Математическая физика, анализ, геометрия
2000, т. 7, № 2, с. 196–208

Задача Римана с дополнительными особенностями

М.А. Кудрявцев

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
Пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61164, Украина*

E-mail: kudryavtsev@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 24 апреля 2000 года
Представлена В.А. Марченко

Рассмотрена задача Римана в случае, когда искомая функция имеет неизолированные особенности, сосредоточенные на вещественной прямой. Это задача использована для факторизации функций, голоморфных вне единичной окружности и вещественной прямой, в виде произведения двух функций, имеющих особенности на заданном множестве вещественной прямой.

Классическая задача Римана с нулями хорошо известна (см., например, [1]). В ней требуется построить две функции $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$, такие что $\psi_1(z)$ аналитична внутри замкнутого контура Γ и имеет там нули $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, а $\frac{1}{\psi_2(z)}$ аналитична вне контура Γ и имеет там нули $\mu_1, \ldots, \mu_n$. При этом для предельных значений функций на контуре Γ должно выполняться

$$\psi_1(\xi) = G(\xi)\psi_2(\xi), \quad \xi \in \Gamma, \tag{1}$$

где $G(\xi)$ — заданная на контуре комплекснозначная функция.

В настоящей работе задача Римана с дополнительными особенностями поставлена и решена в случае, когда контур Γ является единичной окружностью, а нули и особенности функций $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$, в том числе неизолированные, сосредоточены на вещественной прямой. Частный случай такой задачи использован в работе [2].

Обозначение 1. Если $f(z)$ — функция, голоморфная всюду в комплексной плоскости, кроме единичной окружности $\mathbf{T}$ и вещественной прямой $\mathbf{R}$, то верхние индексы $^+$ и $^-$ будут означать предельные значения этой функции изнутри и снаружи окружности, а также сверху и снизу вещественной прямой (там, где эти пределы существуют):

$$f^{\pm}(\xi) = \lim_{\varepsilon \to +0} f((1 \mp \varepsilon)\xi), \quad |\xi| = 1,$$

$$f^{\pm}(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} f(x \pm i\varepsilon), \quad -\infty < x < \infty.$$

Сформулируем задачу Римана с дополнительными особенностями. Пусть на единичной окружности задана функция

$$G(e^{i\theta}) = \mu(\theta) e^{i\hat{\varphi}(\theta)}, \quad -\pi < \theta < \pi,$$

где $\ln \mu(\theta)$ и $\hat{\varphi}(\theta)$ — суммируемые функции ($\mu(\theta) > 0$, $\hat{\varphi}(\theta) = \overline{\hat{\varphi}(\theta)}$), причем $\hat{\varphi}(\theta)$ — ограничена. Пусть $\varphi(t) = \overline{\varphi(t)}$ — ограниченная суммируемая функция на вещественной прямой, равная нулю хотя бы на одном интервале $\Delta' \subset (-1, 1)$ и хотя бы на одном $\Delta'' \subset (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Требуется построить голоморфную и не обращающуюся в нуль вне окружности и вещественной прямой функцию $R(z)$, для которой

$$\frac{R^+(e^{i\theta})}{R^-(e^{i\theta})} = \mu(\theta) e^{i\hat{\varphi}(\theta)}, \quad -\pi < \theta < \pi, \tag{2}$$

$$\frac{R^+(t)}{R^-(t)} = e^{i\varphi(t)}, \quad -\infty < t < \infty, \tag{3}$$

там, где эти пределы существуют. При этом мы требуем, чтобы в равенствах (2) и (3) совпадали аргументы: $\arg \frac{R^+(e^{i\theta})}{R^-(e^{i\theta})} = \hat{\varphi}(\theta)$, $\arg \frac{R^+(t)}{R^-(t)} = \varphi(t)$, где $\arg R^{\pm}(\xi)$, $|\xi| = 1$, и $\arg R^{\pm}(t), -\infty < t < \infty$, вычисляются следующим образом. Зафиксируем точки $t' \in \Delta'$, $t'' \in \Delta''$, в которых $R(z)$ голоморфна, и положим $-\pi < \arg R(t') \le \pi$, $-\pi < \arg R(t'') \le \pi$. По предположению, функция $R(z)$ имеет четыре односвязных компонента голоморфности, на которых она не обращается в нуль: это части верхней и нижней полуплоскостей, сосредоточенные внутри и вне круга. Соединим точку z ($\operatorname{Im} z \ne 0$, $|z| \ne 1$) с точкой t' или t'' непрерывным путем, лежащим в одном из этих компонентов, и проследим за непрерывным изменением аргумента функции $R(z)$ вдоль этого пути. После этого $\arg R(z)$ определен однозначно. Устремив z к вещественной прямой (единичной окружности), находим $\arg R^{\pm}(t), -\infty < t < \infty$ ($\arg R^{\pm}(\xi)$, $|\xi| = 1$).

