Математическая физика, анализ, геометрия
2000, т. 7, № 3, с. 266–283

К закону умножения унитарных случайных матриц

В. Васильчук

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
Пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61164, Украина
E-mail:vasilchuk@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 3 июля 2000 года
Представлена Л.А. Пастуром

Изучено нормированную считающую меру собственных значений произведения двух унитарных матриц, независимо повернутых друг относительно друга с помощью случайной унитарной (ортогональной) матрицы, которая распределена по мере Хаара, в пределе бесконечной размерности матриц. Установлено сходимость с вероятностью 1 к предельной неслучайной мере. Получено функциональное уравнение для преобразования Герглотца предельной меры.

Введение

В данной статье изучается распределение собственных значений произведения $n \times n$ случайных матриц. Мы рассматриваем произведение двух унитарных (или ортогональных) матриц и изучаем распределение его собственных значений в пределе $n \to \infty$. А именно, выражаем предельную нормированную считающую меру собственных значений произведения через таковые предельные меры множителей, предполагая, что последние существуют и что множители случайным образом повернуты друг относительно друга с помощью унитарной (ортогональной) матрицы, равномерно распределенной на соответствующей группе $U(n)$ (или $O(n)$).

Модели данного типа были впервые предложены и изучены в работе [2], где было доказано, что при некоторых условиях деленная на n считающая мера собственных значений произведения сходится по вероятности к неслучайному пределу, который является единственным решением некоторого функционального уравнения. Аналогичные задачи возникли недавно в контексте некоторого круга проблем операторных алгебр, известного теперь как свободная (некоммутативная) теория вероятностей (см. [3, 6, 8]). В частности, в этих работах было введено важное понятие S-преобразования, которое позволяет интерпретировать и обобщать функциональные уравнения для предельных распределений собственных значений, найденные в [2].

Простой метод получения функциональных уравнений для предельных распределений собственных значений, используемый в этой работе, является естественным обобщением метода, использованного в работе [4] для изучения аддитивного аналога нашей модели. Он основывается на некоторых дифференциальных тождествах для средних от гладких функций по отношению к нормированной на 1 мере Хаара на группе $U(n)$ (или $O(n)$) и на элементарных матричных тождествах, прежде всего на резольвентном тождестве. Основная идея метода такая же, как и в работе [2]: изучать не саму считающую меру, а ее некоторое интегральное преобразование, играющее роль соответствующей характеристической функции меры.

Статья построена следующим образом. В разделе 1 представлен наш основной результат (теорема 1.1) и краткое его обсуждение. В разделе 2 доказываются теоремы 1.1 и 2.1, дающие решение задачи в случае унитарных матриц. В последнем разделе кратко описывается случай ортогональных матриц.

1. Модель и основной результат

Мы изучаем ансамбль n-мерных случайных матриц V_n следующего вида:

$$V_n = V_{1,n} V_{2,n}, \tag{1.1}$$

где

$$V_{1,n} = W_n^* S_n W_n, \ V_{2,n} = U_n^* T_n U_n,$$

S_n и T_n — унитарные (или ортогональные) неслучайные матрицы, U_n и W_n — унитарные (или ортогональные) независимые случайные матрицы, равномерно распределенные на унитарной группе $U(n)$ (или на $O(n)$) по мере Хаара.

Для определенности ограничим наше рассмотрение случаем унитарных матриц и группы $U(n)$ соответственно. Результаты для ортогональных матриц и группы $O(n)$ имеют тот же вид, хотя их доказательство и более сложно технически (см. Добавление).

Мы будем изучать асимптотическое поведение при $n \to \infty$ нормированной считающей меры (НСМ) ν_n ансамбля (1.1), определенной для любого борелевского множества $\Delta \subset [0, 2\pi]$ по формуле

$$\nu_n(\Delta) = \frac{\#\{\mu_i^{(n)} \in \Delta\}}{n}, \tag{1.2}$$

где $\exp\{\mu_i^{(n)}\}$ — собственные значения матрицы V_n.

Основным техническим средством изучения мер ν (1.2) в наших рассуждениях является преобразование Герглотца. Напомним его определение и свойства (см., например, [1]), которые нам понадобятся в дальнейшем.

Утверждение 1.1. *Пусть μ — неотрицательная и нормированная на 1 мера на $[0,2\pi]$ и*

$$t(z)=\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\mu(\mathrm{d}\theta),|z|<1 \tag{1.3}$$

есть преобразование Герглотца меры μ. Тогда:

(i) функция $t(z)$ аналитична в круге $|z|<1$ и

$$|t(z)-1|\le 2|z|(1-|z|)^{-1},\ |z|<1; \tag{1.4}$$

(ii)

$$t(0)=1,\ \mathrm{Re}\ t(z)>0,\ |z|<1; \tag{1.5}$$

(iii) для любой непрерывной на $[0,2\pi]$ функции φ имеет место формула обращения

$$\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\mu(\mathrm{d}\theta)=\lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\mathrm{Re}\,t(re^{-i\theta})\mathrm{d}\theta, \tag{1.6}$$

(iv) и обратно, любая функция, удовлетворяющая (1.4), (1.5), является преобразованием Герглотца неотрицательной и нормированной на 1 меры на единичной окружности, и это взаимно однозначное соответствие между мерами и их преобразованиями Герглотца непрерывно в топологии слабой сходимости для мер и топологии сходимости на компактах в единичном круге $\{z\in\mathbf{C}:|z|<1\}$ для их преобразований Герглотца.

