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} H_k(x,t) - \Delta H_k(x,t) = 0; \quad \mathrm{div} H_k(x,t) = 0; \end{cases} \quad (x,t) \in R^3 \times R^1_+; \tag{2.3}$$

$$E_k(x,0) = E_{0k}(x); \quad H_k(x,0) = H_{0k}(x); \qquad x \in R^3, \tag{2.4}$$

где $E_{0k}(x), H_{0k}(x)$ определены условием (jj).

Вводя в рассмотрение преобразования Лапласа полей электрической и магнитной напряженности

$$\hat{E}_\varepsilon(x,\lambda) = \int\limits_0^\infty E_\varepsilon(x,t) e^{-\lambda t} dt; \qquad \hat{H}_\varepsilon(x,\lambda) = \int\limits_0^\infty H_\varepsilon(x,t) e^{-\lambda t} dt,$$

перейдем к следующей системе эллиптических уравнений на M^3_ε с параметром $\lambda > 0$:

$$-\delta d\hat{E}_\varepsilon(x,\lambda) + \lambda^2 \hat{E}_\varepsilon(x,\lambda) = \lambda E_{\varepsilon 0}(x) + *dH_{\varepsilon 0}(x); \quad \delta \hat{E}_\varepsilon(x,\lambda) = 0; \tag{2.5}$$

$$-\delta d\hat{H}_\varepsilon(x,\lambda) + \lambda^2 \hat{H}_\varepsilon(x,\lambda) = \lambda H_{\varepsilon 0}(x) - *dE_{\varepsilon 0}(x); \quad \delta \hat{H}_\varepsilon(x,\lambda) = 0. \tag{2.6}$$

Настоящий пункт работы посвящен изучению асимптотического поведения решения $\{\hat{E}_\varepsilon(x,\lambda),\ \hat{H}_\varepsilon(x,\lambda)\}$ системы (2.5), (2.6) при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 2.1. *Предположим, условия (i), (j)–(jv) выполнены при $\varepsilon \to 0$. Тогда решение $\{\hat{E}_\varepsilon(x,\lambda),\ \hat{H}_\varepsilon(x,\lambda)\}$ системы (2.5), (2.6) сходится в смысле (1.2) к решению $\{\hat{E}_k(x,\lambda),\ \hat{H}_k(x,\lambda),\ k = 1,\dots,m\}$ следующей системы уравнений:*

$$-\Delta \hat{E}_k(x,\lambda) + \lambda^2 \hat{E}_k(x,\lambda) = \lambda E_{0k}(x) + \mathrm{rot H_{0k}(x)}; \quad \mathrm{div\hat{E}_k(x,\lambda)} = \lambda^{-1} \Phi_{\mathrm{k}}(\mathrm{x}); \tag{2.7}$$

$$-\Delta \hat{H}_k(x,\lambda) + \lambda^2 \hat{H}_k(x,\lambda) = \lambda H_{0k}(x) - \mathrm{rot E_{0k}(x)}; \quad \mathrm{div\hat{H}_k(x,\lambda)} = 0, \tag{2.8}$$

где $x \in R^3,\ \lambda > 0$.

Будем исследовать асимптотическое поведение решений $\hat{E}_\varepsilon(x,\lambda)$ уравнений (2.5) и $\hat{H}_\varepsilon(x,\lambda)$ системы (2.6) по отдельности. При этом изучение $\hat{E}_\varepsilon(x,\lambda)$ проведем в два этапа. Вначале, отделив гармоническую компоненту поля

$\hat{E}_\varepsilon(x,\lambda)$, перейдем к некоторой вспомогательной задаче и исследуем ее асимптотическое поведение при $\varepsilon \to 0$ вариационными методами. Затем получим полное асимптотическое описание $\hat{E}_\varepsilon(x,\lambda)$ с учетом заданных потоков начального поля $E_{\varepsilon 0}$. Что касается $\hat{H}_\varepsilon(x,\lambda)$, его изучение прямо сводится к исследованию соответствующих вариационных задач, так как гармоническая компонента магнитного поля отсутствует.

Прежде всего найдем подходящее представление для $\hat{E}_\varepsilon(x,\lambda)$. По теореме Кодаиры справедливо следующее ортогональное разложение пространства векторных полей [4]:

$$L_2(M_\varepsilon^3)^3 = \mathcal{R}(M_\varepsilon^3) \oplus \mathcal{J}(M_\varepsilon^3) \oplus \mathcal{H}(M_\varepsilon^3),$$

где $\mathcal{R}(M_\varepsilon^3)$, $\mathcal{J}(M_\varepsilon^3)$ и $\mathcal{H}(M_\varepsilon^3)$ — пространства безвихревых, соленоидальных и гармонических полей на M_ε^3 соответственно (см. дополнение, п. 1). Второе уравнение из (2.5) исключает возможность существования ненулевого безвихревого поля в разложении $\hat{E}_\varepsilon(x,\lambda)$. Будем искать решение (2.5) в виде

$$\hat{E}_\varepsilon(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda} G_{\varepsilon 0}(x) + \tilde{E}_\varepsilon(x,\lambda), \tag{2.9}$$

где $G_{\varepsilon 0}(x) = P_{\mathcal{H}} E_{\varepsilon 0}(x) \in \mathcal{H}(M_\varepsilon^3)$, $\tilde{E}_\varepsilon(x,\lambda) \in \mathcal{J}(M_\varepsilon^3)$, $P_{\mathcal{H}}$ обозначает проекцию на пространство гармонических полей $\mathcal{H}(M_\varepsilon^3)$. Подставляя это представление в (2.5), имеем

$$\begin{cases} -\delta d\tilde{E}_\varepsilon(x,\lambda) + \lambda^2 \tilde{E}_\varepsilon(x,\lambda) = \lambda(E_{\varepsilon 0}(x) - G_{\varepsilon 0}(x)) + *dH_{\varepsilon 0}(x); \\ \delta \tilde{E}_\varepsilon(x,\lambda) = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Легко показать, что решение $\tilde{E}_\varepsilon(x,\lambda)$ (2.10) минимизирует функционал

$$\Psi_\varepsilon[\tilde{E}_\varepsilon] = (d\tilde{E}_\varepsilon, d\tilde{E}_\varepsilon)_\varepsilon + \lambda^2 (\tilde{E}_\varepsilon, \tilde{E}_\varepsilon)_\varepsilon - 2(j_\varepsilon, \tilde{E}_\varepsilon)_\varepsilon, \tag{2.11}$$

где

$$j_\varepsilon(x,\lambda) = \lambda(E_{\varepsilon 0}(x) - G_{\varepsilon 0}(x)) + *dH_{\varepsilon 0}(x) \in \mathcal{J}(M_\varepsilon^3)$$

в классе соленоидальных векторных полей из $\mathcal{J}(M_\varepsilon^3)$. Однако мы вправе исследовать задачу минимизации (2.11) в $L_2(M_\varepsilon^3)^3$, так как при этом минимум $\Psi_\varepsilon[\tilde{E}_\varepsilon]$ достигается на том же элементе, что и в $\mathcal{J}(M_\varepsilon^3)$.