Легко видеть, что задача Римана с дополнительными особенностями является обобщением задачи Римана с нулями. В самом деле, если на некотором интервале $\Delta \in \mathbf{R}$, $\pm 1 \notin \Delta$, выполняется $\varphi(t) = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, то это означает, что $R(z)$ голоморфна на Δ. Если в правой и левой полуокрестностях точки t_0 функция $\varphi(t)$ постоянна и кратна π, а в самой точке претерпевает скачок вида $k\pi$, то это значит, что $R(z)$ имеет в точке t_0 полюс ($k > 0$) или нуль ($k < 0$) порядка $|k|$. Более сложное поведение $\varphi(t)$ означает более сложный характер особенностей $R(z)$.

Обозначение 2. Введем

$$P(z,\gamma) \;=\; \exp\Big\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\gamma(t)(\frac{1}{t-z}-\frac{t}{1+t^2})dt\Big\}, \tag{4}$$

$$\hat{P}(z,\hat{\gamma}) \;=\; \exp\Big\{-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\;\hat{\gamma}(\theta)d\theta\Big\},$$

где $\gamma(t)=\overline{\gamma(t)}$, $-\infty<t<\infty$, и $\hat{\gamma}(\theta)=\overline{\hat{\gamma}(\theta)}$, $-\pi<t<\pi$, — ограниченные и измеримые функции. Функция $P(z,\gamma)$ определена и голоморфна, по крайней мере, для невещественных z, а $\hat{P}(z,\hat{\gamma})$ — внутри и вне единичного круга. Из формул Племеля–Сохоцкого легко получить следующие равенства, связывающие предельные значения $P(z,\gamma)$ и $\hat{P}(z,\hat{\gamma})$ на вещественной прямой и единичной окружности соответственно:

$$\begin{array}{ll} \arg P^+(t,\gamma) = -\arg P^-(t,\gamma) = \gamma(t), & -\infty<t<\infty, \\ |P^+(t,\gamma)| = |P^-(t,\gamma)|, & -\infty<t<\infty, \end{array} \tag{5}$$

$$\begin{array}{ll} \arg \hat{P}^+(e^{i\theta},\hat{\gamma}) = -\arg \hat{P}^-(e^{i\theta},\hat{\gamma}) = \hat{\gamma}(\theta), & -\pi<\theta<\pi, \\ |\hat{P}^+(e^{i\theta},\hat{\gamma})| = |\hat{P}^-(e^{i\theta},\hat{\gamma})|, & -\pi<\theta<\pi. \end{array} \tag{6}$$

Определим функции

$$R^{(1)}(z) = P(z,\frac{\varphi}{2}), \qquad R^{(2)}(z) = \hat{P}(z,\frac{\hat{\varphi}}{2}),$$

$$R_\mu(z) = \exp\Big\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z}\ln\mu(\theta)\;d\theta\Big\}. \tag{7}$$

Из формул Племеля–Сохоцкого следует, что

$$\frac{|R_3^+(e^{i\theta})|}{|R_3^-(e^{i\theta})|} = \mu(\theta), \quad \arg R_3^+(e^{i\theta}) = \arg R_3^-(e^{i\theta}), \qquad -\pi<\theta<\pi. \tag{8}$$

Таким образом, простым следствием равенств (5), (6), (8) является

Теорема 1. *Функция $R(z)=R^{(1)}(z)R^{(2)}(z)R_\mu(z)$ является решением задачи (2), (3).*

Заметим, что, при условии суммируемости функций $\ln\mu(\theta)$, $\hat{\varphi}(\theta)$, $\varphi(t)$, имеем существование пределов $R^{\pm}(\xi)$, $R^{\pm}(t)$ почти в сюду на единичной окружности и вещественной прямой, а функции $\ln R((1\mp\varepsilon)\xi)$, $|\xi|=1$, и $\ln R(t\pm i\varepsilon)$, $t\in\mathbf{R}$, сходятся соответственно к $\ln R^{\pm}(\xi)$, $\ln R^{\pm}(t)$ в метрике L^1

(см., например, [3]). Не останавливаясь на вопросах сходимости, используем задачу Римана для факторизации функций с особенностями на единичной окружности и вещественной прямой.