Главным результатом статьи является

Теорема 1.1. *Пусть V_n — случайная $n\times n$ матрица вида (1.1), и пусть нормированные считающие меры $\nu_{r,n}, r=1,2,$ матриц S_n и T_n сходятся слабо при $n\to\infty$ к неслучайным неотрицательным и нормированным на 1 мерам на единичной окружности $\nu_r, r=1,2,$ соответственно. Тогда нормированная считающая мера ν_n матрицы V_n сходится с вероятностью 1 к неслучайной неотрицательной и нормированной на 1 мере ν, чье преобразование Герглотца*

$$h(z)=\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\mu}+z}{e^{i\mu}-z}\nu(\mathrm{d}\mu),\ |z|<1, \tag{1.7}$$

является единственным решением системы

$$h^2(z) = 1 + 4z\Delta_1(z)\Delta_2(z),$$
$$2z\Delta_1(z) = h_2\left(\frac{2z\Delta_2(z)}{1+h(z)}\right) - 1, \qquad (1.8)$$
$$2z\Delta_2(z) = h_1\left(\frac{2z\Delta_1(z)}{1+h(z)}\right) - 1$$

в классе функций $h(z)$, $\Delta_{1,2}(z)$, *аналитичных в единичном круге* $|z| < 1$ *и удовлетворяющих условиям (1.4), (1.5), и*

$$|\Delta_{1,2}(z)| \le (1 - |z|)^{-1}, \ |z| < 1, \qquad (1.9)$$

где $h_{1,2}(z)$ — *преобразования Герглотца мер* $\nu_{1,2}$.

З а м е ч а н и е. Сходимость с вероятностью 1 здесь и ниже понимается как таковая в естественном вероятностном пространстве

$$\Omega = \prod_n \Omega_n,$$

где Ω_n — вероятностное пространство матриц (1.1), которое является прямым произведением соответствующих пространств матриц S_n и T_n и двух копий групп $U(n)$ для U_n и W_n.

Рассмотрим вероятностную меру μ на единичной окружности и предположим, что ее первый момент не равен нулю:

$$\mu_1 = \int_0^{2\pi} e^{i\theta}\mu(\mathrm{d}\theta) \ne 0. \qquad (1.10)$$

Определим функцию

$$\varphi_\mu(z) = -(1 + t(z))/2,$$

где $t(z)$ — преобразование Герглотца меры μ. Поскольку $\varphi'_\mu(0) = \overline{\mu_1}$, то, согласно теореме о локальном обратном, существует единственное локальное функциональное обратное $\chi_\mu(\varphi)$ к $\varphi_\mu(z)$, $\chi_\mu(\varphi_\mu(z)) = z$, определенное и аналитичное в окрестности -1 и принимающее значения в окрестности нуля. Обозначим

$$S_\mu(\varphi) = \chi_\mu(\varphi)\varphi^{-1}(1 + \varphi)$$

и назовем, согласно [8], функцию $S_\mu(\varphi)$ S-преобразованием вероятностной меры μ на единичной окружности. Используя S-преобразования $S_{1,2}$ мер $\nu_{1,2}$, можем переписать систему (1.8) в виде

$$\begin{aligned} S(\varphi(z)) &= \frac{z\Delta_1(z)}{\varphi(z)}\frac{z\Delta_2(z)}{\varphi(z)}, \\ S_r(\varphi(z)) &= -\frac{z\Delta_r(z)}{\varphi(z)}, \quad r=1,2, \end{aligned} \tag{1.11}$$

где $\varphi(z) = -(1+h(z))/2$ и $S(\varphi)$ обозначает S-преобразование предельной НСМ ν ансамбля (1.1) (т.е. меры, чье преобразование Герглотца есть $h(z)$). Тогда из системы (1.11) получим следующее замечательно простое выражение S via S_1 и S_2:

$$S(\varphi) = S_1(\varphi)S_2(\varphi), \tag{1.12}$$

найденное Войкулеску в контексте изучения C^*-алгебр (см. [7, 8]). С другой стороны, объединяя результаты об асимптотической свободности $n \times n$ унитарных, распределенных по мере Хаара матриц и неслучайных диагональных матриц [5, 7, 8] с результатами работ [3, 8], которые касаются свободной мультипликативной свертки вероятностных мер на единичной окружности, имеющих ненулевой первый момент (1.10), мы снова получим формулу (1.12).

2. Доказательство теоремы 1.1

В наших рассуждениях используем следующий набор элементарных фактов линейной алгебры.

Утверждение 2.1. *Пусть* $\mathbf{M}_n$ *— алгебра линейных операторов на* $\mathbf{C}^n$ *(т.е.* $n \times n$ *комплексные матрицы) с нормой, порожденной эвклидовой нормой пространства* $\mathbf{C}^n$.

Тогда имеет место следующее:

(i) если $M \in \mathbf{M}_n$ *и* $\{\mathrm{M}_{jk}\}_{j,k=1}^n$ *— матрица оператора* M *в любом ортонормированном базисе* $\mathbf{C}^n$*, тогда*

$$|M_{jk}| \le ||M||; \tag{2.1}$$

(ii) если $\mathrm{Tr}M = \sum\limits_{l=1}^n M_{ll}$ *, тогда*

$$\begin{aligned} |\mathrm{Tr}M| &\le n||M||, \\ |\mathrm{Tr}M_1M_2| &\le \mathrm{Tr}M_1M_1^*\mathrm{Tr}M_2M_2^*, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где M^* *— эрмитово сопряженный к* M *оператор, и если* P *есть положительно определенный оператор, тогда*

$$|\mathrm{Tr}MP| \le ||M||\mathrm{Tr}P; \tag{2.3}$$

(iii) *для любого унитарного (ортогонального) оператора M его резольвента*

$$G(z) = (M - z)^{-1} \tag{2.4}$$

определена для всех z, $|z| \neq 1$, кроме того, для всех $z_1 \neq z_2$ имеем

$$G(z_1) - G(z_2) = (z_1 - z_2)G(z_1)G(z_2); \tag{2.5}$$

(iv) *если $\{G_{jk}(z)\}_{j,k=1}^{n}$ есть матрица резольвенты $G(z)$ обратимой матрицы M в любом ортонормированном базисе $\mathbf{C}^n$, тогда*

$$|G_{jk}(z)| \leq \frac{||M^{-1}||}{1 - |z|||M^{-1}||}; \tag{2.6}$$

(v) *если M_1 и M_2 — два оператора и $G_{1,2}(z)$ — их резольвенты, тогда*

$$G_2(z) = G_1(z) - G_1(z)(M_2 - M_1)G_2(z) \tag{2.7}$$

(резольвентное тождество);

(vi) *если $G(z) = (M - z)^{-1}$рассматривается как функция от M, тогда производная $G'(z)$ резольвенты $G(z)$ относительно M удовлетворяет соотношению*

$$G'(z) \cdot X = -G(z)XG(z) \tag{2.8}$$

для любого эрмитового $X \in \mathbf{M}_n$.

