Математическая физика, анализ, геометрия
2000, т. 7, № 3, с. 299–307

О комплексно строго выпуклой комплексификации банаховых пространств

В.М. Кадец, А.Ю. Келлерман

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
Пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина
E-mail:vkadets@kadets.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 6 июля 1999 года
Представлена И.В. Островским

Показано, что любое вещественное сепарабельное нормированное пространство можно так комплексифицировать, что получившееся комплексное пространство будет комплексно строго выпуклым. Также показано, что это же верно и для некоторых классов несепарабельных пространств, например, для пространств X, обладающих 1-нормирующими сепарабельными подпространствами в X^*, однако существуют пространства ($\ell_\infty(\Gamma)$), не обладающие комплексно строго выпуклыми комплексификациями.

1. Введение

Пусть X — вещественное линейное пространство. На $X \oplus X$ можно естественным образом задать структуру комплексного линейного пространства, записывая элементы $X \oplus X$ в виде $x_1 + ix_2$, где $x_1, x_2 \in X$. Такое комплексное линейное пространство будем обозначать X_c. Если пространство X наделено нормой, то возникает задача о продолжении этой нормы на X_c.

Определение 1. *Пусть X — вещественное банахово пространство с нормой $\| \|_X$. Комплексное банахово пространство $(X_c, \| \|)$ будем называть* **комплексификацией** *пространства X, если для любого $x \in X$ верно равенство $\|x + 0 \cdot i\| = \|x\|_X$.*

Хорошо известно, что комплексификация может быть построена для любого банахова пространства X. Стандартный пример — норма на X_c, задаваемая формулой

$$\|x_1 + ix_2\| = (\|x_1\|_X^2 + \|x_2\|_X^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

Также понятно, что комплексификация не единственна: скажем, на пространстве непрерывных комплексных функций $C[0,1]$ норма

$$\|f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

задает комплексификацию вещественного $C[0,1]$, отличную от (1).

Заметим также, что для вещественного пространства X единичный шар его комплексификации должен содержать элементы вида $e^{i\phi}x$, где $x \in S(X)$, а также их выпуклые комбинации. Следовательно, множество

$$U = conv\{e^{i\phi}x : x \in S(X), \phi \in [0, 2\pi]\}$$

содержится в единичном шаре любой комплексификации пространства X и само, очевидно, задает норму на X_c.

В настоящей статье покажем, что стандартная комплексификация (1), несмотря на ее простоту и естественность, не может считаться "оптимальной". Так, например, будет показано, что любое сепарабельное вещественное банахово пространство имеет комплексно строго выпуклую комплексификацию, в то время, как стандартная комплексификация этим свойством может и не обладать.

Нам понадобятся следующие определения:

Определение 2. *Норма* $\|\,\|$ *на комплексном банаховом пространстве* X *называется* **комплексно строго выпуклой**, *если для произвольных* $x \in S(X)$ *и* $y \in X\backslash\{0\}$ *справедливо*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|x + e^{i\phi}y\| d\phi > 1.$$

Определение 3. *Норма* $\|\,\|$ *на комплексном банаховом пространстве* X *называется* **комплексно локально равномерно выпуклой**, *если для произвольных* $x \in S(X)$ *и* $y_n \in X$ *из того факта, что*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|x + e^{i\phi}y_n\| d\phi \longrightarrow 1, \qquad n \to \infty,$$

следует, что $\|y_n\| \to 0$.

Определение 4. *Пусть* $\|\,\|$ – *норма на комплексном банаховом пространстве* X. **Модулем комплексной выпуклости нормы** *будем называть* *функционал*

$$\delta(\varepsilon) = \inf\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \|x + e^{i\phi}y\| d\phi - 1, x \in S(X), \|y\| > \varepsilon\}.$$

Норму $\| \ \|$ *будем называть* **комплексно равномерно выпуклой**, *если для любого* $\varepsilon > 0 \quad \delta(\varepsilon) > 0$.

Комплексная строгая выпуклость и ее обобщения изучались рядом авторов (см. [1–4]). Известна связь этих понятий с теорией аналитических функций со значениями в банаховом пространстве, теорией типа-котипа, мартингальными оценками. Так, например, в комплексно строго выпуклых пространствах и только в них выполнен строгий принцип максимума: если аналитическая функция, заданная в единичном круге и принимающая значения в X достигает максимума нормы во внутренней точке круга, то эта функция есть константа [3].