Обозначение 3. Определим на вещественной прямой отображение V — отображение симметрии относительно единичной окружности:

$$V(t) = t^{-1}, \quad t \in \mathbf{R}\backslash\{0\}.$$

Для множества $A \subset \mathbf{R}\backslash\{0\}$ и для функции $\rho(t)$, заданной на $\mathbf{R}\backslash\{0\}$, определяем

$$V(A) = \{t \mid t^{-1} \in A\},$$
$$V(\rho)(t) = \rho(t^{-1}).$$

Основным результатом работы является

Теорема 2. *Пусть функция $N(z)$ голоморфна и не обращается в нуль вне единичной окружности $\mathbf{T}$ и некоторого замкнутого множества $\Sigma \subset \mathbf{R}$ вещественной прямой и удовлетворяет условиям:*
1) В области голоморфности функции $N(z)$

$$N(z^{-1}) = N(z), \quad N(\overline{z}) = \overline{N(z)}, \qquad z \notin \Sigma \cup \mathbf{T}. \tag{9}$$

2) Существует постоянная $C > 0$, такая что в верхнем полукруге

$$|\arg N(z)| < C, \qquad |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0.$$

Если $\Sigma = \Omega_1 \cup V(\Omega_1) \cup \Omega_2$, где множества Ω_1, $V(\Omega_1)$, $\Omega_2 = V(\Omega_2)$ находятся на положительном расстоянии друг от друга, то существует функция $R(z)$, голоморфная вне множества $\Omega \equiv \Omega_1 \cup \Omega_2$ и единичной окружности $\mathbf{T}$, такая что

$$N(z) = R(z)R(z^{-1}) \tag{10}$$

и

$$\frac{|R^+(e^{i\theta})|}{|R^-(e^{i\theta})|} = \mu(\theta), \tag{11}$$

где $\mu(\theta) = \mu(-\theta) > 0,\ -\pi < \theta < \pi,$— произвольная четная функция с суммируемым логарифмом.

Заметим, что эта теорема сводится к задаче Римана с дополнительными особенностями. По существу, функция $R(z)$ строится так, чтобы предельные значения аргумента функции $R(z)R(z^{-1})$ совпадали с предельными значениями аргумента функции $N(z)$, и, кроме того, функция $R(z)$ имела особенности только на единичной окружности $\mathbf{T}$ и заданном множестве Ω, а также выполнялось дополнительное соотношение (11) с практически произвольным $\mu(\theta)$.

Для доказательства теоремы потребуются две простые леммы, раскрывающие свойства функций $P(z,\gamma)$ и $\hat{P}(z,\hat{\gamma})$.

Лемма 1. *Функции $P(z,\gamma)$ и $\hat{P}(z,\hat{\gamma})$ в своей области голоморфности удовлетворяют свойствам:*

$$P(z,\gamma_1+\gamma_2) = P(z,\gamma_1)P(z,\gamma_2), \tag{12}$$

$$P(\overline{z},\gamma) = \overline{P(z,\gamma)}, \tag{13}$$

$$P(z^{-1},\gamma) = P(z,-V(\gamma)), \tag{14}$$

$$\hat{P}(z,\hat{\gamma}_1+\hat{\gamma}_2) = \hat{P}(z,\hat{\gamma}_1)\hat{P}(z,\hat{\gamma}_2). \tag{15}$$

Если $\hat{\gamma}(\theta) = -\hat{\gamma}(-\theta)$ — нечетная, то

$$\hat{P}(z^{-1},\hat{\gamma}) = \hat{P}(z,\hat{\gamma})). \tag{16}$$

Лемма 2. *1. Пусть $f_1(z)$ — голоморфная и не обращающаяся в нуль в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ функция с ограниченным аргументом. Тогда она представима в виде*

$$f_1(z) = C_1 P(z,\eta_1), \quad \operatorname{Im} z > 0, \tag{17}$$

где C_1 — положительная постоянная, а

$$\eta_1(t) = \arg f_1^+(t), \quad -\infty < t < \infty, \tag{18}$$

— предельное значение ее аргумента из верхней полуплоскости.

2. Пусть $f_2(z)$ — голоморфная и не обращающаяся в нуль в круге $|z|<1$ функция с ограниченным аргументом. Тогда она представима в виде

$$f_2(z) = C_2 \hat{P}(z,\hat{\eta}_2), \quad |z|<1,$$

где $C_2 > 0$, а

$$\hat{\eta}_2(\theta) = \arg f_2^+(e^{i\theta}), \quad -\pi < \theta < \pi,$$

— предельное значение ее аргумента изнутри круга.

