Математическая физика, анализ, геометрия
2000, т. 7, № 3, с. 255–265

Аппроксимация субгармонических функций и связанные с ней вопросы многочленных асимптотик

П.З. Агранович

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
Пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61164, Украина
E-mail:agranovich@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 16 октября 1998 года
Представлена И.В. Островским

Для субгармонических функций на плоскости с массами Рисса, сосредоточенными в специального вида областях, доказаны аппроксимационные теоремы, с помощью которых исследовано поведение риссовских масс этих функций в терминах многочленных асимптотик.

Введение

В работе рассматривается задача о связи между многочленными асимптотическими представлениями функции, характеризующей распределение меры Рисса субгармонической в плоскости функции, и самой функцией.

Под n-членной асимптотикой при $t \to \infty$ функции $f(t), t > 0$, понимается возможность представления функции $f(t)$ в виде

$$f(t) = \Delta_1 t^{\rho_1} + \Delta_2 t^{\rho_2} + \ldots + \Delta_n t^{\rho_n} + \kappa(t),$$

где Δ_j — вещественные константы; $0 < [\rho_1]^* < \rho_n < \ldots < \rho_1$; а последнее слагаемое справа, то есть, функция $\kappa(t)$, мало в некотором смысле по сравнению с предыдущим членом. Аналогично понимается и выражение "многочленная асимптотика функции $f(z),\ z \to \infty$". В этой ситуации коэффициенты Δ_j являются функциями от $\theta = \arg z$, а $t = |z|$.

Задача об установлении асимптотической зависимости между ростом голоморфной функции $f(z)$ и функции $n_f(t)$, характеризующей распределение

*Как обычно, [a] означает целую часть числа a.

ее корней, является одной из ключевых проблем теории функций. В тридцатые годы Б.Я. Левин и А. Пфлюгер независимо выделили широкий класс целых функций, описав в терминах одночленных асимптотических представлений связь между "правильным" распределением корней функции и ее поведением на бесконечности; эти функции были названы функциями вполне регулярного роста (в.р.р.). Теория функций в.р.р. нашла многочисленные применения в различных разделах математики и физики. В дальнейшем она была распространена на другие классы функций*. Наряду с этим многие авторы рассматривали обобщение теории функций в.р.р. на случай многочленных асимптотик. Как было показано, при такой постановке вопроса появляются новые эффекты, которые не позволяют применять стандартные методы теории функций в.р.р.

Представление Вейерштрасса–Адамара–Брело дает возможность восстановления асимптотики целой (субгармонической) функции по заданной асимптотике функции распределения ее корней (меры Рисса). Обратная задача не только сложна, но, как было установлено в [2], наличие многочленного асимптотического представления субгармонической в плоскости функции не гарантирует существования искомого вида многочленной асимптотики меры Рисса этой функции. Следовательно, представляет интерес описание классов субгармонических функций, для которых такая связь существует. Так, в [3] показано, что если мера Рисса функции сосредоточена на конечной системе лучей, то наличие многочленного асимптотического представления субгармонической функции влечет в довольно общей ситуации существование требуемого вида многочленной асимптотики функции распределения риссовской меры. В работе [4] выделен подкласс субгармонических функций с произвольным распределением масс, для которого такая связь существует. Следует отметить, что исключительные множества, которые появляются в асимптотических представлениях функций, рассмотренных в работах [3] и [4], являются $C_{0,1}$-множествами **, тогда, как показано в [5], в общем случае многочленная асимптотика субгармонической функции может быть получена по асимптотике функции распределения меры лишь вне $C_{0,2}$-множества.

В этой статье продолжено исследование вопроса нахождения n-членного асимптотического представления меры Рисса субгармонической функции по заданной многочленной асимптотике самой функции.

*Довольно обширная библиография по этому вопросу имеется в монографии [1].