2. Комплексификация сепарабельных пространств

Теорема 1. *Любое вещественное сепарабельное нормированное пространство можно так комплексифицировать, что получившееся комплексное пространство будет комплексно строго выпуклым.*

Доказательство. Ввиду теоремы Банаха–Мазура об универсальности пространства $\mathbb{C}[0,1]$, достаточно построить на комплексном $\mathbb{C}[0,1]$ норму, которая будет совпадать для вещественных функций с $\| \ \|_\infty$, но в которой $\mathbb{C}[0,1]$ будет комплексно строго выпуклым. Рассмотрим комплексное банахово пространство $\mathbb{C}[0,1]$. Для любого $f \in \mathbb{C}[0,1]$ определим

$$\|f\| = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \max\{\|f\|_\infty, p(f(t_1), f(t_2))\} dt_1 dt_2, \tag{2}$$

где $p(x,y) = \frac{1}{2}(|x+y| + |x-y|)$.

Как нетрудно убедиться, $\| \ \|$ задает эквивалентную норму на $\mathbb{C}[0,1]$ и $\|f\| = \|f\|_\infty$ для вещественных f. Очевидно, $p(x,y) \geq |x|$ для любых комплексных x, y.

Замечание 1 [3]. *Функционал* $p(x,y)$ *задает комплексно равномерно выпуклую норму на* $\mathbb{C}^2$ *с модулем комплексной выпуклости* δ_p.

Докажем, что $\| \ \|$ – комплексно строго выпуклая норма.

Для $f \in S(\mathbb{C}[0,1])$ и $g \in \mathbb{C}[0,1]\setminus\{0\}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f + e^{i\phi}g\| d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^1 \max\{\|f + e^{i\phi}g\|_\infty, p(f(t_1) + e^{i\phi}g(t_1), f(t_2) + e^{i\phi}g(t_2))\} dt_1 dt_2 d\phi$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \max\{\|f + e^{i\phi}g\|_\infty, p(f(t_1) + e^{i\phi}g(t_1), f(t_2) + e^{i\phi}g(t_2)\} d\phi dt_1 dt_2$$

$$\geq \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{2\pi}\max\{\int_0^{2\pi} \|f + e^{i\phi}g\|_\infty d\phi, \int_0^{2\pi} p(f(t_1) + e^{i\phi}g(t_1), f(t_2) + e^{i\phi}g(t_2)) d\phi\} dt_1 dt_2$$

$$\geq \int_0^1\int_0^1 \max\{\|f\|_\infty,\ p(f(t_1), f(t_2)) + \delta_p(\frac{1}{2}p(g(t_1), g(t_2)))\} dt_1 dt_2\,. \qquad (3)$$

В вышеприведенной оценке изменение порядка интегрирования возможно ввиду непрерывности функций f и g. Последний переход в оценке опирается на неравенства $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f + e^{i\phi}g\|_\infty d\phi \geq \|f\|_\infty$ и $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(x_1 + e^{i\phi}x_2, y_1 + e^{i\phi}y_2) d\phi \geq p(x_1, y_1) + \delta_p(\frac{1}{2}p(x_2, y_2))$ при $p(x_1, y_1) \leq 2$. (Более точную оценку аналогичного выражения см. ниже в доказательстве теоремы 2.)

Теперь пусть в точке t_1 функция $f(t)$ достигает своего максимума и $g(t_2) \neq 0$. Тогда для этих t_1 и t_2 подынтегральная функция оказывается строго большей подынтегрального выражения в (2). А значит, она строго больше этого выражения и в некоторой окрестности точки (t_1, t_2). Тогда и интеграл (3) будет строго больше единицы, что и требовалось доказать. ■

Замечание 2. *Построенная норма $\|\ \|$ не является комплексно локально равномерно выпуклой.*

В самом деле, возьмем вещественные функции $f, g_n \in \mathbb{C}[0,1]$, заданные следующим образом: функция f имеет носитель на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$ и $\|f\|_\infty = 1$; функции g_n обращаются в нуль на отрезке $[0, 1 - \varepsilon_n]$, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\|g_n\|_\infty = a$.

Легко видеть, что $\|f + e^{i\phi}g_n\|_\infty = 1$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f + e^{i\phi}g_n\| d\phi$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \max\{1, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(|f(t_1) + f(t_2) + e^{i\phi}(g_n(t_1) + g_n(t_2))|$$

$$+|f(t_1) - f(t_2) + e^{i\phi}(g_n(t_1) - g_n(t_2))|)d\phi\}dt_1 dt_2,$$

что стремится к единице при $n \to \infty$, т.к. на квадрате $[0, 1 - \varepsilon_n] \times [0, 1 - \varepsilon_n]$ подынтегральная функция тождественно равна 1, а на остальной части квадрата $[0,1] \times [0,1]$ — ограничена. Отсюда немедленно получаем требуемое.