Д о к а з а т е л ь с т в о лемм. Докажем только первую часть леммы 2 (свойства (12)–(16) проверяются непосредственным вычислением). Функция $f_1(z)$ голоморфна и не обращается в нуль в односвязной области $\{\operatorname{Im} z > 0\}$. Значит, возможно однозначно определить ее логарифм $\ln f_1(z)$ — голоморфную в верхней полуплоскости функцию с ограниченной мнимой частью: $|\mathrm{Im}\Big(\ln f_1(z)\Big)| < C_3$. Следовательно, функция $\ln f_1(z) + C_3 i$ является функцией Неванлинны (т.е. функцией с положительной мнимой частью в верхней полуплоскости) и представима в виде (см., например, [4])

$$\ln f_1(z) + iC_3 = \alpha + \beta z + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2})d\rho(t),$$

где мера $d\rho(t)$ задана неубывающей функцией $\rho(t)$ с

$$\rho(t_2) - \rho(t_1) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_1}^{t^2} \mathrm{Im}\,(\ln f_1(t+i\varepsilon) + iC_3)dt,$$

$\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \geq 0$. Так как $\mathrm{Im}\,\ln f_1(z)$ ограничена, то $\beta = 0$, а мера $d\rho(t)$ абсолютно непрерывна и $d\rho(t) = (\arg f_1^+(t) + C_3)dt$. В то же время,

$$iC_3 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2})C_3 dt.$$

Значит,

$$\ln f_1(z) = \alpha + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2})\eta_1(t)dt,$$

где $\eta_1(t)$ определена формулой (18). Это и означает, что для функции $f_1(z)$ справедливо мультипликативное представление (17). Вторая часть леммы доказывается аналогично. ■

Доказательство теоремы 1. Сначала предста́вим $N(z)$ как произведение вида $P(z,\gamma)\hat{P}(z,\hat{\gamma})$. Из (9) следует, что $\arg N(z)$ ограничен в той части верхней полуплоскости, которая лежит вне единичного круга. Функция

$$M(\lambda) = N(z)|_{z+z^{-1}=\lambda, |z|>1}$$

голоморфна в верхней и нижней полуплоскостях, а ее аргумент ограничен. Согласно лемме 2,

$$M(\lambda) = \mathrm{C}P(\lambda, \eta),$$

где $\eta(\tau) = \arg M^+(\tau)$, $-\infty < \tau < \infty$,— ограниченная функция, а $C > 0$ — некоторая постоянная. (В дальнейшем будем обозначать через C положительные постоянные, свои для каждого случая, что не будем уже оговаривать.) Это представление справедливо в обеих полуплоскостях, потому что $M(\overline{z}) = \overline{M(z)}$, а для $P(\lambda,\eta)$ выполняется (13). Пусть $\chi_{[-2,2]}(t)$ и

$\chi_{(-\infty,-2)\cup(2,\infty)}(t)$ — это индикаторы множеств $[-2,2]$ и $\mathbf{R}\backslash[-2,2]$, соответственно. Зададим функции

$$M_0(\lambda) = P(\lambda, \chi_{[-2,2]}\eta_0), \qquad M_1(\lambda) = P(\lambda, \chi_{(-\infty,-2)\cup(2,\infty)}(t)\eta_1).$$

По свойству (12), в области голоморфности $M(\lambda)$

$$M(\lambda) = CM_0(\lambda)M_1(\lambda), \tag{19}$$

причем, согласно (5), функции $M_0(\lambda)$ и $M_1(\lambda)$ голоморфны и положительны на $\mathbf{R}\backslash[-2,2]$ и $(-2,2)$, соответственно. Определим теперь в плоскости z функции

$$N_0(z) = N_0(z^{-1}) \equiv M_0(z+z^{-1}), |z| \neq 1,\ N_1(z) = N_1(z^{-1}) \equiv M_1(z+z^{-1}), z \notin \Sigma.$$

Очевидно, функции $N_0(z)$ и $N_1(z)$ голоморфны и положительны на вещественной прямой и единичной окружности соответственно (кроме, быть может, точек ±1). С учетом (9), (19) и этого определения, имеем сначала вне, а затем и внутри единичного круга

$$N(z) = CN_0(z)N_1(z), \quad z \notin \Sigma \cup \mathbf{T}, \tag{20}$$

где функции $N_0(z)$ и $N_1(z)$, согласно лемме 2, допускают мультипликативное представление

$$N_0(z) = \hat{P}(z, \hat{\nu}_0), \qquad N_1(z) = P(z, \nu), \tag{21}$$

где

$$\hat{\nu}_0(\theta) = -\hat{\nu}_0(-\theta) \equiv \arg N_0^+(e^{i\theta}) = \arg N^+(e^{i\theta}) = \begin{cases} -\eta(e^{i\theta}+e^{-i\theta}), & 0 \le \theta < \pi, \\ \eta(e^{i\theta}+e^{-i\theta}), & -\pi < \theta < 0, \end{cases} \tag{22}$$

— нечетная на (π,π) функция, а

$$\nu(t) = -\nu(t^{-1}) \equiv \arg N_1^+(t) = \arg N^+(t) = \begin{cases} \eta(t+t^{-1}), & |t| > 1, \\ -\eta(t+t^{-1}), & |t| < 1. \end{cases} \tag{23}$$