**Множество $E \subset \mathbb{C}$ называется $C_{0,\alpha}$-множеством, если его можно покрыть системой кругов $\{z : |z - z_j| < r_j\}$ так, что

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^\alpha} \sum_{|z_j|\le R} r_j^\alpha = 0.$$

1. Формулировка основных результатов

Теорема 1. *Пусть $u(z)$ — субгармоническая во всей плоскости $\mathbb{C}$ функция нецелого порядка ρ_1, представимая всюду следующим образом:* [*]

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\pi r^{\rho_j}}{\sin \pi\rho_j} \int_{\theta-2\pi}^{\theta} \cos \rho_j(\theta - \vartheta - \pi) d\Delta_j(\vartheta)$$

$$+\psi(re^{i\theta}), \quad z = re^{i\theta}, \tag{1}$$

где $p = [\rho_1] < \rho_2 < \rho_1$; функции $\Delta_j(\vartheta)$, $j = 1, 2$, таковы, что существуют интегралы в представлении (1); и для функции $\psi(z)$ справедлива асимптотическая оценка

$$\int_T^{2T} \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |\psi(re^{i\theta})|^q = o(T^{\rho_2 q+1}), \quad T \to \infty,\ q > 1. \tag{2}$$

Если носитель меры Рисса функции $u(z)$ сосредоточен в области

$$G = \{z : z = re^{i\theta}, r > 0, |\theta| < \beta(r)\} \bigcup \{0\},$$

где функция $\beta(r)$ непрерывна на полуоси $(0, \infty)$, $\beta(r) \le r^{\alpha}$, $\alpha < 1/q - 1 - (\rho_1 - \rho_2)$, то

$$\mu(t) := \mu(\{z : |z| < t\}) = \Delta_1(2\pi)t^{\rho_1} + \Delta_2(2\pi)t^{\rho_2} + \varphi(t), \tag{3}$$

причем остаточный член $\varphi(t)$ удовлетворяет следующей оценке:

$$\int_T^{2T} |\varphi(t)|^q dt = o(T^{\rho_2 q+1}), \quad T \to \infty. \tag{4}$$

При доказательстве этого факта используется аппроксимационная теорема, которая, несомненно, представляет и самостоятельный интерес.

Теорема 2. *Пусть $\beta(r)$ — непрерывная функция на полуоси $(0, \infty)$, $\beta(r) \in (0, \pi)$,*

$$D = \{\zeta = \tau e^{i\theta} : \tau > 0, |\theta| \le \beta(r)\} \bigcup \{0\}.$$

Пусть $u(z)$ — субгармоническая функция нецелого порядка ρ во всей плоскости $\mathbb{C}$, носитель меры Рисса μ которой сосредоточен в D.

[*] Случай двучленных асимптотик рассматривается в этой статье лишь для простоты изложения.

Пусть, далее, μ_1 — круговая проекция меры μ на полуось $(0,\infty)$, а $u_1(z)$ — функция, каноническое представление которой получается заменой меры μ в каноническом представлении функции $u(z)$ на меру μ_1. Тогда

$$\left(\int_T^{2T}\sup_\theta |u(re^{i\theta})-u_1(re^{i\theta})|^q dr\right)^{1/q}$$

$$\le C(u,q)\left[T^{p+\frac{1}{q}}\int_1^{\frac{T}{2}}\frac{\beta(s)}{s^p}d\mu(s)+T^{\frac{1}{q}}\int_{\frac{T}{2}}^{4T}\theta(s)d\mu(s)\right.$$

$$\left.+T^{p+1+\frac{1}{q}}\int_{4T}^{\infty}\frac{\beta(s)}{s^{p+1}}d\mu(s)+\gamma(T)T\mu(4T)\right],$$

где $p=[\rho]$, $\gamma(T)=\sup\limits_{t\in[\frac{T}{2},4T]}\beta(t)$, а $C(u,q)$ — положительная константа, зависящая лишь от функции $u(z)$ и q.

2. Доказательство аппроксимационной теоремы

Рассмотрим непрерывное отображение $h=h(\zeta)=|\zeta|$. Тогда мера μ_1 множества E есть не что иное, как мера $\mu_h, \mu_h(E)=\mu(h^{-1}(E))$. В силу представления Брело

$$u(z)=\int_{\mathbf{C}}E_p(z,\zeta)d\mu(\zeta)+\mathrm{Re}Q(z),$$

$$u_1(z)=\int_{\mathbf{C}}E_p(z,\zeta)d\mu_h(\zeta)+\mathrm{Re}Q(z),$$

где

$$E_p(z,\zeta)=\begin{cases}\mathrm{Re}\ln\left(1-\frac{z}{\zeta}\right), & |\zeta|\le 1;\\ \mathrm{Re}\left[\ln\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)+\frac{z}{\zeta}+\ldots+\frac{z^p}{p\zeta^p}\right], & |\zeta|>1.\end{cases}$$

