Математическая физика, анализ, геометрия
2001, т. 8, № 1, с. 3–16

О гауссовой кривизне замкнутых поверхностей в E^3 и E^4

Ю.А. Аминов, В.А. Горькавый

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
Пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61164, Украина
E-mail:aminov@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 30 августа 2000 года

Вводится новый класс замкнутых поверхностей в E^3 произвольного рода, которые названы p-симметронами. С их помощью строятся замкнутые регулярные поверхности в E^4. Компьютерными методами исследуется поведение гауссовой кривизны построенных поверхностей. Рассматривается задача построения замкнутой поверхности рода 2 с отрицательной гауссовой кривизной в E^4, имеющей регулярную проекцию на E^3.

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию следующей задачи: построить замкнутую регулярную ориентированную поверхность F^2 рода $g \geq 2$ с отрицательной гауссовой кривизной в E^4.

Ранее этот вопрос рассматривался в работах Оцуки [1] и Розендорна [2, 3]. Их методы, очень искусные и сложные, позволили построить отдельные примеры замкнутых двумерных поверхностей рода 7 с отрицательной гауссовой кривизной в E^4. (В работе [2] отмечается, что метод Оцуки приводит лишь к поверхностям, на которых все же есть точки с $K = 0$.) По нашему же мнению, такие поверхности было бы естественно искать также в классе алгебраических поверхностей, гомеоморфных сфере с меньшим, чем 7, числом ручек. Кроме того, по нашему мнению, должны существовать не только отдельные примеры, но и целые классы таких поверхностей, поэтому разумной и интересной выглядит задача разработки общих "технологий" их построения.

Предлагаемый нами метод основан на рассмотрении замкнутых поверхностей $F^2 \subset E^4$, регулярно проектирующихся в замкнутые алгебраические поверхности $\tilde{F}^2 \subset E^3$, и на применении формулы для тензора кривизны неявно заданного подмногообразия в евклидовом пространстве, которая получена в [4].

Поверхности $\tilde{F}^2$ в E^3 задаем неявно алгебраическими полиномами малых степеней. Вводится новый класс двумерных замкнутых поверхностей в E^3 произвольного рода, которые называем *симметронами.* Одновременно с поставленной выше задачей средствами програмного пакета *Maple V* проводится "качественный" анализ геометрических характеристик симметронов, таких как гауссова кривизна, параболические линии и т.д. Применение аналитических методов здесь весьма затруднительно ввиду объемности вычислений, тогда как использование *Maple V* и его графических возможностей позволяет сделать анализ ясным и наглядным.

Далее, задавая в пространстве E^3 некоторую функцию b и рассматривая ее сужение на поверхность $\tilde{F}^2$, определяем поверхность $F^2 \subset E^4$: она проектируется в поверхность $\tilde{F}^2 \subset E^3$, при этом функция b играет роль четвертой координаты точки поверхности F^2 в E^4. Так построенная F^2 будет замкнутой, ориентированной, регулярной поверхностью того же рода, что и $\tilde{F}^2$, и будет иметь нулевой инвариант Уитни. С помощью *Maple V* мы исследуем некоторые геометрические свойства F^2. В первую очередь, внимание уделено изучению поведения гауссовой кривизны поверхности F^2 при изменении функции b.

Как было отмечено, наш подход основывается на полученной в [4] формуле для тензора кривизны неявно заданного подмногообразия в евклидовом пространстве, а именно — на формуле для гауссовой кривизны K неявно заданной поверхности $F^2 \subset E^4$: эта формула эффективна и удобна как раз в применении для компьютерных вычислений. Изменяя функцию b и деформируя таким образом поверхность F^2, мы качественно оцениваем поведение областей $\tilde{F}^2$, в которые проектируются области на F^2 с $K \geq 0$. Основной целью является уменьшение таких областей вплоть до их полного исчезновения. По нашему мнению, замкнутые поверхности отрицательной кривизны $F^2 \subset E^4$ не являются чем-то исключительным, изолированным, поэтому за "компьютерным" решением с большой долей вероятности следовало бы ожидать и теоретического обоснования полученных результатов (описания соответствующих поверхностей).