Главным техническим инструментом в наших рассуждениях является следующее

Утверждение 2.2. *Пусть $\Phi : \mathbf{M}_n \to \mathbf{C}$ есть непрерывно дифференцируемая функция. Тогда следующее соотношение верно для любого $M \in \mathbf{M}_n$ и любого эрмитового $X \in \mathbf{M}_n$:*

$$\int\limits_{U(n)} \Phi'(U^*MU) \cdot [X, U^*MU]\mathrm{d}U = 0, \tag{2.9}$$

где

$$[M_1, M_2] = M_1M_2 - M_1M_2 \tag{2.10}$$

есть коммутатор M_1 и M_2, и символ

$$\int\limits_{U(n)} ...dU$$

обозначает интегрирование по $U(n)$ по нормированной мере Хаара dU.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Чтобы доказать (2.9), мы используем инвариантность меры Хаара относительно правого сдвига на группе $\mathrm{d}U = \mathrm{d}(UU_0)$, $\forall U_0 \in U(n)$, согласно которой интеграл

$$\int\limits_{U(n)} \Phi\left(e^{-i\varepsilon X} U^* M U e^{i\varepsilon X}\right) \mathrm{d}U$$

является независимым от ε для любого эрмитового $X \in \mathbf{M}_n$. Таким образом, его производная относительно ε в точке $\varepsilon = 0$ равна нулю. Эта производная есть левая часть соотношения (2.9).

Утверждение 2.3. *Система (1.8) имеет единственное решение в классе функций $h(z)$, $\Delta_{1,2}(z)$, аналитичных при $|z| < 1$ и удовлетворяющих условиям (1.4), (1.5) и (1.9).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть у системы есть два решения $(h', \Delta'_{1,2})$ и $(h'', \Delta''_{1,2})$. Обозначим $\delta h = h' - h''$, $\delta\Delta_{1,2} = \Delta'_{1,2} - \Delta''_{1,2}$ и $\delta f = f' - f''$, где $f^{','' } = (h^{',''} - 1)/2z$. Тогда, используя (1.8) и интегральное представление (1.3) для $h_{1,2}$, получим систему линейных уравнений для δf, $\delta\Delta_{1,2}$:

$$\begin{aligned} (1 + a_1(z))\delta f - b_1(z)\delta\Delta_1 - c_1(z)\delta\Delta_2 &= 0, \\ a_2(z)\delta f + \delta\Delta_1 - b_2(z)\delta\Delta_2 &= 0, \\ a_3(z)\delta f - b_3(z)\delta\Delta_1 + \delta\Delta_2 &= 0, \end{aligned} \tag{2.11}$$

где

$$a_1 = z(f' + f''), \quad b_1 = \Delta''_2, \quad c_1 = \Delta'_1,$$

$$a_2 = z\frac{s'_2 I_2(s'_2, s''_2)}{1 + zf''}, \quad b_2 = z\frac{I_2(s'_2, s''_2)}{1 + zf''}, \quad s_2^{',''} = \frac{z\Delta_2^{',''}}{1 + zf^{','' }}, \tag{2.12}$$

$$I_2(z', z'') = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\nu_2(\mathrm{d}\theta)}{(e^{i\theta} - z')(e^{i\theta} - z'')} \tag{2.13}$$

и a_3, b_3 могут быть получены из a_2 и b_2 заменой местами индексов 2 и 1 в приведенных выше формулах.

Для любого $0 < d_0 \le 1/4$ рассмотрим область

$$D(d_0) = \{z \in \mathbf{C} : |z| \le d_0\}. \tag{2.14}$$

Ввиду (1.4) и (1.9), получаем, что при $z \in D(d_0)$

$$\left|s_{1,2}^{',''}\right| \le 1/2, \quad \left|I_{1,2}(s'_{1,2}, s''_{1,2})\right| \le 4$$

и, следовательно,

$$a_r = o(1), \quad r = 1, 2, 3, \quad b_{2,3} = o(1), \quad z \to 0\,.$$

Таким образом, детерминант $1+a_1-b_2b_3+b_1a_2+c_1a_3-a_1b_2b_3+b_1b_3a_3+c_1a_2b_3$ системы (2.11) асимптотически равняется 1. Следовательно, если d_0 в (2.14) достаточно мало, то система (2.11) имеет лишь тривиальное решение, т.е. система (1.8) однозначно разрешима.

Ниже мы используем обозначение

$$\int\limits_{U(n)} (\cdot)\mathrm{d}U = \langle\cdot\rangle.$$

Доказательство теоремы 1.1. Ввиду унитарной инвариантности собственных значений унитарных матриц можем, не ограничивая общности, положить унитарную матрицу W в (1.1) равной единичной. Ниже по тексту опускаем индексы n во всех случаях, когда это не ведет к двусмысленности. Напишем резольвентное тождество (2.7) для пары $(V, 0)$:

$$G(z)V_1V_2 = zG(z) + I. \tag{2.15}$$

Используя утверждение 2.2 с $\Phi(M) = \big((V_1U^*MU - z)^{-1}\big)_{ab}$, получим, ввиду (2.8) и (2.9):

$$\langle (GV_1[X, V_2]G)_{ab}\rangle = 0.$$

Выбирая эрмитову матрицу X с только (a, b)-м отличным от нуля элементом, получим

$$\langle (G(z)V_1)_{aa}(V_2G(z))_{bb}\rangle = \langle (G(z)V_1V_2)_{aa}G_{bb}(z)\rangle \tag{2.16}$$