Как легко видеть,

$$u_1(z)=\int_{\mathbf{C}}E_p(z,h(\zeta))d\mu(\zeta)+\mathrm{Re}Q(z),$$

следовательно,

$$u(z)-u_1(z)=\int_{\mathbf{C}}(E_p(z,\zeta)-E_p(z,h(\zeta))d\mu(\zeta).$$

В дальнейшем будем считать, что $T > 2$. Разобьем всю плоскость на четыре множества:

$$G_1 = \{\zeta : |\zeta| \le 1\}, \quad G_2 = \{\zeta : 1 < |\zeta| \le \frac{T}{2}\},$$

$$G_3 = \{\zeta : |\zeta| \ge 4T\}, \quad G_4 = \{\zeta : \frac{T}{2} < |\zeta| < 4T\}.$$

Обозначим

$$v_k(z) = \int\limits_{G_k} (E_p(z,\zeta) - E_p(z, h(\zeta))d\mu(\zeta), \ k = 1,2,3,$$

и

$$v_4(\zeta) = \int\limits_{G_4} \mathrm{Re}\left[\ln\frac{1-\frac{z}{\zeta}}{1-\frac{z}{h(\zeta)}} + \sum_{k=1}^{p}\frac{z^p}{p}\left(\frac{1}{\zeta^p} - \frac{1}{h^p(\zeta)}\right)\right] d\mu(\zeta) := I_1(z) + I_2(z).$$

Используя то, что супремум суммы функций не превышает суммы супремумов, и неравенство треугольника для нормы, получаем

$$J(T) = \left(\int\limits_T^{2T} (\sup_\theta |u(re^{i\theta}) - u_1(re^{i\theta})|)^q dr\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \left(\int\limits_T^{2T} (\sup_\theta |I_1(re^{i\theta})|)^q dr\right)^{\frac{1}{q}} + \sum_{k=1}^{3}\left(\int\limits_T^{2T} (\sup_\theta |v_k(re^{i\theta})|)^q dr\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \left(\int\limits_T^{2T} (\sup_\theta |I_2(re^{i\theta})|)^q dr\right)^{\frac{1}{q}} = J_1(T) + J_2(T) + J_3(T).$$

Для оценки $J(T)$ получим несколько вспомогательных неравенств. Легко видеть, что

$$\ln\frac{|1-\frac{z}{\zeta}|}{|1-\frac{z}{h(\zeta)}|} = \ln\frac{|z-\zeta|}{|z-h(\zeta)|} = \ln\left|1 + \frac{h(\zeta)-\zeta}{z-h(\zeta)}\right|$$

$$\le \ln\left(1 + \frac{|h(\zeta)-\zeta|}{||z|-|\zeta||}\right).$$

Аналогично

$$-\ln|\frac{|1-\frac{z}{\zeta}|}{|1-\frac{z}{h(\zeta)}|} \le \ln\left(1 + \frac{|h(\zeta)-\zeta|}{||z|-|\zeta||}\right).$$

Значит,

$$\left|\ln \frac{|1-\frac{z}{\zeta}|}{|1-\frac{z}{h(\zeta)}|}\right| \leq \ln\left(1+\frac{|h(\zeta)-\zeta|}{||z|-|\zeta||}\right). \tag{5}$$

Для любого натурального k

$$\left|\frac{z^k}{k}\left(\frac{1}{\zeta^k}-\frac{1}{h^k(\zeta)}\right)\right| = \frac{|z|^k|h^k(\zeta)-\zeta^k|}{k|\zeta|^{2k}} \leq \frac{|z|^k|h(\zeta)-\zeta|}{|\zeta|^{k+1}}. \tag{6}$$

И, наконец, заметим, что если $1<|\zeta|<|z|$, то

$$|E_p(z,\zeta)-E_p(z,h(\zeta))| \leq \frac{|h(\zeta)-\zeta|}{|z|-|\zeta|}+\frac{|z||h(\zeta)-\zeta|}{|\zeta|}\frac{|z|^p-|\zeta|^p}{|\zeta|^p(|z|-|\zeta|)}$$

$$= \frac{|h(\zeta)-\zeta|}{|z|-|\zeta|}\left(1+\frac{|z|(|z|^p-|\zeta|^p}{|\zeta|^{p+1}}\right) \leq \frac{|h(\zeta)-\zeta|}{|z|-|\zeta|}\frac{|z|^{p+1}}{|\zeta|^{p+1}}, \tag{7}$$