Докажем, что если $\tilde{E}_\varepsilon(x,\lambda)$ — решение минимизационной задачи (2.11), то $Q_\varepsilon \tilde{E}_\varepsilon(x,\lambda)$ сходится слабо в $L_2(R^3)^{3m}$ к решению $\tilde{E} = \{\tilde{E}_k \in L_2(R^3)^3,\ k = 1,\dots,m\}$ задачи минимизации фукционала

$$\Psi[\tilde{E}] = (\mathrm{rot}\tilde{E}, \mathrm{rot}\tilde{E}) + \lambda^2(\tilde{E},\tilde{E}) - 2(j,\tilde{E}) \tag{2.12}$$

в классе m-мерных систем соленоидальных векторных полей из $L_2(R^3)^{3m}$ ($j(x,\lambda) = \{j_k(x,\lambda), k = 1,\dots,m\}$ будет описана в процессе доказательства).

Для начала опишем абстрактную схему исследования минимизационных задач (2.11), (2.12).

Пусть H_ε — гильбертово пространство, зависящее от параметра $\varepsilon > 0$, со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{H_\varepsilon}$ и нормой $||\cdot||_{H_\varepsilon}$; F_ε — линейный непрерывный функционал на H_ε, равномерно ограниченный по ε. Пусть H — другое гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_H$ и нормой $||\cdot||_H$; F — линейный непрерывный функционал на H.

Пусть u_ε and u — решения следующих минимизационных задач:

$$\inf_{u_\varepsilon\in H_\varepsilon}\left\{||u_\varepsilon||^2_{H_\varepsilon} + F_\varepsilon[u_\varepsilon]\right\}, \tag{2.13}$$

$$\inf_{u\in H}\left\{||u||^2_H + F[u]\right\} \tag{2.14}$$

соответственно. Нас интересует, при каких условиях и в каком смысле u_ε сходится к u.

Теорема 2.2. *Предположим, что заданы плотное подмножество $M\subset H$ и для любого $\varepsilon>0$ линейные операторы $\Pi_\varepsilon : H_\varepsilon \to H$, $P_\varepsilon : M\to H_\varepsilon$, удовлетворяющие условиям (a)–(c):*

(a) *для любого* $u_\varepsilon\in H_\varepsilon$ $\quad ||\Pi_\varepsilon u_\varepsilon||_H \le C||u_\varepsilon||_{H_\varepsilon}$;

для любого $u\in M$

(b_1) $\Pi_\varepsilon P_\varepsilon u \to u$ *слабо в* H *при* $\varepsilon\to 0$;

(b_2)
$$\lim_{\varepsilon\to 0}||P_\varepsilon u||^2_{H_\varepsilon} = ||u||^2_H;$$

для любого $u\in M$ и любого $v_\varepsilon\in H_\varepsilon$ такого, что $\Pi_\varepsilon v_\varepsilon \to v$ слабо в H при $\varepsilon\to 0$

(b_3)
$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}|(P_\varepsilon u, v_\varepsilon)_\varepsilon| \le C\ ||u||_H\ ||v||_H;$$

(c)
$$\lim_{\varepsilon\to 0}F_\varepsilon[v_\varepsilon] = F[v].$$

Тогда решение u_ε минимизационной задачи (2.13) сходится к решению u минимизационной задачи (2.14) в следующем смысле:

$$\Pi_\varepsilon u_\varepsilon \to u \quad \text{слабо в } H,\ \varepsilon\to 0.$$

Эта теорема была доказана в [5]. Применим ее для случая гильбертова пространства $H_\varepsilon = \hat{H}^1(M^3_\varepsilon)$ локально интегрируемых с квадратом вместе со своими производными соленоидальных полей на M_ε^3 со скалярным произведением

$$(u_\varepsilon, v_\varepsilon)_{H_\varepsilon} = (du_\varepsilon, dv_\varepsilon)_\varepsilon + \lambda^2 (u_\varepsilon, v_\varepsilon)_\varepsilon, \quad u_\varepsilon, v_\varepsilon \in \hat{H}^1(M_\varepsilon^3).$$

Гильбертово пространство $H = \hat{H}(R^3, \mathrm{rot})$ определим как пространство систем соленоидальных полей, квадратично суммируемых вместе с роторами на R^3: $H = \hat{H}(R^3, \mathrm{rot}) = \{u_k(x) \in L_2(R^3)^3 : \mathrm{rot} u_k(x) \in L_2(R^3)^3, \mathrm{div} u_k(x) = 0,\ k = \overline{1,m}\}$. Мы оснащаем его скалярным произведением

$$(u, v)_H = (\mathrm{rot} u, \mathrm{rot} v) + \lambda^2 (u, v); \quad u, v \in \hat{H}(R^3, \mathrm{rot}).$$

Линейные функционалы F_ε в $\hat{H}^1(M_\varepsilon^3)$ и F в $\hat{H}(R^3, \mathrm{rot})$ определяются формулами

$$F_\varepsilon[u_\varepsilon] = -2 \int\limits_{M_\varepsilon^3} j_\varepsilon(x) \cdot u_\varepsilon(x) dx, \qquad u_\varepsilon \in \hat{H}^1(M_\varepsilon^3); \tag{2.15}$$

$$F[u] = -2 \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{R^3} j_k(x) \cdot u_k(x)\, dx, \qquad u \in \hat{H}(R^3, \mathrm{rot}), \tag{2.16}$$

где $\cdot$ обозначает стандартное скалярное произведение векторов. Тогда минимизационные задачи (2.11), (2.12) могут быть переформулированы как (2.13), (2.14) соответственно. Чтобы применить теорему 2.2, мы должны определить операторы Π_ε, P_ε.

Оператор $\Pi_\varepsilon : H_\varepsilon \to H$ будем искать в виде

$$\Pi_\varepsilon = \hat{\Pi}_\varepsilon Q_\varepsilon = \{\hat{\Pi}_{\varepsilon k} Q_{\varepsilon k},\ k = \overline{1,m}\},$$

где $Q_\varepsilon : \hat{H}^1(M_\varepsilon^3) \to \hat{H}^1_{0\varepsilon}(R^3)$ — оператор срезки на дырки $B^k_{\varepsilon i} (i = \overline{1, N(\varepsilon)}, k = \overline{1,m})$, $\hat{\Pi}_\varepsilon : \hat{H}^1_{0\varepsilon}(R^3) \to \hat{H}(R^3, \mathrm{rot})$ — оператор продолжения на них ($\hat{H}^1_{0\varepsilon}(R^3)$ — подпространство $\hat{H}(R^3, \mathrm{rot})$ равных нулю на $B_{\varepsilon i}$, $i = \overline{1, N(\varepsilon)}$, систем векторных полей). Пусть $u_\varepsilon(x) \in H_\varepsilon$, обозначим $v_\varepsilon(x) := Q_\varepsilon u_\varepsilon(x)$. Наша задача — построить продолжение $\tilde{v}_\varepsilon(x) := \hat{\Pi}_\varepsilon v_\varepsilon(x)$ на шары $B^k_{\varepsilon i}$ $(i = \overline{1, N(\varepsilon)}, k = \overline{1,m})$ так, чтобы выполнялось условие (a) теоремы 2.2.