Применяя к этому соотношению операцию $n^{-2}\sum\limits_{a,b=1}^{n}$ и приняв во внимание тождество (2.15), получим соотношение

$$\langle \delta_{1,n}(z)\delta_{2,n}(z)\rangle = \langle g_n(z)\rangle + \langle zg_n(z)g_n(z)\rangle\,, \tag{2.17}$$

где

$$\begin{gathered} \delta_{r,n}(z) = n^{-1}\mathrm{Tr}G(z)V_r, \quad r = 1, 2, \\ g_n(z) = n^{-1}\mathrm{Tr}G(z) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\nu_n(\mathrm{d}\mu)}{e^{i\mu} - z}, \quad |z| < 1. \end{gathered} \tag{2.18}$$

Определим центрированные величины

$$g_n^\circ(z) = g_n(z) - f_n(z), \quad \delta_{r,n}^\circ(z) = \delta_{r,n}(z) - \Delta_{r,n}(z), \quad r = 1, 2, \tag{2.19}$$

где
$$f_n(z) = \langle g_n(z)\rangle, \quad \Delta_{r,n}(z) = \langle \delta_{r,n}(z)\rangle, \quad r = 1, 2. \tag{2.20}$$

Таким образом, получаем из (2.17) соотношение

$$(1 + zf_n(z))f_n(z) = \Delta_{1,n}(z)\Delta_{2,n}(z) + r_{1,n}(z), \tag{2.21}$$

где
$$r_{1,n}(z) = \langle \delta^{\circ}_{1,n}(z)\delta_{2,n}(z)\rangle - \langle z g^{\circ}_n(z) g_n(z)\rangle. \tag{2.22}$$

Мы покажем в следующей теореме 2.1, что существуют величины $0 < d_0 < 1$ и $C(d_0) > 0$, обе независимые от n и такие, что дисперсии

$$v_1(z) = \langle |g^{\circ}_n(z)|^2\rangle, \; v_{1+r}(z) = \langle |\delta^{\circ}_{r,n}(z)|^2\rangle, \; r = 1, 2, \tag{2.23}$$

удовлетворяют следующим неравенствам при $|z| \le d_0$:

$$v_1(z) \le \frac{C(d_0)}{n^2}, \; v_{1+r}(z) \le \frac{C(d_0)}{n^2}. \tag{2.24}$$

Кроме того, ввиду (2.6), имеем

$$|\delta_{r,n}(z)| \le \frac{1}{1 - |z|}, \quad r = 1, 2, \quad |g_n(z)| \le \frac{1}{1 - |z|}. \tag{2.25}$$

Из этих оценок и неравенства Шварца для среднего $\langle ... \rangle$ следует, что равномерно по n при $|z| \le d_0$

$$|r_{1,n}(z)| \le v_2^{1/2} v_3^{1/2} + d_0 v_1 \le \frac{2C(d_0)}{n^2} = O(n^{-2}). \tag{2.26}$$

Рассмотрим матрицу

$$Y_1 = T^* U G(z) S U^* T. \tag{2.27}$$

Очевидно, что $\delta_{1,n}(z) = n^{-1}\mathrm{Tr}Y_1$. С другой стороны, используя тождество (2.5) для пары ($G(z)$,$G(0)$), получаем

$$Y_1 = T^* + zZ_1, \tag{2.28}$$

где
$$Z_1 = T^* U G(z) U^*. \tag{2.29}$$

Используя следующую матричнозначную функцию от U

$$(T^* U G(z) U^*)_{ac}$$

и аналог соотношения (2.9), полученный из инвариантности меры Хаара относительно левого группового сдвига, имеем

$$\langle (T^*[X, UG(z)U^*])_{ac}\rangle - \langle (T^*UG(z)SU^*[T,X]UG(z)U^*)_{ac}\rangle = 0.$$

Выбирая матрицу X с только (b,c)-м ненулевым элементом, получаем

$$\begin{aligned} &T^*_{ab}\langle (UG(z)U^*)_{cc}\rangle - \langle (Y_1)_{ab}(UG(z)U^*)_{cc}\rangle \\ &= \langle (Z_1)_{ab}I_{cc}\rangle - \langle (Y_1T^*)_{ab}(TUG(z)U^*)_{cc}\rangle. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Применяя к равенству (2.30) операцию $n^{-1}\sum\limits_{c=1}^{n}$, получаем матричное соотношение

$$\langle Z_1\rangle = T^*f_n(z) - \langle Y_1 g_n(z)\rangle + \langle Y_1T^*\delta_{2,n}(z)\rangle. \tag{2.31}$$

Перегруппировка членов в (2.31), согласно (2.19), и использование (2.28) влекут

$$\langle Z_1\rangle = \frac{\Delta_2(z)}{1+zf_n(z)}\langle Y_1\rangle T^* + R, \tag{2.32}$$

где

$$R = (1+zf_n(z))^{-1}(\langle Y_1T^*\delta^\circ_{2,n}(z)\rangle - \langle Y_1 g^\circ_n(z)\rangle). \tag{2.33}$$

Подставляя (2.32) в (2.28), получаем

$$\langle Y_1\rangle(T - z\Delta_2(z)(1+zf_n(z))^{-1}I) = I + zRT. \tag{2.34}$$

Кроме того, вследствие (2.25), имеем для $|z|\le 1/4$

$$|z\Delta_{2,n}(z)(1+zf_n(z))^{-1}| \le 1/2;$$

следовательно, при $|z| < 1/4$ матрица

$$P = T - z\Delta_{2,n}(z)(1+zf_n(z))^{-1}I \tag{2.35}$$

равномерно по n обратима и

$$||P^{-1}|| \le 2.$$

Таким образом, получаем из (2.34) соотношение

$$\langle Y_1\rangle = G_2\left(\frac{z\Delta_2(z)}{1+zf_n(z)}\right) + zRTP^{-1},$$

где $G_2(z) = (T-z)^{-1}$. Применяя к этому равенству операцию $n^{-1}\mathrm{Tr}$ и используя (2.33), получаем соотношение

$$\Delta_1(z) = f_{2,n}\left(\frac{z\Delta_2(z)}{1+zf_n(z)}\right) + r_{2,n}(z), \tag{2.36}$$