а если $|\zeta|>|z|>1$, то

$$|E_p(z,\zeta)-E_p(z,h(\zeta))| = \left|\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{z^k}{k}\left(\frac{1}{\zeta^k}-\frac{1}{h^k(\zeta)}\right)\right|$$

$$\leq |h(\zeta)-\zeta|\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{|z|^k}{|\zeta|^{k+1}} = |h(\zeta)-\zeta|\frac{|z|^{p+1}}{(|\zeta|-|z|)|\zeta|^{p+1}}. \tag{8}$$

Приступим теперь непосредственно к оценке $J(T)$. Из (5) следует, что

$$\left(\int_T^{2T}\left(\sup_\theta |v_1(re^{i\theta})|^q\right)^q dr\right)^{\frac{1}{q}} \leq 2\frac{T^{\frac{1}{q}}}{T-1}\mu(1).$$

Из (7) вытекает, что

$$\left(\int_T^{2T}\left(\sup_\theta |v_2(re^{i\theta})|\right)^q dr\right)^{\frac{1}{q}} \leq 2\left(\int_T^{2T}\left(\int_1^{\frac{T}{2}}\frac{\beta(s)}{s^p}d\mu(s)\right)^q r^{pq}dr\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{2(2^{pq+1}-1)^{1/q}}{(pq+1)^{1/q}}T^{p+\frac{1}{q}}\int_1^{\frac{T}{2}}\frac{\beta(s)}{s^p}d\mu(s).$$

Для $|\zeta|>2|z|$ в силу (8) получаем, что

$$|E_p(z,\zeta)-E_p(z,h(\zeta))| \leq 2\beta(|\zeta|)\frac{|z|^{p+1}}{|\zeta|^{p+1}},$$

а значит,

$$\left(\int_{T}^{2T}\left(\sup_{\theta}|v_3(re^{i\theta})|\right)^q dr\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq 2\left(\frac{1}{(p+1)q+1}\right)^{\frac{1}{q}}(2^{(p+1)q+1}-1)^{\frac{1}{q}}T^{p+1+\frac{1}{q}}\int_{4T}^{\infty}\frac{\beta(s)}{s^{p+1}}d\mu(s)$$

$$=\frac{2(2^{(p+1)q+1}-1)^{\frac{1}{q}}}{((p+1)q+1)^{\frac{1}{q}}}T^{p+1+\frac{1}{q}}\int_{4T}^{\infty}\frac{\beta(s)}{s^{p+1}}d\mu(s).$$

Итак, показано, что для $J_2(T)$ верна оценка

$$J_2(T)\leq 2\frac{T^{\frac{1}{q}}}{T-1}\mu(1)+\frac{2(2^{pq+1}-1)^{\frac{1}{q}}}{(pq+1)^{\frac{1}{q}}}T^{p+\frac{1}{q}}\int_{1}^{\frac{T}{2}}\frac{\beta(s)}{s^{p}}d\mu(s)$$

$$+\frac{2(2^{(p+1)q+1}-1)^{\frac{1}{q}}}{((p+1)q+1)^{\frac{1}{q}}}T^{p+1+\frac{1}{q}}\int_{4T}^{\infty}\frac{\beta(s)}{s^{p+1}}d\mu(s). \tag{9}$$

Из (6) следует, что

$$|\sum_{k=1}^{p}\frac{z^k}{k}\left(\frac{1}{\zeta^k}-\frac{1}{h^k(\zeta)}\right)|\leq|h(\zeta)-\zeta|\frac{|z|}{|\zeta|^{p+1}}\frac{|z|^p-|\zeta|^p}{|z|-|\zeta|}$$

$$\leq|h(\zeta)-\zeta|\frac{p|z|\max(|z|^{p-1},|\zeta|^{p-1})}{|\zeta|^{p+1}}\leq\beta(|\zeta|)\frac{p|z|\max(|z|^{p-1},|\zeta|^{p-1})}{|\zeta|^{p}}\beta(|\zeta|),$$

и, следовательно,

$$J_3(T)\leq p4^pT^{\frac{1}{q}}\int_{\frac{T}{2}}^{4T}\beta(\zeta)d\mu(s). \tag{10}$$

Таким образом, осталось оценить слагаемое J_1, содержащее неограниченную функцию.