3. О комплексной строгой выпуклости пространства ℓ_∞

В этом разделе покажем, что теорема 1 может быть распространена и на некоторые классы несепарабельных пространств, например, на пространства X, обладающие 1-нормирующими сепарабельными подпространствами в X^*. Пространства с таким свойством могут быть изометрически вложены в ℓ_∞, поэтому основной результат здесь — это построение комплексно выпуклой комплексификации для ℓ_∞.

Пространство ℓ_∞ может рассматриваться как $C(\beta\mathbb{N})$, где $\beta\mathbb{N}$ — это Стоун–Чеховская компактификация множества натуральных чисел. Конструкция из предыдущего раздела может быть без изменений перенесена на любое пространство вида $C(K)$, если только на компакте K есть регулярная борелевская мера, носитель которой совпадает с K. Однако на ℓ_∞ требуемую норму можно построить явным образом.

Рассмотрим комплексное банахово пространство ℓ_∞. Для любого $x \in \ell_\infty$ определим его норму так:

$$\|x\| = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+m}} \max\{\|x\|_\infty, p(x_n, x_m)\}. \tag{4}$$

Как нетрудно убедиться, норма (4) задает эквивалентную норму на ℓ_∞, совпадающую на вещественном ℓ_∞ с его естественной нормой.

Лемма 1. *Пусть $\delta(t)$ – модуль комплексной выпуклости комплексного банахова пространства X. Тогда для всех $t \in (0,2)$ $\quad 2\delta(\frac{x}{2}) \leq t\delta(\frac{x}{t})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что $\frac{\delta(x)}{x}$ монотонно возрастает с ростом x [1]. Следовательно, для $t \leq 2 \quad \frac{x}{t} \geq \frac{x}{2}$ и

$$\frac{\delta(\frac{x}{t})}{\frac{x}{t}} \geq \frac{\delta(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}},$$

откуда и получаем требуемое. ∎

Теорема 2. *Пространство ℓ_∞ с нормой $\| \ \|$ является комплексно строго выпуклым.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x, y \in \ell_\infty$ и $\|x\| = 1$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \|x + e^{i\phi}y\| d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+m}} \max\{\|x + e^{i\phi}y\|_\infty, p(x_n + e^{i\phi}y_n, x_m + e^{i\phi}y_m)\} d\phi$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+m}} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \max\{\|x + e^{i\phi}y\|_\infty, p(x_n + e^{i\phi}y_n, x_m + e^{i\phi}y_m)\} d\phi$$

$$\geq \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+m}} \max\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \|x + e^{i\phi}y\|_\infty d\phi,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} p(x_n + e^{i\phi}y_n, x_m + e^{i\phi}y_m) d\phi\}$$

$$\geq \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+m}} \max\{\|x\|_\infty, \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} p(x_n + e^{i\phi}y_n, x_m + e^{i\phi}y_m) d\phi\}\,. \tag{5}$$

Заметим, что $\forall n, m \in \mathbb{N}$, если $p(x_n, x_m) \neq 0$, и δ_p – модуль комплексной выпуклости функционала $p(x, y)$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} p(x_n + e^{i\phi}y_n, x_m + e^{i\phi}y_m) d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} p(x_n, x_m) p\Big(\frac{x_n}{p(x_n, x_m)} + \frac{e^{i\phi}y_n}{p(x_n, x_m)}, \frac{x_m}{p(x_n, x_m)} + \frac{e^{i\phi}y_m}{p(x_n, x_m)}\Big)$$

$$> p(x_n, x_m) + p(x_n, x_m)\delta_p\Big(\frac{p(y_n, y_m)}{p(x_n, x_m)}\Big)$$

$$\geq p(x_n, x_m) + 2\delta_p\Big(\frac{p(y_n, y_m)}{2}\Big)$$

(в силу леммы 1).

Докажем, что существуют такие $n, m \in \mathbb{N}$, что

$$\max\left\{\|x\|_\infty, \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} p(x_n + e^{i\phi}y_n, x_m + e^{i\phi}y_m)d\phi\right\} > \|x\|_\infty\,.$$

Тогда (5) даст нам комплексную строгую выпуклость пространства $(\ell_\infty, \|\,\|)$. Для этого выберем вначале $n \in \mathbb{N}$ такое, что $y_n \neq 0$ и обозначим $\delta_p\left(\frac{p(y_n,0)}{2}\right)$ через ε. Затем выберем $m \in \mathbb{N}$ таким образом, что $|x_m| > \|x\|_\infty - \varepsilon$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} p(x_n + e^{i\phi}y_n, x_m + e^{i\phi}y_m)d\phi$$

$$> p(x_n, x_m) + 2\delta_p\left(\frac{p(y_n, y_m)}{2}\right) \geq |x_m| + 2\varepsilon \geq \|x\|_\infty + \varepsilon\,,$$

откуда и получаем требуемое. ■

4. Перенормировки пространства $\ell_\infty(\Gamma)$

Здесь покажем, что теорема 1 не может быть распространена на произвольные пространства.