где

$$f_{2,n}(z) = n^{-1}\mathrm{Tr}G_2(z) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\nu_{2,n}(\mathrm{d}\mu)}{e^{i\mu} - z}, \quad |z| < 1, \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned} r_{2,n}(z) = \frac{z}{1+zf(z)} \quad & \{\langle n^{-1}\mathrm{Tr}UG(z)SU^*P^{-1}\delta^\circ_{2,n}(z)\rangle - \\ & -\langle n^{-1}\mathrm{Tr}G(z)TUGSU^*P^{-1}g^\circ_n(z)\rangle\}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Из оценок (2.6), (2.24), (2.25) и неравенства Шварца следует, что равномерно по n при $|z| \le d_0 \le 1/4$

$$|r_{2,n}(z)| \le v_3^{1/2} + v_1^{1/2} \le 2C^{1/2}(d_0)n^{-1} = O(n^{-1}). \tag{2.39}$$

Используя приведенные выше рассуждения для матриц

$$G_U(z) = UG(z)U^* = (USU^*T - z)^{-1}, \quad Y_2 = SU^*TG_UUS^*, \quad Z_2 = U^*G_UUS,$$

в которых роли S и T меняются местами, получаем аналогичное (2.36) соотношение для $\Delta_{2,n}(z)$. Таким образом, мы получили систему

$$\begin{aligned} f_n(z) + zf_n^2(z) \quad &= \Delta_{1,n}(z)\Delta_{2,n}(z) + r_{1,n}(z), \\ \Delta_{1,n}(z) \quad &= f_{2,n}\left(\frac{z\Delta_{2,n}(z)}{1+zf_n(z)}\right) + r_{2,n}(z), \\ \Delta_{2,n}(z) \quad &= f_{1,n}\left(\frac{z\Delta_{1,n}(z)}{1+zf_n(z)}\right) + r_{3,n}(z), \end{aligned} \tag{2.40}$$

где $r_{s,n}(z) = O(n^{-1})$, $s = 1, 2, 3$.

Используя соотношение между преобразованием Герглотца $q_n(z)$ меры ν_n

$$q_n(z) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{i\mu}+z}{e^{i\mu}-z}\nu_n(\mathrm{d}\mu), \ |z| < 1, \tag{2.41}$$

и $g_n(z)$

$$q_n(z) = 1 + 2zg_n(z), \tag{2.42}$$

получаем из системы (2.40) систему

$$\begin{aligned} h_n^2(z) - 1 &= 4z\Delta_{1,n}(z)\Delta_{2,n}(z) + 4zr_{1,n}(z), \\ 2z\Delta_{1,n}(z) &= h_{2,n}\left(\frac{2z\Delta_{2,n}(z)}{1+h_n(z)}\right) - 1 + 2zr_{2,n}(z), \\ 2z\Delta_{2,n}(z) &= h_{1,n}\left(\frac{2z\Delta_{1,n}(z)}{1+h_n(z)}\right) - 1 + 2zr_{3,n}(z), \end{aligned} \tag{2.43}$$

где $h_n(z) = \langle q_n(z) \rangle$ и $h_{s,n}$, $s = 1, 2$, — преобразования Герглотца мер ν_n, и $\nu_{s,n}$, $s = 1, 2$, соответственно.

Из оценок

$$|h_n(z)| \le \frac{2}{1 - |z|}, \ |\Delta_{r,n}(z)| \le \frac{|z|}{1 - |z|}, \ r = 1, 2\,, \tag{2.44}$$

следует, что последовательности $\{h_n(z)\}$ и $\{\Delta_{r,n}(z)\}$, $r = 1, 2$, есть последовательности аналитических и равномерно по n ограниченных функций при $|z| < 1$. Следовательно, эти последовательности компактны относительно равномерной сходимости на любом компакте в области $D(d_0)$ (2.14). Кроме того, согласно условиям теоремы, нормированные считающие меры $\nu_{r,n}$, $r = 1, 2$, матриц $V_{r,n}$, $r = 1, 2$, сходятся слабо к предельным мерам ν_r, $r = 1, 2$. Таким образом, их преобразования Герглотца сходятся равномерно на компактах в $D(d_0)$ к преобразованиям Герглотца $h_{1,2}(z)$ мер $\nu_{1,2}$. Следовательно, если $1 > d_0 > 0$ достаточно мало, то существуют три аналитические в области (2.14) функции $h(z)$ и $\Delta_{1,2}(z)$, удовлетворяющие системе (1.8), чья однозначная разрешимость в классе функций, удовлетворяющих (1.4), (1.5) и (1.9) при $z \in D(d_0)$, доказана в утверждении 2.3. Кроме того, все три функции $h(z)$, $\Delta_{1,2}(z)$ аналитичны a priori при $|z| < 1$. Ввиду слабой компактности вероятностных мер и непрерывности взаимно однозначного соответствия между неотрицательными мерами на единичной окружности и их преобразованиями Герглотца (см. утверждение 1.1 (iv)), существует единственная неотрицательная мера ν такая, что $h(z)$ допускает представление (1.7), где ν — вероятностная мера.

Мы заключаем, что вся последовательность $\{h_n(z)\}$ сходится равномерно на компактах области $D(d_0)$ с $d_0 < 1/5$ к предельной функции $h(z)$, удовлетворяющей системе (1.8). Из этого результата, теоремы 3.1, соотношения (2.42) и леммы Бореля–Кантелли следует, что последовательность $\{q_n(z)\}$ сходится с вероятностью 1 к функции $h(z)$ для любого фиксированного $z \in D(d_0)$. Поскольку сходимость последовательности аналитических функций на любом счетном множестве, имеющем точку сгущения в их общей области определения, влечет равномерную сходимость последовательности на любом компакте в области, получаем сходимость $q_n(z)$ к $h(z)$ с вероятностью 1 на любом компакте в $D(d_0), d_0 < 1$. Ввиду непрерывности взаимно однозначного соответствия между вероятностными мерами на единичной окружности и их преобразованиями Герглотца, НСМ ν_n (1.2) случайной матрицы (1.1) сходится слабо с вероятностью 1 к неслучайной мере ν, чье преобразование Герглотца удовлетворяет (1.8).