$$J_1(T)\leq\left(\int_{T}^{2T}\left(\int_{G_4}\ln\left(1+\frac{\gamma(T)|\zeta|}{|r-|\zeta||}\right)d\mu(\zeta)\right)^q dr\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Пусть q_1 — число, сопряженное по Гельдеру с q, B — единичный шар в пространстве $L_{q_1}(T,2T)$. Тогда, как легко видеть,

$$J_1(T) \le \sup_{\chi\in B} \int\limits_T^{2T} \chi(r) \int\limits_{G_4} \ln\left(1+\frac{\gamma(T)|\zeta|}{|r-|\zeta|)}\right) d\mu(\zeta)dr.$$

Меняя порядок интегрирования в этом выражении, получаем, что

$$J_1(T) \le \int\limits_{G_4}\int\limits_T^{2T} \chi(r)\ln\left(1+\frac{\gamma(T)|\zeta|}{|r-|\zeta||}\right) dr d\mu(\zeta). \tag{12}$$

Обозначим внутренний интеграл через $J_{1,2}(\zeta)$ и для его оценки воспользуемся неравенством Гельдера:

$$J_{1,2}(\zeta) \le \left(\int\limits_T^{2T} \chi^{q_1}(r)dr\right)^{\frac{1}{q_1}} \left(\int\limits_T^{2T} \ln^q\left(1+\frac{\gamma(T)|\zeta|}{|r-|\zeta||}\right) dr\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \int\limits_T^{2T} \ln^q\left(1+\frac{\gamma(T)|\zeta|}{|r-|\zeta||}\right) dr := J_{1,2,3}(\zeta).$$

Так как функция $\dfrac{\tau}{|r-\tau|}$ возрастает по τ при $\tau < r$ и убывает по τ при $\tau > r$, то для $|\zeta| \le T$ справедлива оценка

$$J_{1,2,3}(\zeta) \le \int\limits_T^{2T} \ln^q\left(1+\frac{\gamma(T)T}{r-T}\right) dr = \int\limits_0^{T} \ln^q\left(1+\frac{T\gamma(T)}{\tau}\right) d\tau.$$

Если $|\zeta| \ge 2T$, то

$$J_{1,2,3}(\zeta) \le \int\limits_T^{2T} \ln^q\left(1+\frac{2T\gamma(T)}{2T-r}\right) dr = \int\limits_0^{T} \ln^q\left(1+2T\gamma(T)\tau\right) d\tau.$$

Пусть теперь $|\zeta| \in (T,2T)$. Тогда

$$J_{1,2,3}(\zeta) = \int\limits_T^{|\zeta|} \ln^q\left(1+\frac{\gamma(T)|\zeta|}{|\zeta|-r}\right) dr + \int\limits_{|\zeta|}^{2T} \ln^q\left(1+\frac{\gamma(T)|\zeta|}{r-|\zeta|}\right) dr$$

$$= \int_0^{|\zeta|-T} \ln^q \left(1 + \frac{\gamma(T)|\zeta|}{\tau}\right) d\tau + \int_0^{2T-|\zeta|} \ln^q \left(1 + \frac{\gamma(T)|\zeta|}{\tau}\right) d\tau.$$

Объединяя полученные оценки, заключаем, что при $|\zeta| \in \left[\frac{T}{2}, 4T\right]$ справедливо следующее неравенство:

$$J_{1,2} \leq J_{1,2,3}(\zeta) \leq 2 \int_0^T \ln^q \left(1 + \frac{2T\gamma(T)}{\tau}\right) d\tau$$

$$= 4\gamma(T)T \int_0^{\frac{1}{2\gamma(T)}} \ln^q \left(1 + \frac{1}{s}\right) ds \leq 4\gamma(T)T \int_0^{\infty} \ln^q \left(1 + \frac{1}{s}\right) ds.$$

Подставляя эту оценку в выражение (12), заключаем, что

$$J_1(T) \leq 4\gamma(T)T\mu(4T) \int_0^{\infty} \ln^q \left(1 + \frac{1}{s}\right) ds.$$

Отсюда, а также из (10) и (11) вытекает требуемая оценка для $J(T)$. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится следующий факт. *

Теорема А. *Пусть $u(z)$ — субгармоническая во всей плоскости $\mathbb{C}$ функция, массы Рисса которой сосредоточены на конечной системе лучей* $\arg z = \theta_j, j = 1, \ldots, n$, *и такая, что*

$$u(re^{i\theta}) = \frac{\pi r^{\rho_1}}{\sin \pi\rho_1} \sum_{j=1}^{n} \Delta_j^1 \cos \rho_1(\theta - \theta_j - \pi)$$

$$+ \frac{\pi r^{\rho_2}}{\sin \pi\rho_2} \sum_{j=1}^{n} \Delta_j^2 \cos \rho_2(\theta - \theta_j - \pi) + \psi(re^{i\theta}),$$