Проведем рассуждения для некоторого фиксированного шара $B_{\varepsilon i}$, $i \in \{1, \ldots, N(\varepsilon)\}$, для простоты считая его центром начало координат:

$$B_{\varepsilon i} = \{x \in R^3 : \mathrm{dist}(x, 0) \le a_{\varepsilon i}\}.$$

(Верхний индекс, отвечающий номеру листа, будем опускать для упрощения записи.) В области

$$R_{\varepsilon i} = \{x \in R^3 : a_{\varepsilon i} \le \mathrm{dist}(x, 0) \le 2a_{\varepsilon i}\}$$

справедливо следующее ортогональное разложение [6]:

$$v_\varepsilon(x) = v_{1\varepsilon}(x) + v_{2\varepsilon}(x), \quad x \in R_{\varepsilon i}\,,$$

где $v_{1\varepsilon}(x) = \mathrm{grad}\varphi_\varepsilon(x)$, $v_{2\varepsilon}(x)$ — соленоидальная в $R_{\varepsilon i}$ вектор-функция, нормальная составляющая на границе $\partial R_{\varepsilon i}$ которой равна нулю. Будем продолжать вектор-функцию $v_\varepsilon(x)$ со слоя $R_{\varepsilon i}$ на шар $B_{\varepsilon i}$ покомпонентно.

Начнем с продолжения $v_{2\varepsilon}(x)$. Наряду с $B_{\varepsilon i}$, рассмотрим шар $B^2_{\varepsilon i} = B_{\varepsilon i} \cup R_{\varepsilon i}$ вдвое большего радиуса и растянем его в $a_{\varepsilon i}^{-1}$ раз. Получим шар радиуса постоянного радиуса: $B^2 = \{\xi \in R^3 : \mathrm{dist}(\xi, 0) \le 2\}$. В области $R = \{\xi \in R^3 : 1 \le \mathrm{dist}(\xi, 0) \le 2\}$ рассмотрим функцию

$$v(\xi) = v_{2\varepsilon}(a_{\varepsilon i}\xi), \quad \xi \in R,$$

и построим ее продолжение на $B = B^2 \setminus R = \{\xi \in R^3 : \mathrm{dist}(\xi, 0) \le 1\}$ следующим образом:

$$\tilde{v}(\xi) = \tilde{w}(\xi) + \overline{v},$$

где $\overline{v}$ — среднее значение $v(\xi)$ на слое R, $\tilde{w}(\xi)$ — некоторое продолжение $v(\xi) - \overline{v}$ на шар B, удовлетворяющее условию $||\tilde{w}||_{H(B^2)} \le C||w||_{H_\varepsilon(R)}$. (Здесь и далее константы предполагаются не зависящими от ε.) Тогда

$$\int\limits_{B^2} \tilde{v}^2 d\xi \le C_1 \left(\int\limits_{B^2} \tilde{w}^2 d\xi + \int\limits_R v^2 d\xi \right) \le C_2 ||\tilde{w}||^2_{H(B^2)} + C_1 \int\limits_R v^2 d\xi$$

$$\le C_3 ||w||^2_{H_\varepsilon(R)} + C_1 \int\limits_R v^2 d\xi \le C_4 \left(\int\limits_R (dv)^2 + \int\limits_R v^2 \right)$$

и

$$\int\limits_{B^2} (\mathrm{rot}\tilde{v})^2 d\xi = \int\limits_{B^2} (\mathrm{rot}\tilde{w})^2 d\xi \le C_1 ||\tilde{w}||^2_{H(B^2)} \le C_2 ||w||^2_{H_\varepsilon(R)}.$$

Кроме того, известно [6], что соленоидальная вектор-функция $w(\xi)$ в области R удовлетворяет оценке $||w||_{L_2(R)^3} \le C||\mathrm{rot} w||_{L_2(R)^3}$. Следовательно,

$$||w||^2_{H_\varepsilon(R)} = ||dw||^2_{L_2(R)^3} + ||w||^2_{L_2(R)^3} \le C_1 ||dw||^2_{L_2(R)^3} = C_1 \int\limits_R (dv)^2.$$

Тогда $\tilde{v}_{2\varepsilon}(x) = \tilde{v}\left(x a_{\varepsilon i}^{-1}\right)$ — продолжение вектор-функции $v_{2\varepsilon}(x)$ на шар $B_{\varepsilon i}$, для которого ввиду соотношений

$$\int\limits_R v^2 d\xi = a_{\varepsilon i}^{-3} \int\limits_{R_{\varepsilon i}} v_{\varepsilon i}^2 dx;$$

$$\int\limits_{R}(dv)^2 d\xi = a_{\varepsilon i}^{-1}\int\limits_{R_{\varepsilon i}}(dv_{\varepsilon i})^2 dx$$

справедливы следующие неравенства:

$$\int\limits_{B_{\varepsilon i}^2}(\tilde{v}_{2\varepsilon})^2 dx \le Ca_{\varepsilon i}^2\int\limits_{R_{\varepsilon i}}(dv_{2\varepsilon})^2 dx + C\int\limits_{R_{\varepsilon i}} v_{2\varepsilon}^2 dx;$$

$$\int\limits_{B_{\varepsilon i}^2}(\mathrm{rot}\tilde{v}_{2\varepsilon})^2 dx \le C\int\limits_{R_{\varepsilon i}}(dv_{2\varepsilon})^2 dx.$$

Учитывая (i), заключаем, что построенное продолжение $\tilde{v}_{2\varepsilon}(x) = \hat{\Pi}_\varepsilon v_{2\varepsilon}(x)$ удовлетворяет оценке

$$||\tilde{v}_{2\varepsilon}||_{H(B_{\varepsilon i}^2)} \le C||v_{2\varepsilon}||_{H_\varepsilon(R_{\varepsilon i})},$$

что и требовалось.