Заметим, что лемма 2 обеспечивает представление (21) для $N_0(z)$ внутри круга (для $N_1(z)$ — в верхней полуплоскости), однако, это же представление справедливо и вне круга (в нижней полуплоскости) в силу свойства (16) и того, что $N_0(z) = N_0(z^{-1})$ (в силу $N_1(\overline{z}) = \overline{N_1(z)}$). Таким образом, задача о факторизации функции $N(z) = CN_0(z)N_1(z)$ свелась к задаче факторизации двух функций $N_0(z)$ и $N_1(z)$, представленных в виде (21). Факторизуем сначала $N_1(z)$. Пусть

$$\Delta = \mathbf{R}\backslash([-1,1]\cup\Sigma) = \mathbf{R}\backslash([-1,1]\cup\Omega_1\cup V(\Omega_1)\cup\Omega_2) = \cup_k\Delta_k\,,$$

где $\Delta_k = (\alpha_k, \beta_k)$ — взаимно непересекающиеся интервалы и $|\alpha_k| \geq 1, |\beta_k| \geq 1$.

Из определения Δ следует, что конечные точки интервалов (α_k, β_k) принадлежат одному из трех непересекающихся множеств $\Omega_1, V(\Omega_1), \Omega_2$ или равны ± 1. Более того, число интервалов, концы которых принадлежат разным множествам, конечно. Действительно, если конечные точки интервала (α_k, β_k) принадлежат разным множествам, то

$$\beta_k - \alpha_k \geq \min\{\mathrm{dist}(\Omega_1, V(\Omega_1)), \mathrm{dist}(\Omega_1, \Omega_2), \mathrm{dist}(V(\Omega_1), \Omega_2)\},$$

и если бы было бесконечно много таких интервалов, то (кроме случая, когда эти интервалы сгущаются на бесконечности) некоторые из них имели бы произвольно малую длину, так что одно из расстояний $\mathrm{dist}(\Omega_1, V(\Omega_1))$, $\mathrm{dist}(\Omega_1, \Omega_2)$ $\mathrm{dist}(V(\Omega_1), \Omega_2)$ обратилось бы в нуль, что противоречит условию теоремы. (Если же эти интервалы стремятся к бесконечности, то, в силу $\Omega_2 = V(\Omega_2)$ и $\Omega_1 = V(V(\Omega_1))$, получили бы, что разные множества находятся на бесконечно малом расстоянии от нуля, что тоже противоречит условию теоремы.)

Выберем среди интервалов Δ_k те, у которых один из концов принадлежит $V(\Omega_1)$, а другой — принадлежит Ω_1 или Ω_2, или равен ± 1. Перенумеруем интервалы Δ_k так, чтобы $\Delta_1, \dots, \Delta_{k_0}$ были выбранными интервалами (их конечное число). Оставшиеся интервалы разобьем на две группы: интервалы Δ'_k, оба конца которых принадлежат $V(\Omega_1)$, и Δ''_k (все остальные). Пусть

$$\alpha_k^* = \begin{cases} \alpha_k, & \alpha_k \notin V(\Omega_1), \\ \alpha_k^{-1}, & \alpha_k \in V(\Omega_1), \end{cases} \quad \beta_k^* = \begin{cases} \beta_k, & \beta_k \notin V(\Omega_1), \\ \beta_k^{-1}, & \beta_k \in V(\Omega_1), \end{cases} \quad k = 1, \dots, k_0. \tag{24}$$

Заметим, что точки $\{\alpha_k^*\}_{k=1}^{k_0}$, $\{\beta_k^*\}_{k=1}^{k_0}$ и интервалы $V(\Delta'_k)$, Δ''_k находятся на положительном расстоянии от множества $V(\Omega_1)$.

Обозначим через $\chi_1(t)$, $\chi_2(t)$, $\chi_\Delta^{(k_0)}(t)$, $\chi'_\Delta(t)$, $\chi''_\Delta(t)$ индикаторы множеств Ω_1, Ω_2, $\cup_{k=1}^{k_0}\Delta_k$, $\cup_k \Delta'_k$, $\cup_k \Delta''_k$. Очевидно,

$$\begin{aligned} &\chi_1(t) + V(\chi_1(t)) + \chi_2(t) + \chi_\Delta^{(k_0)}(t) + V(\chi_\Delta^{(k_0)})(t) \\ &+\chi'_\Delta(t) + V(\chi'_\Delta)(t) + \chi''_\Delta(t) + V(\chi''_\Delta)(t) = 1, \quad t \neq \pm 1. \end{aligned} \tag{25}$$

Лемма 3 (факторизация $N_1(z)$). *Функция $N_1(z)$ может быть разложена на множители следующим образом:*

$$\begin{aligned} N_1(z) &= C R_{012}(z) R_{012}(z^{-1}), \qquad (26) \\ R_{012}(z) &= R_0(z) R'_0(z) R''_0(z) R_1(z) R_2(z), \end{aligned}$$