Теорема 2.1. *Пусть V_n — случайная матрица вида (1.1), удовлетворяющая условиям теоремы 1.1. Обозначим*

$$g_n(z) = n^{-1}\mathrm{Tr}(V-z)^{-1},\ \delta_{r,n}(z) = n^{-1}\mathrm{Tr}V_r(V-z)^{-1}, \quad r=1,2. \tag{2.45}$$

Тогда существуют величины d_0 и $C(d_0)$, обе положительные, независимые от n и такие, что дисперсии величин (2.45) удовлетворяют следующим оценкам при $|z| \le d_0 < 1$:

$$v_1 = \langle |(g_n(z) - \langle g_n(z)\rangle)|^2\rangle \le \frac{C(d_0)}{n^2}\,, \tag{2.46}$$

$$v_{1+r} = \langle |\delta_{r,n}(z) - \langle \delta_{r,n}(z)\rangle|^2\rangle \le \frac{C(d_0)}{n^2}, \quad r=1,2\,. \tag{2.47}$$

Доказательство. Для краткости ниже будем использовать обозначения $g(z)$ и $\delta_{1,2}(z)$ для $g_n(z)$ и $\delta_{1,n}(z)$, $\delta_{2,n}(z)$.

В доказательстве используем тот же подход, что и в предыдущей теореме 1.1, т.е. мы выводим и изучаем соотношения, получаемые с помощью утверждения 2.2 и резольвентного тождества.

Рассмотрим матрицу

$$L_1 = \langle \overline{g}^\circ(z)G(z)\rangle, \tag{2.48}$$

где $g^\circ(z) = g(z) - \langle g(z)\rangle$ и верхняя черта обозначает комплексное сопряжение. Ясно, что $n^{-1}\mathrm{Tr}L$ есть дисперсия (2.46), которую мы обозначили, как $v_1(z)$:

$$v_1(z) = n^{-1}\mathrm{Tr}L_1 = \langle |g^\circ(z)|^2\rangle\,. \tag{2.49}$$

Применяя утверждение 2.2 к функции

$$\Phi(M) = (G^*)^\circ_{aa}(z)G_{cd}(z),$$

где $G(z) = (V_1M - z)^{-1}$, получаем соотношение

$$\langle (G(z)V_1[X,V_2]G(z))^*_{aa}G_{cd}(z)\rangle + \langle (G^*)^\circ_{aa}(z)(G(z)V_1[X,V_2]G(z))_{cd}\rangle = 0\,.$$

Выбирая в качестве X эрмитову матрицу, имеющую ненулевым только (c,j)-й элемент, получаем из предыдущего соотношения следующее:

$$\langle (G(z)V_1)^*_{ac}(V_2G(z))^*_{ja}G_{cd}(z)\rangle + \langle (G^*)^\circ_{aa}(z)(G(z)V_1)_{cc}(V_2G(z))_{jd}\rangle$$
$$-\langle (G(z)V)^*_{ac}G^*_{ja}(z)G_{cd}(z)\rangle - \langle (G^*)^\circ_{aa}(z)(G(z)V)_{cc}G_{jd}(z)\rangle = 0\,.$$

Применяя к этому равенству операцию $n^{-2}\sum\limits_{a,c=1}^{n}$, принимая во внимание тождество (2.15) и то, что

$$g^\circ(z) = n^{-1}\sum_a G^\circ_{aa}(z), \tag{2.50}$$

получаем

$$\begin{aligned} &n^{-2}(-\langle (V_2 G^2(z) V_1)^* G(z)\rangle + \langle (G^2(z)V)^* G(z)\rangle) \\ &-\langle \overline{g}^\circ(z)\delta_1(z) V_2 G(z)\rangle + z\langle \overline{g}^\circ(z) g(z) G(z)\rangle + \langle \overline{g}^\circ(z) G(z)\rangle = 0. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Вводя снова центрированные величины

$$\delta_{1,2}^\circ = \delta_{1,2} - \langle \delta_{1,2}\rangle \tag{2.52}$$

и принимая во внимание, что $V_2 G = zV_1^* G + V_1^*$, получаем из (2.51) соотношение

$$\begin{aligned} ((1+zf(z))I - z\Delta_1(z)V_1^*)L_1 = \ & \langle \overline{g}^\circ(z)\delta_1^\circ(z) V_2 G(z)\rangle \\ & -\langle \overline{g}^\circ(z) g^\circ(z) z G(z)\rangle + R_1, \end{aligned} \tag{2.53}$$

где

$$R_1 = n^{-2}(\langle (V_2 G(z)^2 V_1)^* G(z)\rangle - \langle \overline{G^2(z)V} G(z)\rangle).$$

Кроме того, вследствие (2.25) и (2.44) матрица $P_1 = (1+zf(z))I - z\Delta_1(z)V_1^*$ равномерно по n обратима при $|z| \le 1/5$, следовательно, имеем равномерную по n оценку

$$||P_1^{-1}|| \le 2.$$

Таким образом, получаем из (2.53) соотношение

$$L_1 = \langle \overline{g}^\circ(z)\delta_1^\circ(z) P_1^{-1} V_2 G(z)\rangle - \langle \overline{g}^\circ(z) g^\circ(z) P_1^{-1} z G(z)\rangle + P_1^{-1} R_1. \tag{2.54}$$

Применяя к этому равенству операцию $n^{-1}\mathrm{Tr}$, получим в левой части дисперсию $v_1(z)$ (2.49). Что касается правой части, ее члены могут быть оценены при $|z| \le d_0 \le 1/5$ следующим образом, ввиду (2.6):

(i)

$$|\langle \overline{g}^\circ(z)\delta_1^\circ(z) n^{-1}\mathrm{Tr} P_1^{-1} V_2 G(z)\rangle| \le \frac{5}{2} v_1^{1/2} v_2^{1/2}; \tag{2.55}$$