В силу представления $v_{1\varepsilon}(x) = \mathrm{grad}\varphi_\varepsilon(x)$ необходимо, чтобы для продолжения $\tilde{v}_{1\varepsilon}(x) = \hat{\Pi}_\varepsilon v_{1\varepsilon}(x)$ выполнялось следующее неравенство:

$$\int\limits_{B_{\varepsilon i}^2}(\tilde{v}_{1\varepsilon})^2 dx \le C\int\limits_{R_{\varepsilon i}} v_{1\varepsilon}^2 dx.$$

Рассмотрим функцию $\varphi(\xi) = \varphi_\varepsilon(a_{\varepsilon i}x)$ и, рассуждая аналогично, построим ее продолжение со слоя R на шар B по формуле

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \tilde{\psi}(\xi) + \overline{\varphi},$$

где $\overline{\varphi}$ — среднее значение по слою R, а $\tilde{\psi}(\xi)$ — некоторое продолжение на шар B функции $\psi(\xi) = \varphi(\xi) - \overline{\varphi}$, норма которого удовлетворяет условию $||\tilde{\psi}(\xi)||_{H^1(B^2)} \le C||\psi(\xi)||_{H^1(R)}$. Тогда

$$\int\limits_{B^2}|\nabla\tilde{\varphi}|^2 d\xi = \int\limits_{B^2}|\nabla\tilde{\psi}|^2 d\xi \ \le \ C_1||\psi||_{H^1(R)} \ \le C_2 \int\limits_{R}|\nabla\varphi|^2 d\xi.$$

Значит, $\tilde{v}_{1\varepsilon}(x) = \mathrm{grad}\tilde{\varphi}_\varepsilon(x)$ является продолжением $v_{1\varepsilon}(x)$, для которого справедливо

$$\int\limits_{B_{\varepsilon i}^2}(\tilde{v}_{1\varepsilon})^2 dx \le C\int\limits_{R_{\varepsilon i}}(v_{1\varepsilon})^2 dx.$$

Таким образом, построен оператор $\Pi_\varepsilon : H_\varepsilon \to H$, удовлетворяющий условию (a) теоремы 2.2.

Следующий шаг — построение оператора $P_\varepsilon : M \to H_\varepsilon$, $\overline{M} = H$. В качестве плотного в пространстве $H = \hat{H}(R^3, \mathrm{rot})$ множества M выберем множество m-мерных систем дважды непрерывно дифференцируемых финитных соленоидальных полей на R^3. Действие оператора P_ε на них определим следующей формулой:

$$P_\varepsilon u = \begin{cases} u_k(x) + \sum\limits_{i=1}^{N(\varepsilon)} \Big(u_k(x_{\varepsilon i}) - u_k(x)\Big)\varphi\Big(\frac{|x-x_{\varepsilon i}|}{2a_{\varepsilon i}}\Big) \\ \qquad -\mathrm{grad}\Big[\varphi\Big(\frac{|x-x_{\varepsilon i}|}{a_{\varepsilon i}}\Big) \sum\limits_{\alpha=1}^{3} (x^\alpha - x^\alpha_{\varepsilon i}) u^\alpha_k(x_{\varepsilon i})\Big], \quad x \in \Omega^k_\varepsilon,\ k = \overline{1,m}; \\ 0, \qquad x \in T^{kl}_{\varepsilon ij}, \quad i = \overline{1, N(\varepsilon)},\ k = \overline{1,m}, \end{cases}$$

где $\varphi(\tau)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, равная 1 при $\tau \le 1/2$ и 0 при $\tau \ge 1$. Проверим выполнение условий (b_1)–(b_3) теоремы 2.2 для построенного оператора P_ε.

Ввиду условия (i) и конструкции оператора Π_ε, условие (b_1), очевидно, выполняется. Условие (b_2) также имеет место:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} ||P_\varepsilon u||^2_{H_\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{k=1}^{m} \Bigg[\int\limits_{\Omega^k_\varepsilon} (du_k(x))^2 (1 + \mathrm{mes} \cup_{i=1}^{N(\varepsilon)} B_{\varepsilon i}) + \lambda^2 \int\limits_{\Omega^k_\varepsilon} u^2_k(x)(1 + \mathrm{mes} \cup_{i=1}^{N(\varepsilon)} B_{\varepsilon i})\Bigg]$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{R^3} \Big[(\mathrm{rot}\ u_k(x))^2 + \lambda^2 u^2_k(x)\Big] dx = \ ||u||^2_H, \qquad \forall u \in M,$$

так как $\mathrm{mes} \cup_{i=1}^{N(\varepsilon)} B_{\varepsilon i} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Наконец, обратимся к проверке условию (b_3). Пусть $v_\varepsilon \in H_\varepsilon$: $\Pi_\varepsilon v_\varepsilon \rightharpoonup v$, $u \in M$. Тогда

$$(P_\varepsilon u, v_\varepsilon)_{H_\varepsilon} = \sum_{k=1}^{m} \Bigg[\int\limits_{\Omega^k_\varepsilon} (\mathrm{rot}\ u_k(x) \cdot \mathrm{rot}\ v_\varepsilon) dx + \lambda^2 \int\limits_{\Omega^k_\varepsilon} (u_k(x) \cdot v_\varepsilon) dx\Bigg]$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \int\limits_{\Omega^k_\varepsilon} \Bigg\{ - \Big(\mathrm{rot}\ u_k(x) \cdot \mathrm{rot}\ v_\varepsilon\Big) \varphi\Big(\frac{|x - x_{\varepsilon i}|}{2a_{\varepsilon i}}\Big)$$

$$+ \Bigg(\Bigg[(u_k(x_{\varepsilon i}) - u_k(x)) \times \nabla\varphi\Big(\frac{|x - x_{\varepsilon i}|}{2a_{\varepsilon i}}\Big)\Bigg] \cdot \mathrm{rot}\ v_\varepsilon\Bigg)$$

$$+ \lambda^2 \Bigg[\varphi\Big(\frac{|x - x_{\varepsilon i}|}{2a_{\varepsilon i}}\Big) \Big((u_k(x_{\varepsilon i}) - u_k(x)) \cdot v_\varepsilon\Big)$$

$$-\left(\nabla\varphi\left(\frac{|x-x_{\varepsilon i}|}{a_{\varepsilon i}}\right)\cdot\ v_\varepsilon\right)\left(x-x_{\varepsilon i}\cdot u_k(x_{\varepsilon i})\right)-\varphi\left(\frac{|x-x_{\varepsilon i}|}{a_{\varepsilon i}}\right)\left(u_k(x_{\varepsilon i})\cdot v_\varepsilon\right)\Big]\Big\}dx.$$

Отсюда, с учетом свойств функции φ и условия (i), получаем

$$(P_\varepsilon u, v_\varepsilon)_{H_\varepsilon}\ \sim\ \sum_{k=1}^{m}\int\limits_{R^3}\Big[(\text{rot }u_k(x)\cdot\text{rot }(\Pi_\varepsilon v_\varepsilon)_k)dx+\lambda^2(u_k(x)\cdot(\Pi_\varepsilon v_\varepsilon)_k)dx\Big],$$

а потому

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,|(P_\varepsilon u, v_\varepsilon)_{H_\varepsilon}|\le C||u||_H||v||_H.$$

Остается лишь убедиться в справедливости условия (c). По предположению (j) у начального электрического поля вихрей в трубках не наблюдается, т.е. $E_{\varepsilon 0}(x)\equiv G_{\varepsilon 0}(x)$ при $x\in T^{kl}_{\varepsilon ij}$. Кроме того, потоки начального магнитного поля – нулевые, а значит, $H_{\varepsilon 0}(x)\equiv 0$ при $x\in T^{kl}_{\varepsilon ij}$. Следовательно,

$$j_\varepsilon(x,\lambda)=\lambda(E_{\varepsilon 0}(x)-G_{\varepsilon 0}(x))+*dH_{\varepsilon 0}(x)\equiv 0,\quad x\in T^{kl}_{\varepsilon ij}.$$

Воспользуемся результатом [2] исследования асимптотического поведения гармонических векторных полей на многообразиях M^n_ε ($n\ge 3$ — размерность многообразия), который сейчас будет использован лишь частично, однако понадобится и в дальнейшем.