где

$$R_0(z) \;=\; \prod_{k=1}^{k_0} \Big(\frac{z-\beta_k^*}{z-\alpha_k^*}\Big)^{n(k)}, \tag{27}$$

$$n(k) = \frac{1}{\pi}\arg N^+(t) \in \mathbf{Z}, \quad t\in\Delta_k,\ k=1,\dots,k_0,$$

$$R_0'(z) \;=\; P(z, V(\chi_\Delta')\nu), \qquad R_0''(z) = P(z,\chi_\Delta''\nu)\,, \tag{28}$$

$$R_1(z) \;=\; P(z,\chi_1\nu), \qquad R_2(z) = P(z,\frac{1}{2}\chi_2\nu), \tag{29}$$

постоянная $C>0$, а числа α_k^*, β_k^* определены равенством (24). При этом функция $R_{012}(z)$ голоморфна вне множества Ω и точек ±1.*

Доказательство. То, что $R_{012}(z)$ голоморфна вне множества $\Omega\cup\{1,-1\}$, непосредственно следует из ее определения: функция $R_0(z)R_0'(z)R_0''(z)$ имеет особенности только на границе множества $\Omega_1\cup\Omega_2\cup\{-1,1\}$, функция $R_1(z)$ — на множестве Ω_1, а $R_2(z)$ — на Ω_2. Согласно (21), (25), (12),

$$N_1(z) \;=\; CP(z,\nu)$$
$$= CP(z,\Big(\chi_1+V(\chi_1)+\chi_2+\chi_\Delta^{(k_0)}+V(\chi_\Delta^{(k_0)})+\chi_\Delta'+V(\chi_\Delta')+\chi_\Delta''+V(\chi_\Delta'')\Big)\nu)$$
$$= CP(z,\chi_1\nu)P(z,V(\chi_1)\nu)P(z,\frac{1}{2}\chi_2\nu)P(z,\frac{1}{2}\chi_2\nu)$$
$$\times P(z,\chi_\Delta^{(k_0)}\nu)P(z,V(\chi_\Delta^{(k_0)}\nu)P(z,\chi_\Delta'\nu)P(z,V(\chi_\Delta')\nu)P(z,\chi_\Delta''\nu)P(z,V(\chi_\Delta'')\nu), \tag{30}$$

при этом, по свойствам (14), с учетом того, что $\nu(t)=-\nu(t^{-1})$ (см. (23)),

$$P(z,\chi_1\nu)P(z,V(\chi_1)\nu) = P(z,\chi_1\nu)P(z^{-1},\chi_1\nu) = R_1(z)R_1(z^{-1}), \tag{31}$$

$$P(z,\frac{1}{2}\chi_2\nu)P(z,\frac{1}{2}\chi_2\nu) = P(z,\frac{1}{2}\chi_2\nu)P(z^{-1},\frac{1}{2}\chi_2\nu) = R_2(z)R_2(z^{-1}), \tag{32}$$

$$P(z,\chi_\Delta'\nu)P(z,V(\chi_\Delta')\nu) = R_0'(z)R_0'(z^{-1}), \tag{33}$$

$$P(z,\chi_\Delta''\nu)P(z,V(\chi_\Delta'')\nu) = R_0''(z)R_0''(z^{-1}), \tag{34}$$

и, по определению (4),

$$P(z,\chi_\Delta^{(k_0)}\nu)P(z,V(\chi_\Delta^{(k_0)})\nu)$$

* Заметим, что формула (27) не относится к случаю, когда одно из чисел α_k^* или β_k^* обращается в бесконечность, то есть когда 0 принадлежит границе множества $V(\Omega_1)$; в этом случае соответствующий множитель в $R_0(z)$ следует определить как $P(z,\chi_{(\alpha_k^*,\beta_k^*)}n(k)\pi)$.

$$= \exp\Big\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\chi^{(k_0)}(t)+V(\chi^{(k_0)})(t))\nu(t)(\frac{1}{t-z}-\frac{t}{1+t^2})dt\Big\}$$

$$= \prod_{k=1}^{k_0}\Big(\frac{z-\beta_k}{z-\alpha_k}\Big)^{n(k)}\Big(\frac{z-\alpha_k^{-1}}{z-\beta_k^{-1}}\Big)^{-n(k)}$$

$$\times \exp\Big\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\chi^{(k_0)}(t)+V(\chi^{(k_0)})(t))\nu(t)\frac{-t}{1+t^2}dt\Big\}.$$