(ii)

$$|\left\langle \overline{g}^\circ(z) g^\circ(z) n^{-1}\mathrm{Tr} P_1^{-1} z G(z)\right\rangle| \le \frac{1}{2} v_1; \tag{2.56}$$

(iii)

$$\left|\left\langle n^{-3}\mathrm{Tr} P_1^{-1}\left\{(V_2 G^2(z) V_1)^* G(z) - (G^2(z)V)^* G(z)\right\}\right\rangle\right| \le \frac{4(5/4)^3}{n^2}. \tag{2.57}$$

Таким образом, получено неравенство

$$v_1 \le \alpha_{12}(d_0) v_1^{1/2} v_2^{1/2} + \frac{\beta_1(d_0)}{n^2}, \tag{2.58}$$

где

$$\alpha_{12}(d_0) = 5,\ \beta_1(d_0) = 16. \tag{2.59}$$

Теперь выведем аналогичные неравенства для дисперсий v_2 и v_3, определенных в (2.47), и получим систему

$$v_i \le \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \alpha_{ij}(d_0) v_i^{1/2} v_j^{1/2} + \frac{\beta_i(d_0)}{n^2}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.60}$$

Чтобы получить второе неравенство системы, рассмотрим матрицу

$$L_2 = \langle \overline{\delta}_1^{\circ}(z) Y_1 \rangle, \tag{2.61}$$

где Y_1 определено в (2.27). Согласно (2.28) и (2.45), имеем

$$\delta_1^{\circ}(z) = Y_1^{\circ} = z Z_1^{\circ}, \quad L_2 = \langle \overline{\delta}_1^{\circ}(z) z Z_1 \rangle, \quad v_2 = n^{-1} \mathrm{Tr} L_2, \tag{2.62}$$

где Z_1 определено в (2.29). Используя для следующей функции от U

$$z\overline{z} \left((T^* U G(z) U^*)^* \right)^{\circ}_{aa} \left(T^* U G(z) U^* \right)_{cd}$$

аналог утверждения 2.2, полученный из инвариантности меры Хаара относительно левого сдвига на группе, получим матричное соотношение (cf. (2.31))

$$L_2 = T^* z \langle \overline{\delta}_1^{\circ}(z) g(z) \rangle - z \langle \overline{\delta}_1^{\circ}(z) Y_1 g(z) \rangle + z \langle \overline{\delta}_1^{\circ}(z) Y_1 T^* \delta_2(z) \rangle + R_2, \tag{2.63}$$

где

$$\begin{aligned} R_2 = \;& n^{-2} z\overline{z} \langle Z_1 \{ (UG(z)U^*T^*)^* - (UG(z)U^*Y_1)^* \\ & -(Z_1)^* + (TUG(z)U^*Y_1T^*)^* \} \rangle. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Перегруппировывая члены в (2.63) согласно (2.52) и используя (2.28), получаем

$$\begin{aligned} L_2 \left(T - \frac{z\Delta_2(z)}{1 + zf(z)} \right) (1 + zf(z)) = \;& z \langle \overline{\delta}_1^{\circ}(z) g^{\circ}(z) \rangle I - \langle \overline{\delta}_1^{\circ}(z) z Y_1 T g^{\circ}(z) \rangle \\ & + \langle \overline{\delta}_1^{\circ}(z) z Y_1 \delta_2^{\circ}(z) \rangle + R_2 T. \end{aligned}$$

Как было показано в доказательстве теоремы 1.1, при $|z| < 1/4$ матрица $P = T - z\Delta_{2,n}(z)(1 + zf_n(z))^{-1} I$ равномерно обратима по n и

$$||P^{-1}|| \le 2.$$

Таким образом, получаем соотношение

$$L_2 = (1+zf(z))^{-1}(\langle\overline{\delta}_1^\circ(z)g^\circ(z)z(I-zY_1T)P^{-1}\rangle+\langle\overline{\delta}_1^\circ(z)\delta_2^\circ(z)zY_1P^{-1}\rangle+R_2TP^{-1}).$$

Применяя к этому равенству операцию $n^{-1}\mathrm{Tr}$, получим в левой части дисперсию $v_2(z)$ (2.62). Члены в правой части могут быть оценены при $|z| \le d_0 \le 1/5$ следующим образом, ввиду (2.6):

(i)

$$\left|\frac{z}{1+zf(z)}\langle\overline{\delta}_1^\circ(z)g^\circ(z)n^{-1}\mathrm{Tr}(I-zY_1T)P^{-1}\rangle\right| \le 2d_0v_2^{1/2}v_1^{1/2}; \qquad (2.65)$$

(ii)

$$\left|\frac{z}{1+zf(z)}\langle\overline{\delta}_1^\circ(z)\delta_2^\circ(z)n^{-1}\mathrm{Tr}Y_1P\rangle\right| \le 4d_0v_2^{1/2}v_3^{1/2}; \qquad (2.66)$$

(iii)

$$\begin{aligned}\frac{|z|^2}{|1+zf(z)|}&|\langle n^{-3}\mathrm{Tr}Z_1\{(UG(z)U^*T^*)^* - (UG(z)U^*Y_1)^*\\ &-(Z_1)^* + (TUG(z)U^*Y_1T^*)^*\}TP^{-1}\rangle| \le \frac{10d_0^2}{n^2}.\end{aligned} \qquad (2.67)$$

Эти оценки влекут второе неравенство системы (2.60), где

$$\alpha_{21}(d_0) = 2d_0, \quad \alpha_{23}(d_0) = 4d_0, \quad \beta_2(d_0) = 10d_0^2. \qquad (2.68)$$

Рассмотрев матрицу $L_3 = \langle\overline{\delta}_2^\circ(z)Y_2\rangle$ и использовав для нее приведенные выше рассуждения, в которых роли S и T поменяются местами, получим третье неравенство системы (2.60), где

$$\begin{gathered}\alpha_{31}(d_0) = \alpha_{21}(d_0) = 2d_0, \quad \alpha_{32}(d_0) = \alpha_{23}(d_0) = 4d_0,\\ \beta_3(d_0) = \beta_2(d_0) = 10d_0^2.\end{gathered} \qquad (2.69)$$