Теорема 2.3. *Пусть v_ε — гармоническое поле на M^3_ε, потоки которого через трубки заданы, и пусть условия (i), (jjj) и (jv) выполняются при $\varepsilon\to 0$. Тогда для любого k*

$$Q_{\varepsilon k}v_\varepsilon\to v_k\quad \textit{слабо}\quad \textit{в}\quad L_2(R^3)^3,$$

где v_k ($k=1,\dots,m$) — потенциальные поля на R^3: $v_k(x)=\text{grad}U_k(x)$, а функции $U_k(x)$ являются решениями задач

$$\Delta U_k(x)=\Phi_k(x),\quad x\in R^3;$$

$$U_k(x)=O(|x|^{-1}),\quad x\to\infty\quad (k=1,\dots,m).$$

Применяя этот результат к гармонической компоненте $G_{\varepsilon 0}(x)$ начального электрического поля, получаем, что для любого $k=1,\dots,m$ $Q_{\varepsilon k}G_{\varepsilon 0}\to G_{0k}$ слабо в $L_2(R^3)^3$. Замечая, что

$$(\Pi_\varepsilon j_\varepsilon)_k(x,\lambda)=0,\quad x\in B_{\varepsilon i},\ \ i=\overline{1,N(\varepsilon)},\ k=\overline{1,m},\tag{2.17}$$

и учитывая условие (jj), из вида $j_\varepsilon(x,\lambda)$ заключаем, что

$$(\Pi_\varepsilon j_\varepsilon)_k\rightharpoonup j_k,\quad k=1,\dots,m,\quad \varepsilon\to 0,$$

слабо в $L_2(R^3)^3$, где

$$j_k(x,\lambda) = \lambda(E_{0k}(x) - G_{0k}(x)) + \mathrm{rot} H_{0k}(x),$$

$E_{0k}(x), H_{0k}(x)$ определяются условием (jj). Тогда, ввиду соленоидальности рассматриваемых полей, имеем их сходимость и в $H = \hat{H}(R^3, \mathrm{div}) = \{u \in L_2(R^3)^{3m} : \mathrm{div} u_k(x) \in L_2(R^3), k = \overline{1,m}\}$ [7].

Выбираем $v_\varepsilon \in H_\varepsilon$: $\Pi_\varepsilon v_\varepsilon \rightharpoonup v$ при $\varepsilon \to 0$ слабо в $H = \hat{H}(R^3, \mathrm{rot})$. Применяя теперь теорему о компенсации [7], убеждаемся в выполнении условия (c) для функционалов (2.15), (2.16).

Согласно теореме 2.2, получаем слабую в $H = \hat{H}(R^3, \mathrm{rot})$, а значит, по теореме вложения, сильную в $L_2(R^3)^{3m}$ сходимость решения $\tilde{E}_\varepsilon(x,\lambda)$ системы уравнений (2.10) к решению $\tilde{E}_k(x,\lambda)$ системы

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{E}_k(x,\lambda) + \lambda^2 \tilde{E}_k(x,\lambda) = \lambda(E_{0k}(x) - G_{0k}(x)) + \mathrm{rot} H_{0k}(x); \\ \mathrm{div} \tilde{E}_k(x\lambda) = 0; \end{cases} \quad k = 1,\dots,m. \tag{2.18}$$

Но тогда, из представления (2.9), по теореме 2.3 и ввиду (jj), $\hat{E}_\varepsilon(x,\lambda)$ сходится в смысле (1.2) к решению $\hat{E}(x,\lambda) = \{\hat{E}_k(x,\lambda),\ k = 1,\dots,m\}$ следующей системы уравнений на R^3:

$$\begin{cases} -\Delta \hat{E}_k(x,\lambda) + \lambda^2 \hat{E}_k(x,\lambda) = \lambda E_{0k}(x) + \mathrm{rot} H_{0k}(x); \\ \mathrm{div} \hat{E}_k(x,\lambda) = \lambda^{-1} \mathrm{div} G_{0k}(x); \end{cases} x \in R^3, \lambda > 0,\ k = 1,\dots,m. \tag{2.19}$$

Мы задались потоками начального электрического поля $E_{\varepsilon 0}(x)$, которые совпадают с потоками его гармонической компоненты $G_{\varepsilon 0}(x)$, так как по теореме Кодаиры оператор $P_{\mathcal{H}}$ проектирования на пространство гармонических полей сохраняет их периоды на компактных циклах [4]. Тогда, по теореме 2.3,

$$G_{0k}(x) = \mathrm{grad} \phi_k(x), \quad x \in R^3,\ k = 1,\dots,m, \tag{2.20}$$

где функции $\phi_k(x)$ являются решениями задач

$$\Delta \phi_k = \Phi_k(x), \quad x \in R^3,\ k = 1,\dots,m, \tag{2.21}$$

$\Phi_k(x)$ определяются из условия (jjj) по заданным потокам (2.6). Тогда, из (2.20)–(2.21),

$$\mathrm{div} G_{0k} = \mathrm{div}\,\mathrm{grad} \phi_k = \Delta \phi_k = \Phi_k(x), \quad x \in R^3.$$

А значит, система (2.19) может быть переписана в виде

$$\begin{cases} -\Delta \hat{E}_k(x,\lambda) + \lambda^2 \hat{E}_k(x,\lambda) = \lambda E_{0k}(x) + \mathrm{rot} H_{0k}(x); \\ \mathrm{div} \hat{E}_k(x,\lambda) = \lambda^{-1} \Phi_k(x); \end{cases} \quad k = 1,\dots,m.$$

Таким образом, изучено асимптотическое поведение преобразования Лапласа электрического поля. Преобразование Лапласа магнитного поля $\hat{H}(x,\lambda)$ удовлетворяет системе (2.6), а потому является решением задачи отыскания минимума функционала (2.11) с $j_\varepsilon(x,\lambda) = \lambda H_{\varepsilon 0}(x) - *dE_{\varepsilon 0}(x)$ (гармоническая компонента начального магнитного поля отсутствует, что обусловлено тем, что потоки его — нулевые). Повторяя изложенные выше для $\tilde{E}(x,\lambda)$ рассуждения, заключаем, что решение $\hat{H}_\varepsilon(x,\lambda)$ системы (2.6) сходится в смысле (1.2) к решению $\hat{H}(x,\lambda) = \{H_k(x,\lambda), k = 1,\ldots,m\}$ следующей системы:

$$\begin{cases} -\Delta\hat{H}_k(x,\lambda) + \lambda^2\hat{H}_k(x,\lambda) = \lambda H_{0k}(x) - \mathrm{rot}E_{0k}(x); \\ \mathrm{div}\hat{H}_k(x,\lambda) = 0; \end{cases} x \in R^3, \lambda > 0, k = 1,\ldots,m.$$

Теорема 2.1 доказана.