В результате многочисленных экспериментов за счет подбора b удалось добиться значительного уменьшения областей с положительной кривизной. Отдельные наглядные результаты отражены на приведенных рисунках.

Графический анализ полученных результатов заставляет формулировать следующие задачи.

Вопрос 1. *Существует ли замкнутая регулярная поверхность F^2 в E^4 с гауссовой кривизной $K < 0$, которую можно было бы взаимооднозначно* *спроектировать на регулярную поверхность $\tilde{F}^2$ в некоторой гиперплоскости $E^3 \subset E^4$?*

Заметим, что для каждой регулярной замкнутой поверхности $\tilde{F}^2$ в E^3 выполнено

$$\int\limits_{\tilde{K}>0} \tilde{K} dS \geq 4\pi,$$

где интегрирование проводится по области положительной кривизны на поверхности. Поверхности, для которых достигается равенство, были рассмотрены А.Д. Александровым — это так называемые поверхности типа Т. Из приведенного неравенства следует, что каждая метрика, для которой интеграл, стоящий в левой части, меньше 4π, не допускает изометрического погружения в E^3.

Вопрос 2. *Какая двумерная геометрия возможна в E^4 над замкнутой регулярной поверхностью в E^3?*

К этим задачам мы, возможно, обратимся в следующих статьях.

1. Построение поверхности в E^3

Построим алгебраическую поверхность топологического типа сферы с p ручками. Пусть в E^3 введены декартовы координаты x, y, z. Рассмотрим p непересекающихся и не лежащих одна внутри другой замкнутых кривых γ_i в плоскости координат x, y. Будем предполагать, что каждая γ_i задана уравнением $f_i(x, y) = 0$, причем так, что внутри ограниченной этой кривой области D_i выполняется $f_i(x, y) < 0$. Далее, возьмем в плоскости координат x, y замкнутую кривую γ так, чтобы все кривые γ_i лежали внутри области D, ограниченной γ. При этом будем считать, что γ задана уравнением $f(x, y) = 0$, а в области D выполнено $f(x, y) < 0$.

Рассмотрим, наконец, поверхность $\tilde{F}^2 \subset E^3$, заданную уравнением

$$a(x, y, z) = z^2 + \varepsilon^2 f(x, y) \prod_{i=1}^{p} f_i(x, y) = 0. \tag{0}$$

Вследствие выбора f_i и f, вне области D и внутри каждой области D_i произведение $f(x, y) \prod_{i=1}^{p} f_i(x, y)$ будет положительным, тогда как в $(p+1)$-связной области $\Omega = D - \cup_{i=1}^{p} D_i$ оно отрицательно. Поэтому поверхность $\tilde{F}^2 \subset E^3$ определена в точности над замыканием области Ω, причем она будет симметрична относительно плоскости x, y, пересекая ее именно по кривым γ_i и γ. Легко видеть, что таким образом построенная $\tilde{F}^2 \subset E^3$ — замкнутая, ориентированная, гомеоморфная сфере с p ручками поверхность.

Внешняя форма поверхности может быть достаточно сложной или простой в зависимости от конфигурации кривых γ_i. При $p \geq 2$ одной из наиболее простых конфигураций является набор p окружностей одинакового радиуса r, центры которых лежат в вершинах правильного p-угольника, а кривая γ — это окружность радиуса R, центр которой совпадает с центром p-угольника. Пусть центр лежит в точке $O(0,0)$, а вершины p-угольника — в точках с координатами $x_i = \cos(\frac{2\pi i}{p}), y_i = \sin(\frac{2\pi i}{p})$. Тогда $f_i = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - r^2$ и $f = x^2 + y^2 - R^2$. Соответствующая поверхность $\tilde{F}^2 \subset E^3$, которая задается неявно уравнением

$$a(x,y,z) = z^2 + \varepsilon^2 \left\{ (x^2 + y^2 - R^2) \prod_{i=1}^{p} ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - r^2) \right\} = 0, \quad (1)$$