Введя новые переменные $u_1 = v_1^{1/2}$, $u_2 = d_0^{-1/2}v_2^{1/2}$, $u_3 = d_0^{-1/2}v_3^{1/2}$, получим из системы (2.60) и соотношений (2.59), (2.68) и (2.69) систему

$$u_i^2 \le \sum_{j=1, j\ne i}^{3} a_{ij}u_iu_j + \frac{\gamma_i}{n^2}\,,\ i = 1,2,3, \qquad (2.70)$$

в которой коэффициенты $\{a_{ij}, i \ne j\}$ будут иметь вид $a_{ij} = d_0^{1/2}b_{ij}$, где b_{ij} и γ_i ограничены по d_0 и n при $d_0 \to 0$ и $n \to \infty$. Выбирая d_0 достаточно малым (а затем фиксируя его), можем гарантировать, что $0 \le a_{ij} \le 1/4$, $i \ne j$. Таким образом, суммируя все три неравенства системы(2.70), можем переписать результат в виде $(cu, u) \le \gamma/n^2$, где $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ и $c_{ij} = \delta_{ij} - (1-\delta_{ij})/4$, $i,j = 1,2,3$. Поскольку минимальное собственное значение матрицы c есть $1/2$, получаем оценки (2.46) и (2.47).

3. Добавление

В этой статье мы оперируем с унитарными матрицами S_n, T_n, U_n и W_n в ансамбле (1.1). Естественно рассмотреть также случай ортогональных S_n, T_n, U_n и W_n. Такая модель может быть изучена с помощью аналога формулы (2.9) для ортогональной группы $O(n)$. Действительно, легко проверить, что этот аналог будет иметь вид

$$\int\limits_{\mathbf{O}(n)} \Phi'(O^T MO) \cdot [X, O^T MO] \mathrm{d}O = 0,$$

где O^T — транспонированная матрица O и X — вещественная антисимметрическая матрица. Используя эту формулу, получим, например, вместо (2.16) соотношение

$$\langle (GV_1)_{aa}(V_2G)_{bb}\rangle - \langle (GV_1)_{ab}(V_2G)_{ab}\rangle = \langle (GV_1V_2)_{aa}G_{bb}\rangle - \langle (GV_1V_2)_{ab}G_{ab}\rangle.$$

Вторые члены в обеих частях этого тождества дадут два дополнительных члена в соотношение (2.22)

$$-\left\langle n^{-2}\mathrm{Tr}(GV_1)^T V_2 G\right\rangle + \left\langle n^{-2}\mathrm{Tr}(GV_1V_2)^T G\right\rangle.$$

Однако, эти члены вносят асимптотически малый вклад в остаток (2.22), так как, ввиду (2.2), (2.3) и (2.6), имеем

$$\left|\left\langle n^{-2}\mathrm{Tr}(GV_1)^T V_2 G\right\rangle - \left\langle n^{-2}\mathrm{Tr}(GV_1V_2)^T G\right\rangle\right| \le \frac{2}{n(1-d_0)^2}$$

Аналогичные и так же исчезающие при $n \to \infty$ члены возникают в формулах (2.22), (2.38), (2.40) и в доказательстве теоремы 1.1. В доказательстве теоремы 2.1 дополнительные члены вида

$$n^{-1}\alpha_{ij}(d_0)v_i^{1/2} \quad n^{-2}\beta_i(d_0)$$

появляются в правой части формулы (2.60), что, как легко проверить, также не влияет на конечный результат. Таким образом, получим в этом случае ту же систему (1.8), определяющую преобразование Герглотца предельной НСМ аналога ансамбля (1.1) с ортогональными S_n и T_n и ортогональными, распределенными по мере Хаара U_n и W_n.

Я благодарен проф. Л.А. Пастуру за многочисленные полезные дискуссии во время работы над этой статьей.

Список литературы

[1] *Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман*, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Наука, Москва, (1966).

[2] *В.А. Марченко, Л.А. Пастур*, Распределение собственных значений в некоторых ансамблях случайных матриц. — Мат. сб. (1967) т. 72, с. 507–536.

[3] *H. Bercovici and D.V. Voiculescu*, Free convolution of measures with unbounded support. — Indiana Univ. Math. J. (1993) v. 42, p. 733–773.

[4] *L. Pastur and V. Vasilchuk*, On the law of addition of random matrices (submitted in Commun. Math. Phys.).

[5] *R. Speicher*, Free convolution and the random sum of matrices. — Publ. Res. Inst. Math. Sci. (1993) v. 29, p. 731–744.

[6] *D.V. Voiculescu*, Limit laws for random matrices and free products. — Invent. Math. (1991) v. 104, p. 201–220.

[7] *D.V. Voiculescu*, A strengthened asymptotic freeness result for random matrices with applications to free entropy. — Inter. Math. Res. Not. (1998) v. 1, p. 41–62.

[8] *D.V. Voiculescu, K.J. Dykema, and A. Nica*, Free Random Variables, CRM Monograph Series. Providence, RI (1992).

On the law of multiplication of unitary random matrices

V. Vasilchuk

Normalized eigenvalue counting measure of the product of two unitary matrices rotated independently with respect to each other by the random unitary (or orthogonal) Haar distributed matrix is studied in the limit of infinite matrix order. Convergence with probability 1 to a limiting nonrandom measure is established. The functional equation for the Herglotz transform of the limiting measure is obtained.

До закону множення унітарних випадкових матриць

В. Васильчук

Вивчено нормовану рахуючу міру власних значень добутку двох унітарних матриць, які незалежно обернуті одна відносно одної за допомогою випадкової матриці, що розподілена за мірою Хаара, у границі нескінченного виміру матриць. Встановлено збіжність із ймовірністю 1 до граничної невипадкової міри. Отримано функціональне рівняння для перетворення Герглотца граничної міри.