3. Доказательство теоремы 1.1

Рассмотрим системы эллиптических уравнений (2.5)–(2.6), (2.7)–(2.8) при комплексных значениях параметра λ. Система (2.5)–(2.6) однозначно разрешима для всех комплексных λ, кроме спектральных значений оператора $-\Delta + \lambda^2$. А именно, система (2.5)–(2.6) имеет единственное решение $\{\hat{E}_\varepsilon(x,\lambda), \hat{H}_\varepsilon(x,\lambda)\}$, $\forall\lambda \neq 0 : \arg\lambda \neq \pi$, и это решение является аналитической функцией λ для почти всех $x \in M_\varepsilon^3$. Принимая во внимание условие (j) и результаты теоремы 2.3, легко получить равномерные по ε оценки:

$$||\hat{E}_\varepsilon||_\varepsilon \le C|\lambda|^{-1},$$

$$||\hat{H}_\varepsilon||_\varepsilon \le C|\lambda|^{-1}.$$

Тогда $Q_\varepsilon\hat{E}_\varepsilon(x,\lambda)$, $Q_\varepsilon\hat{H}_\varepsilon(x,\lambda)$ аналитичны по λ для почти всех $x \in R^3$ в области $\{\lambda : \arg\lambda \neq \pi\}$ и

$$\begin{aligned} ||Q_\varepsilon\hat{E}_\varepsilon|| \le ||\hat{E}_\varepsilon||_\varepsilon < C_0|\lambda|^{-1}; \\ ||Q_\varepsilon\hat{H}_\varepsilon|| \le ||\hat{H}_\varepsilon||_\varepsilon < C_0|\lambda|^{-1}; \end{aligned} \quad |\mathrm{arg}\lambda - \pi| \ge \alpha_0 > 0. \tag{3.1}$$

Рассмотрим систему (2.7)–(2.8) при $\lambda \in \mathbf{C}\setminus R_-$. Существует единственное решение $\{\hat{E}(x,\lambda), \hat{H}(x,\lambda)\}$ этой системы, аналитическое по λ в окрестности полуоси $\lambda > 0$. Учитывая аналитичность решения $\{\hat{E}_\varepsilon(x,\lambda), \hat{H}_\varepsilon(x,\lambda)\}$ системы (2.5)–(2.6) по λ в области $\mathbf{C}\setminus R_-$ и оценку (3.1), по теореме 2.1 и принципу компактности Монтеля заключаем, что решение $\{\hat{E}_\varepsilon(x,\lambda), \hat{H}_\varepsilon(x,\lambda)\}$ системы (2.5)–(2.6) сходится в смысле (1.2) к вектор-функциям $\{\tilde{E}(x,\lambda), \tilde{H}(x,\lambda)\}$, аналитическим по λ в области $\mathbf{C} \setminus R_-$, удовлетворяющим той же оценке и совпадающим с решением $\{\hat{E}(x,\lambda), \hat{H}(x,\lambda)\}$ системы (2.7)–(2.8) в окрестности полуоси $\lambda > 0$. Тогда справедлива следующая

Теорема 3.4. *Пусть выполняются условия теоремы 2.1. Тогда для любого* $\lambda \in \mathbf{C} \setminus R_-$ *решение* $\{\hat{E}_\varepsilon(x,\lambda), \hat{H}_\varepsilon(x,\lambda)\}$ *системы (2.5)–(2.6) сходится при* $\varepsilon \to 0$ *в смысле (1.2) к решению* $\{\hat{E}(x,\lambda), \hat{H}(x,\lambda)\}$ *системы (2.7)–(2.8), аналитическому по* λ *в* $\mathbf{C}\setminus R_-$ *и удовлетворяющему в области* $|\arg\lambda - \pi| > \alpha_0$ *следующей оценке:*

$$||\hat{E}(\cdot,\lambda)|| < \mathrm{C}\lambda^{-1};$$
$$||\hat{H}(\cdot,\lambda)|| < \mathrm{C}\lambda^{-1}. \tag{3.2}$$

Полученные оценки (3.1) для решения системы (2.5)–(2.6) и (3.2) для решения системы (2.7)–(2.8) завершают обоснование применимости метода преобразования Лапласа [3] к решению задач (2.1)–(2.2) и (2.3)–(2.4) соответственно.

Рассмотрим задачу (2.1)–(2.2). Ее решение $\{E_\varepsilon(x,t), H_\varepsilon(x,t)\}$ удовлетворяет следующим равномерным по ε оценкам [3]:

$$\max_{0\le t\le T} \int\limits_{M_\varepsilon^3} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} E_\varepsilon(x,t) \right)^2 + (E_\varepsilon(x,t))^2 \right] dx + \int\limits_0^T \int\limits_{M_\varepsilon^3} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 g_\varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial E_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial E_\varepsilon}{\partial x_\beta} dx dt < C_1,$$

$$\max_{0\le t\le T} \int\limits_{M_\varepsilon^3} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} H_\varepsilon(x,t) \right)^2 + (H_\varepsilon(x,t))^2 \right] dx + \int\limits_0^T \int\limits_{M_\varepsilon^3} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 g_\varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial x_\beta} dx dt < C_2, \tag{3.3}$$

где константы C_1, C_2 зависят только от T и L_2-норм начальных условий $E_{0\varepsilon}(x), H_{0\varepsilon}(x)$. Тогда семейство $\{\Pi_\varepsilon E_\varepsilon(x,t), \Pi_\varepsilon H_\varepsilon(x,t), \varepsilon > 0\}$ (оператор $\Pi_\varepsilon : H^1(M_\varepsilon^3) \to H^1(R^3, \mathrm{rot})^{\mathrm{m}}$ был построен в п. 2) компактно в $L_2(R^3 \times (0,T))^{3m}$, а значит, существует предел $\{E'(x,t), H'(x,t) \in L_2(R^3 \times (0,T))^{3m}\}$ решения $\{E_\varepsilon(x,t), H_\varepsilon(x,t)\}$ задачи (2.1)–(2.2) по подпоследовательности $\{\varepsilon_j \to 0,\ j = 1,2,\ldots\}$. Теорема 1.1 будет доказана, если мы покажем, что $\{E'(x,t), H'(x,t)\}$ является решением задачи Коши (2.3)–(2.4).