Последний множитель является постоянным положительным числом. Далее, совершенно очевидно, что правая часть последнего равенства не изменится, если заменить α_k, φ_k на α_k^*, φ_k^*. Поэтому

$$P(z,\chi_{\Delta}^{(k_0)}\nu)P(z,V(\chi^{(k_0)})_{\Delta}\nu) = C\prod_{k=1}^{k_0}\Big(\frac{z-\beta_k^*}{z-\alpha_k^*}\Big)^{n(k)}\Big(\frac{z-\beta_k^{*-1}}{z-\alpha_k^{*-1}}\Big)^{n(k)}.$$

Но

$$\frac{z-\beta_k^{*-1}}{z-\alpha_k^{*-1}} = \frac{\alpha_k^*}{\beta_k^*}\cdot\frac{z^{-1}-\beta_k^*}{z^{-1}-\alpha_k^*},$$

откуда

$$P(z,\chi_{\Delta}^{(k_0)}\nu)P(z,V(\chi_{\Delta}^{(k_0)}\nu) = CR_0(z)R_0(z^{-1}) \tag{35}$$

(с другой постоянной $C>0$). Таким образом, из равенств (30)–(35) следует (26), что и требовалось. ■

Факторизовав $N_1(z)$, перейдем к факторизации $N_0(z)$. Определим

$$R_3(z) = \hat{P}(z,\frac{\hat{\nu}_0}{2}). \tag{36}$$

Для $|z|\neq 1$, по свойствам (15), (16), с учетом нечетности $\hat{\nu}_0(\theta)$ и представления (21), имеем

$$R_3(z)R_3(z^{-1}) = \hat{P}(z,\frac{\hat{\nu}_0}{2})\hat{P}(z^{-1},\frac{\hat{\nu}_0}{2}) = \hat{P}(z,\frac{\hat{\nu}_0}{2})\hat{P}(z,\frac{\hat{\nu}_0}{2}) = \mathrm{C}N_0(z). \tag{37}$$

Определим теперь $R_\mu(z)$ формулой (7). Она удовлетворяет свойству (8). Поэтому, в силу определения $R_3(z)$, свойства (6) и того, что функция $R_{012}(z)$ голоморфна на единичной окружности (кроме, быть может, точек ± 1), имеем для функции

$$R_{0123\mu}(z) \equiv R_0(z)R_0'(z)R_0''(z)R_1(z)R_2(z)R_3(z)R_\mu(z) \tag{38}$$

соотношение

$$\frac{|R^{+}_{0123\mu}(\xi)|}{|R^{-}_{0123\mu}(\xi)|} = \frac{|R^{+}_{012}(\xi)|}{|R^{-}_{012}(\xi)|} \cdot \frac{|R^{+}_{3}(\xi)|}{|R^{-}_{3}(\xi)|} \cdot \frac{|R^{+}_{\mu}(\xi)|}{|R^{-}_{\mu}(\xi)|} = \mu(\xi), \quad |\xi| = 1.$$

Но, как непосредственно проверяется из определения $R_\mu(z)$, с использованием четности $\mu(\theta)$,

$$R_\mu(z)R_\mu(z^{-1}) = \mathrm{const} > 0. \tag{39}$$

Таким образом, для функции $R_{0123\mu}(z)$, определенной равенством (38), получаем из (20), (26), (37), (39)

$$R_{0123\mu}(z)R_{0123\mu}(z^{-1}) = CN(z), \quad C > 0.$$

Наконец, беря

$$R(z) \equiv \sqrt{C} R_{0123\mu}(z),$$

находим, что $R(z)$ является решением нашей задачи. ■

Факторизация (10), конечно же, не является однозначной. Как будет видно из следующей теоремы, при определенных ограничениях на функцию $N(z)$ можно накладывать дополнительные условия на поведение функции $R(z)$ вблизи своих особенностей, например, требовать существования в метрике L^p, $p \geq 1$, пределов функций $R(t \pm i\varepsilon)$, $\varepsilon \to +0$.

Определение. *Пусть A — некоторое множество вещественной прямой, $U_\delta(A)$ — его δ-окрестность, а $f(z)$ — голоморфная в $U_\delta(A) \backslash A$ функция. Будем говорить, что функция $f(z)$ локально принадлежит классу Харди H^p в окрестности множества A, если для некоторого $\delta > 0$ функции $f(t \pm i\varepsilon)$, $t \in \mathbf{R} \cap U_\delta(A)$, сходятся при $\varepsilon \to +0$ в метрике L^p.*

Теорема 3. *Пусть функция $N(z)$, множества $\Sigma, \Omega_1, \Omega_2, V(\Omega_1)$, функция $\mu(\theta)$ удовлетворяют условиям предыдущей теоремы и, кроме того, множество Ω_2 может быть покрыто конечным числом непересекающихся интервалов δ_l, на каждом из которых*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t \in \delta_l} \arg N^{+}(t) - \operatorname*{ess\,inf}_{t \in \delta_l} \arg N^{+}(t) < \pi\ .$$

Тогда функция $N(z)$ может быть разложена на множители так, чтобы выполнялись (10), (11), и функция $R(z)$ локально принадлежала классу Харди H^2 в окрестности множества Ω_2.