Определение 5. *Пусть* Γ *— несчетное множество. Пространством* $\ell_\infty(\Gamma)$ *называется* $\{x = (x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} : \|x\|_\infty = \sup\{|x_\gamma|\} < \infty\}$.

Теорема 3. *Пространство* $\ell_\infty(\Gamma)$ *нельзя перенормировать комплексно строго выпукло.*

Доказательство. Рассмотрим комплексное пространство $\ell_\infty(\Gamma)$. Докажем, что в этом пространстве никакая норма не будет комплексно строго выпуклой. Воспользуемся для этого леммой, фактически содержащейся в доказательстве невозможности строго выпуклой перенормировки пространства $\ell_\infty(\Gamma)$ в книге Дистеля [5].

Пусть

$$\ell_0(\Gamma) = \{x \in \ell_\infty(\Gamma) : \sigma(x) - \text{счетное множество}\}\,,$$

где $\sigma(x)$ — носитель элемента x, и пусть $\|\,\|$ — некоторая эквивалентная норма на $\ell_\infty(\Gamma)$. Обозначим $S = S_{\|\,\|_\infty}(\ell_0(\Gamma))$. Для любого $x \in S$ обозначим

$$F_x = \left\{y \in S : y\Big|_{\sigma(x)} = x\Big|_{\sigma(x)}\right\}\,.$$

Лемма 2. *Существует такое* $x^0 \in S$, *что* $\forall y \in F_{x^0} \quad \|y\| = \|x\| = \mu$. ■

Пусть $z = y - x^0$, где y, x^0 определены в лемме 2. Тогда $z\Big|_{\sigma(x^0)} = 0$ и $\sigma(x^0)$ — счетное множество. Следовательно, для $\phi \in [0, 2\pi]$

$$x^0 + e^{i\phi}z\Big|_{\sigma(x^0)} = x^0\Big|_{\sigma(x^0)}.$$

Очевидно, $x^0 + e^{i\phi}z \in \ell_0(\Gamma)$. Из того факта, что $x^0, y \in F_{x^0}$, получаем: $\|x^0 + e^{i\phi}z\|_\infty = \|x^0\|_\infty = 1$. Итак, $x^0 + e^{i\phi}z \in S$ и, следовательно, $x^0 + e^{i\phi}z \in F_{x^0}$. А это означает, что $\|x^0 + e^{i\phi}z\| = \|x^0\|$, т. е. норма $\|\ \|$ не является комплексно строго выпуклой. ■

В заключение отметим некоторые нерешенные задачи:

1. Как охарактеризовать те вещественные пространства, на которых любая эквивалентная норма может быть комплексифицирована до комплексно строго выпуклой? Мы не знаем, обладает ли данным свойством ℓ_∞.

2. Верна ли формулировка теоремы 1 с заменой комплексной строгой выпуклости на локально равномерную комплексную выпуклость?

Список литературы

[1] *В.М. Кадец,* О комплексной равномерной выпуклости пространств Лебега–Бохнера. — Теория функций, функц. анализ и их прил. (1983), вып. 40, с. 71–74.

[2] *W.J. Davis, D.J. Garling, and N. Tomczak–Jaegermann,* On complex convexity of quasi-normed linear spaces. — J. Funct. Anal. (1984), v. 55, No. 1, p. 110–150.

[3] *J. Globevnik,* On complex strict and uniform convexity. — Proc. Amer. Math. Soc. (1975), v. 47, No. 1, p. 175–178.

[4] *V.I. Istrăţescu,* Strict convexity and complex strict convexity. — Marcel Dekker, Inc., New York, Basel (1984).

[5] *Дж. Дистель,* Геометрия банаховых пространств. — Выща школа, Киев (1980).

On complex strictly convex complexifications of Banach spaces

V.M. Kadets, A.Yu. Kellerman

We show that every real separable normed space may be complexified to a complex strictly convex normed space. The same result is obtained also for some classes of nonseparable spases, for example, for spases X with 1-norming separable subspases in X^*; however, a space $\ell_\infty(\Gamma)$ has no complex strictly convex complexifications.

Про комплексно строго опуклу комплексифікацію банахових просторів

В.М. Кадець, Г.Ю. Келлерман

Доведено, що кожний дійсний сепарабельний нормований простір можна так комплексифікувати, що одержаний комплексний простір буде комплексно строго опуклим. Також доведено, що те саме вірно для деяких класів несепарабельних просторів, наприклад, для просторів X, які мають 1-норміруючі сепарабельні підпростори в X^*, але існують простори ($\ell_\infty(\Gamma)$), що не мають комплексно строго опуклих комплексифікацій.