Так как $mes\left(\bigcup_i (B_i^\varepsilon)\right) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то для любых $\varphi_k(x) \in L_2\left(R^3\right)$, $\psi_k(t) \in C^1(0,T)$ справедливы соотношения

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon_i\to 0} \sum_{k=1}^m \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon^k} E_\varepsilon(x,t)\varphi_k(x)\psi_k(t) dx dt = \sum_{k=1}^m \int\limits_0^T \int\limits_{R^3} E'_k(x,t)\varphi_k(x)\psi_k(t) dx dt,$$

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon_j\to 0} \sum_{k=1}^m \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon^k} H_\varepsilon(x,t)\varphi_k(x)\psi_k(t) dx dt = \sum_{k=1}^m \int\limits_0^T \int\limits_{R^3} H'_k(x,t)\varphi_k(x)\psi_k(t) dx dt, \tag{3.4}$$

где $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(t)$ — произвольные функции следующих классов $\varphi_k(x) \in L_2\left(R^3\right)$, $\psi_k(t) \in C^1(0,T)$.

Решения $\{\hat{E}_\varepsilon(x,\lambda), \hat{H}_\varepsilon(x,\lambda)\}$ и $\{\hat{E}(x,\lambda), \hat{H}(x,\lambda)\}$ систем (2.5)–(2.6) и (2.7)–(2.8) являются преобразованиями Лапласа решений $E_\varepsilon(x,t)$ и $E(x,t)$ задач (2.1)–(2.2) и (2.3)–(2.4) соответственно:

$$E_\varepsilon(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}\hat{E}_\varepsilon(x,\lambda)d\lambda; \quad H_\varepsilon(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}\hat{H}_\varepsilon(x,\lambda)d\lambda, \quad \sigma > 0;$$

$$E(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}\hat{E}(x,\lambda)d\lambda, \quad H(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}\hat{H}(x,\lambda)d\lambda, \quad \sigma > 0. \tag{3.5}$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon^k} E_\varepsilon(x,t)\varphi_k(x)\psi_k(t)dxdt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left\{\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{\Omega_\varepsilon^k} E_\varepsilon(x,\lambda)\varphi_k(x)dx\int\limits_0^T e^{\lambda t}\psi_k(t)dt\right\}d\lambda;$$

$$\sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon^k} H_\varepsilon(x,t)\varphi_k(x)\psi_k(t)dxdt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left\{\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{\Omega_\varepsilon^k} H_\varepsilon(x,\lambda)\varphi_k(x)dx\int\limits_0^T e^{\lambda t}\psi_k(t)dt\right\}d\lambda;$$

$$\sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^T\int\limits_{R^3} E_k(x,t)\varphi_k(x)\psi_k(t)dxdt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left\{\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{R^3} E_k(x,\lambda)\varphi_k(x)dx\int\limits_0^T e^{\lambda t}\psi_k(t)dt\right\}d\lambda;$$

$$\sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^T\int\limits_{R^3} H_k(x,t)\varphi_k(x)\psi_k(t)dxdt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{R^3} H_k(x,\lambda)\varphi_k(x)dx \int\limits_0^T e^{\lambda t}\psi_k(t)dt \right\} d\lambda \,. \tag{3.6}$$

Так как $mes\,(\bigcup_i (B_i^\varepsilon)) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то по теореме 3.1 для любого $\lambda \in \mathbf{C} \setminus R^1_-$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\Omega_\varepsilon^k} E_\varepsilon(x,\lambda)\varphi_k(x)dx \right\} = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{R^3} E_k(x,\lambda)\varphi_k(x)dx.$$

В силу аналитичности по λ и равномерной ограниченности по ε функции, стоящей под знаком предела в левой части этого равенства, по теореме Монтеля этот предел достигается равномерно на любой подобласти $\{\lambda : |\arg\lambda - \pi| > \alpha_0$.

Отсюда, из (3.5), (3.6), с учетом оценок (3.1), (3.2), получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon^k} E^\varepsilon(x,t)\varphi_k(x)\psi_k(t)dxdt \right\} = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{R^3} E_k(x,t)\varphi_k(x)\psi_k(t)dxdt\,;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon^k} H^\varepsilon(x,t)\varphi_k(x)\psi_k(t)dxdt \right\} = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{R^3} H_k(x,t)\varphi_k(x)\psi_k(t)dxdt\,. \tag{3.7}$$

А в силу произвольности $\varphi_k(x)$, $\psi_k(t)$, из (3.4), (3.7) следует, что $\{E_k'(x,t),\ H_k'(x,t),\ \ k=1,\dots,m\} = \{E_k(x,t), H_k(x,t),\ \ k=1,\dots,m\}$, где $\{E_k(x,t),\ H_k(x,t),\ \ k=1,\dots,m\}$ – решение задачи (2.3)–(2.4). Теорема 1.1 доказана полностью.

4. Дополнения

1. Приведем некоторые определения и факты теории внешнего исчисления, т.е. исчисления дифференциальных форм на римановых многообразиях. Заметим, что они легко переносятся на поля [4], с которыми мы преимущественно имеем дело в работе, так как компоненты тензорного поля $\{\varphi^{\alpha_1\cdots\alpha_p}(x), \alpha_i = 1,\dots,n\}$ валентности p находятся во взаимно однозначном соответствии

$$\varphi^{\alpha_1\dots\alpha_p} = g^{\alpha_1\beta_1}\dots g^{\alpha_p\beta_p}\varphi_{\beta_1\dots\beta_p}$$

с компонентами формы $\varphi = \varphi_{\alpha_1\dots\alpha_p}dx^{\alpha_1}\dots dx^{\alpha_p}$ степени p ($g^{\alpha\beta}$ — обратный метрический тензор: $g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma, \alpha,\gamma = \overline{1,n}$). Как обычно, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до n (n — размерность пространства).

Пусть M^n — риманово многообразие размерности n с метрикой, заданной метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$, α, $\beta = 1, \dots, n$. Оператор внешнего дифференцирования d переводит p-формы в $(p+1)$-формы ($p \geq 1$) по формуле

$$d\varphi = (d\varphi)_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1}} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_{p+1}}, \quad (d\varphi)_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1}} = \sum_{\nu=1}^{p+1} (-1)^{\nu-1} \frac{\partial \varphi_{\alpha_1 \dots \hat{\alpha}_\nu \dots \alpha_p}}{\partial x^{\alpha_\nu}},$$

где $\wedge$ — внешнее произведение форм. Метрически сопряженный к нему оператор δ понижает степень форм на 1. Он определяется соотношением

$$(d\varphi^p, \psi^{p+1}) \ = \ (\varphi^p, \delta\psi^{p+1}),$$

где φ^p — форма степени p, ψ^{p+1} — форма степени $p+1$, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение форм на M^n $(v, u) = \int\limits_{M^n} v \wedge *u$ (определено для форм одинаковой степени). В локальных координатах оператор δ определяется формулой

$$\delta\varphi = (\delta\varphi)_{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p}, \quad (\delta\varphi)_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (g^{\alpha\beta} \sqrt{|g|}_{\beta\alpha_1 \dots \alpha_p}),$$

где $g^{\alpha\beta}$ — обратный метрический тензор.