где $[\rho_1] < \rho_2 < \rho_1 < [\rho_1] + 1$, а функция $\psi(re^{i\theta})$ при некотором $q > 1$ удовлетворяет асимптотической оценке

$$\int_T^{2T} \sup_{0\leq\theta\leq 2\pi} |\psi(re^{i\theta})|^q dr = o(T^{\rho_2 q+1}), \quad T \to \infty.$$

*См. теорему 6 в [3].

Тогда для функций

$$\mu_j(t) := \mu(\{z : 0 < |z| < t, \arg z = \theta_j\}), \quad j = 1, \dots, n,$$

имеют место следующие асимптотические представления:

$$\mu_j(t) = \Delta_j^1 t^{\rho_1} + \Delta_j^2 t^{\rho_2} + \varphi_j(t),$$

где

$$\int_T^{2T} |\varphi_j(t)|^q dt = o(T^{\rho_2 q+1}), \quad T \to \infty.$$

Доказательство теоремы 1. Как следует из теоремы 2, мера Рисса субгармонической функции $u_1(z)$ сосредоточена лишь на одном луче. В силу наложенных на область G условий нетрудно проверить, что оценка (5) в этом случае имеет вид

$$\int\limits_T^{2T} \sup_\theta |u(re^{i\theta}) - u_1(re^{i\theta})|^q dr = o(T^{\rho_2 q+1}), \ T \to \infty,$$

а это влечет в свою очередь справедливость асимптотического представления (1) и оценки (2) для функции $u_1(z)$, а значит, и теоремы А для этой функции. Таким образом, функция $\mu_1(t)$ имеет асимптотику (3) с асимптотической оценкой (4) для остаточного члена. Но, как легко видеть, функции $\mu(t)$ и $\mu_1(t)$ имеют одинаковые асимптотические представления. Таким образом, доказательство теоремы 1 завершено.

Замечание. Если носитель меры Рисса субгармонической функции $u(z)$ сосредоточен на конечном объединении областей рассмотренного нами вида, то мера Рисса может быть, как легко видеть, снесена на конечную систему лучей. Для этого достаточно повторить приведенную при доказательстве теоремы 2 конструкцию. Полученная при этом субгармоническая функция $u_1(z)$ имеет сосредоточенную на конечной системе лучей меру Рисса и удовлетворяет условиям теоремы А. Это позволяет получить обобщение теоремы 1 на случай области, являющейся объединением областей вида G.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить проф. А.Ф. Гришина за конструктивную помощь, позволившую существенно обобщить результаты работы.

Список литературы

[1] *L.I. Ronkin*, Functions of completely regular growth of several variables. Kluwer Acad. Publ, Dordrecht (1992).

[2] *Ю.И. Любарский, М.Л. Содин*, Аналоги функций типа синуса для выпуклых областей. Препринт № 17. ФТИНТ АН Украины, Харьков (1986).

[3] *П.З. Агранович, В.Н. Логвиненко*, Аналог теоремы Валирона–Титчмарша для двучленных асимптотик субгармонической функции с массами на конечной системе лучей. — Сиб. мат. журн. (1985), т. 5, № 24, с. 3–19.

[4] *Р.С. Юлмухаметов*, Асимптотика разности субгармонических функций. — Мат. заметки (1987), т. 41, № 3, с. 348–355.

[5] *П.З. Агранович, В.Н. Логвиненко*, Многочленные асимптотические представления субгармнонической функции в плоскости. — Сиб. мат. журн. (1991), т. 32, № 1, С. 3–21.

Approximation of subharmonic functions and problems of polynomial asymptotics connected with it

P.Z. Agranovich

It is studied subharmonic functions with the Riesz masses in the special type of domains. It is established some approximation theorems and by the help of these theorems it is investigated the behavior of the Riesz masses of such functions in terms of polynomial asymptotics.

Апроксимація субгармонічних функцій та пов'язані з нею питання многочленних асимптотик

П.З. Агранович

Для субгармонічних функцій на площині з масами Рісса, що знаходяться в областях спеціальної форми, доведено апроксимаційні теореми, за допомогою яких вивчено поведінку ріссовських мас цих функцій у термінах многочленних асимптотик.