Доказательство. Мы только покажем, как изменяется доказательство по сравнению с теоремой 1. Вводится

$$\Delta = \mathbf{R} \backslash ([-1,1] \cup \Omega_1 \cup V(\Omega_1)) = \cup_k \Delta_k ,$$

где $\Delta_k = (\alpha_k, \beta_k)$ — взаимно непересекающиеся интервалы. Множество Ω_2 попало внутрь этих интервалов. Из дополнительного условия теоремы 3 следует, что на каждом множестве $\Delta_k \backslash \Omega_2$ функция $n(t) = n(k) = \frac{1}{\pi} \arg N(t) \in \mathbf{Z}$ постоянна. Мы продолжаем эту функцию на весь интервал Δ_k (включая, возможно, Ω_2), а также на $V(\Delta_k)$ равенством

$$\tilde{n}(t) = \begin{cases} n(k), & t \in \Delta_k, \\ -n(k), & t \in V(\Delta_k). \end{cases}$$

Далее интервалы Δ_k разбиваются на три группы: $\Delta_1, \ldots, \Delta_{k_0}$, у которых один конец принадлежит $V(\Omega_1)$, а другой — $\Omega_1 \cup \{-1, 1\}$, интервалы Δ'_k, оба конца которых принадлежат $V(\Omega_1)$, и интервалы Δ''_k (все остальные). Числа α^*_k, β^*_k, $k = 1, \ldots, k_0$, выбираются по тому же правилу, что и в теореме 2 (формулой (24). Функции $R_0(z)$, $R_1(z)$, $R_3(z)$, $R_\mu(z)$ определяются формулами (27), (29), (36), (7), функции

$$R'_0(z) \ = \ P(z, V(\chi'_\Delta)\tilde{n}\pi), \quad R''_0(z) = P(z, \chi''_\Delta \tilde{n}\pi), \quad R_2(z) = P(z, \frac{1}{2}\chi_2(\nu - \tilde{n}\pi)).$$

В остальном доказательство не изменяется. Поясним, как доказывается локальная принадлежность функции $R(z)$ пространству Харди в окрестности Ω_2. Функция $R_2(z)$ задается в мультипликативном виде $R_2(z) = P(z, \frac{1}{2}\chi_2(\nu - \tilde{n}\pi))$, причем колебания функции $\frac{1}{2}\chi_2(t)(\nu(t) - \tilde{n}(t)\pi)$ на интервале δ_l меньше, чем $\frac{\pi}{2}$. Из этого следует (см, например, [5]), что $R_2(z)$ локально принадлежит пространству Харди в окрестности любого компактного подмножества интервала δ_l. (Такие интервалы δ_l покрывают Ω_2 по условию теоремы.) В то же время, функции $R_0(z)$, $R'_0(z)$, $R''_0(z)$, $R_1(z)$, $R_3(z)$, $R_\mu(z)$ голоморфны на Ω_2, откуда получаем локальную принадлежность $R(z)$ классу Харди H^2 в окрестности множества Ω_2. ■

Заметим, что функции $R'_0(z)$, $R''_0(z)$ тоже можно записать в виде произведения вида (27) (вообще говоря, бесконечного). Однако, если интервалы Δ''_k не находятся на конечном отрезке вещественной прямой, то в выражении для $R''_0(z)$ должны появиться дополнительные множители.

Список литературы

[1] *В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский*, Теория солитонов: метод обратной задачи. Наука, Москва (1980)

[2] *Anne Boutet de Monvel and Vladimir Marchenko*, The Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equation with bounded initial data. — Mat. fiz., analiz, geom. (1997), v. 4, No. 1/2, p. 3–45.

[3] *П. Кусис*, Введение в теорию пространств H^p. Мир, Москва (1984).

[4] *Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман*, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Наука, Москва (1966).

[5] *J.V. Garnett*, Bounded analytic functions. Acad. Press, New York, London (1981).

The Riemann problem with additional singularities

M.A. Kudryavtsev

The Riemann problem is studied in the case when the unknown function has nonisolated singularities, concentrated on the real axis. The problem is used for the factorization of functions, holomorphic outside of the unit circle and the real axis, in the form of product of two functions which have singularities on the given set of the real axis.

Задача Рімана з додатковими особливостями

М.О. Кудрявцев

Розглядається задача Рімана у випадку, коли шукана функція має неізольовані особливості, які зосереджено на дійсній вісі. Цю задачу використано для факторизації функцій, голоморфних зовні одиничного кола та дійсної осі, у вигляді добутку двох функцій, що мають особливості на заданій множині дійсної осі.