Оператор Ходжа $*$ ставит в соответствие p-форме φ^p сопряженную ей $(n-p)$-форму $(*\varphi)^{n-p}$ по формуле

$$*\varphi = (*\varphi)_{\beta_1 \dots \beta_{n-p}} dx^{\beta_1} \wedge \dots \wedge dx^{\beta_{n-p}}, \quad (*\varphi)_{\beta_1 \dots \beta_{n-p}} = e_{\alpha_1 \dots \alpha_p \beta_1 \dots \beta_{n-p}} \varphi^{\alpha_1 \dots \alpha_p},$$

где $e_{\alpha_1 \dots \alpha_r \beta_1 \dots \beta_{n-p}} = \delta^{1 \dots n}_{\alpha_1 \dots \alpha_p \beta_1 \dots \beta_{n-p}} e_{1 \dots n}$, $e_{1 \dots n} = \sqrt{|g|}$.

Наконец, оператор Δ определяется равенством

$$\Delta = d\delta + \delta d$$

и имеет следующий вид в локальных координатах:

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{|g_\epsilon|}} \ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \ \left(\sqrt{|g_\epsilon|} \ g_\epsilon^{\alpha\beta} \ \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right).$$

Форма φ называется замкнутой (безвихревой), если $d\varphi = 0$, козамкнутой (соленоидальной), если $\delta\varphi = 0$, и гармонической, если она является одновременно замкнутой и козамкнутой. Иначе, форма φ называется гармонической, если справедливо $\Delta\varphi = 0$. Форма ψ степени $p+1$ называется точной, если существует форма φ степени p такая, что $\psi = d\varphi$.

Справедлива следующая теорема Кодаиры: гильбертово пространство $L_2(M^n)$ измеримых на M^n форм разлагается в следующую ортогональную сумму:

$$L_2(M^n) = \mathcal{R}(M^n) \oplus \mathcal{J}(M^n) \oplus \mathcal{H}(M^n),$$

где $\mathcal{R}(M^n)$, $\mathcal{J}(M^n)$ и $\mathcal{H}(M^n)$ — пространства замкнутых, козамкнутых и гармонических форм на M^n соответственно.

2. P-мерной цепью C^p на M^n называется p-мерный алгебраический комплекс $C^p = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i t_i^p$, где каждое t_i^p является топологическим образом в M^n эвклидова p-мерного симплекса T^p, γ_i — вещественные коэффициенты, $r < \infty$. Пусть $(u) = (u^1 \dots u^p)$ — система координат на симплексе T^p, тогда точки $v \in t^p$ описываются посредством соотношений $v = v(u)$ и локальные координаты $x^\alpha = x^\alpha(v(u))$ точки являются непрерывными функциями переменной u. Цепь C^p называется регулярной, если функции $x^\alpha = x^\alpha(v(u))$ параметров u^k дважды непрерывно дифференцируемы, и $\forall v \in t^p$,

$$rang \frac{\partial(x^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_p})}{\partial(u^1 \dots u^p)} = p.$$

Под интегралом на C^p формы φ степени p понимают выражение

$$\begin{aligned} (\varphi^p, C^p) &= \frac{1}{p!} \int\limits_{C^p} \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}(v(u)) dx^{\alpha_1} \dots dx^{\alpha_p} \\ &= \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \frac{1}{p!} \int\limits_{T_i^p} \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}(v(u)) \frac{\partial(x^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_p})}{\partial(u^1 \dots u^p)} du. \end{aligned}$$

На M^n справедлива обобщенная формула Стокса

$$(d\varphi^{p-1}, C^p) = (\varphi^{p-1}, \partial C^p).$$

Цепь, граница которой равна нулю, называется циклом. Цикл Z^p гомологичен нулю, если существует такая цепь C^{p+1}, что $Z^p = \partial C^{p+1}$. Два цикла Z_1, Z_2 называются гомологичными друг другу, если их разность гомологична нулю. Если φ^p — замкнутая p-форма, Z^p — p-цикл, тогда интеграл

$$(\varphi^p, Z^p) = \int\limits_{Z}^{p} \varphi^p$$

называется периодом φ^p вдоль Z^p. Вследствие теоремы Стокса периоды точных форм и периоды замкнутых форм по гомологичным нулю циклам равны нулю.

Список литературы

[1] *J.A. Wheeler*, Geometrodinamics. Acad. Press, New York(1962).

[2] *L. Boutet de Monvel and E.Ya. Khruslov*, Homogenized description of harmonic vector fields on Riemannian manifolds with complicated microstructure. — Math. Phys., Anal., Geom. (1998), v. 1, No. 1, p. 1–22.

[3] *О.А. Ладыженская* , Смешанная задача для гиперболического уравнения. Гостехиздат, Москва (1953).

[4] *К. Морен*, Методы гильбертова пространства. Мир, Москва (1965).

[5] *L. Boutet de Monvel and E.Ya. Khruslov*, Averaging of the diffusion equation on Riemannian manifolds with complex microstructure. — Trans. Moscow. Math. Soc. (1997), v. 58, p. 137–161.

[6] *Р. Темам*, Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. Мир, Москва (1981).

[7] *Э. Санчес–Паленсия*, Неоднородные среды и теория колебаний. Мир, Москва (1984).

Homogenization of Maxwell equations on manifolds of complicated microstructure

E.Ya. Khruslov, A.P. Pal-Val

The Cauchy problem for the homogeneous system of the Maxwell equations on four-dimensional manifolds $\tilde{M}^4_\varepsilon = R^1_+ \times M^3_\varepsilon$, where M^3_ε are Riemannian manifolds of a complicated microstructure is considered. M^3_ε consist of several copies of the space R^3 with a large number of holes attached by means of thin tubes. The dependence on a small parameter $\varepsilon > 0$ is such that the number of tubes increases and their thickness vanishes, as $\varepsilon \to 0$. The asymptotic behaviour of electromagnetic field without charges and currents on $\tilde{M}^4_\varepsilon$ is studied as $\varepsilon \to 0$, and it is obtained that the density of electric charge appears in the Maxwell equations as a result of homogenization.

Усереднення рівнянь Максвелла на многовидах складної мікроструктури

Є.Я. Хруслов, А.П. Паль-Валь

Розглядається задача Коши для однорідної системи рівнянь Максвелла на чотиривимірних многовидах $\tilde{M}_\varepsilon^4 = R_+^1 \times M_\varepsilon^3$, де M_ε^3 – ріманові многовиди складної мікроструктури. M_ε^3 складаються з кількох екземплярів простору R^3 з великою кількістю дирок, які поєднано за допомогою тонких трубок. Залежність від малого параметру $\varepsilon > 0$ така, що кількість трубок необмежено зростає, а їх товщина зменшується, коли $\varepsilon \to 0$. Вивчаємо асимптотичну поведінку електромагнітного поля без зарядів та струмів на $\tilde{M}_\varepsilon^4$, коли $\varepsilon \to 0$. Одержано, що щільність електричного заряду з'являється в рівняннях Максвелла в результаті усереднення.