не только симметрична относительно плоскости x, y, но и обладает всеми симметриями правильного p-угольника. Мы будем называть эту регулярную алгебраическую поверхность *p-симметроном.* Положительные величины r, R и ε играют роль параметров семейства p-симметронов; очевидно, что r и R должны удовлетворять условиям $r < \sin(\frac{\pi}{p})$ и $R > r + 1$.

Класс симметронов естественно дополняется следующими понятиями: под 0-*симметронами* будем понимать гомеоморфные сфере поверхности вращения $z^2 + \varepsilon^2(x^2 + y^2 - R^2) = 0$, среди которых находится и сама сфера $z^2 + (x^2 + y^2 - R^2) = 0$, а под 1-*симметронами* – гомеоморфные тору поверхности $z^2 + \varepsilon^2(x^2 + y^2 - R^2)(x^2 + y^2 - r^2) = 0$, где $r < R$.

Обычный круговой тор вращения в E^3 задается неявно в виде

$$z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - R)(\sqrt{x^2 + y^2} - r) = 0;$$

чтобы включить его в класс симметронов, мы сделаем следующее обобщение данного выше определения.

Будем называть *p-симметроном* замкнутую поверхность, задаваемую неявно уравнением вида

$$a(x,y,z) = z^2 + \varepsilon^2 \left\{ \Theta(x,y) \prod_{i=1}^{p} \Theta_i(x,y) \right\} = 0, \quad (1^*)$$

где $\Theta(x,y)$ равняется $x^2 + y^2 - R^2$ либо $\sqrt{x^2 + y^2} - R$, а $\Theta_i(x,y)$ равняется $(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - r^2$ либо $\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} - r$.

Заметим, что если $\Theta_i(x,y)$ равняется $\sqrt{x^2 + y^2} - R$, то при $p \geq 2$ поверхность, заданная уравнением вида (1^*), имеет особенность в точке $x = 0, y = 0$, во всех остальных случаях поверхность будет всюду регулярна.

Некоторые из p-симметронов изображены на рис. 1–2.

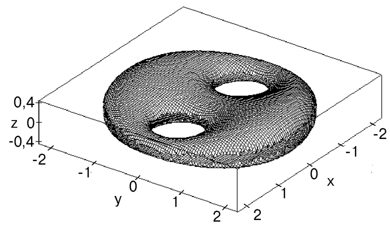

Рис. 1. Поверхность "2-симметрон" $\tilde{F} \subset E^3$, заданная неявно уравнением

$$z^2 + \frac{1}{16}(x^2 + y^2 - 4)(\sqrt{(x-1)^2 + y^2} - \frac{1}{2})(\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \frac{1}{2}) = 0.$$

Достаточно простой вид уравнения (1*) хорошо подходит для "компьютерного" анализа некоторых геометрических характеристик p-симметронов. В связи со сформулированной во Введении задачей, наибольший интерес для нас представляет вычисление знака гауссовой кривизны $\tilde{K}$, параболических линий (где $\tilde{K} = 0$) и областей знакопостоянства гауссовой кривизны p-симметронов. Для этого воспользуемся удобной формулой Неймана для гауссовой кривизны неявно заданной поверхности в E^3 (см., например, [5]):

$$\tilde{K} = -\frac{\begin{vmatrix} \partial_{xx}a & \partial_{xy}a & \partial_{xz}a & \partial_x a \\ \partial_{yx}a & \partial_{yy}a & \partial_{yz}a & \partial_y a \\ \partial_{zx}a & \partial_{zy}a & \partial_{zz}a & \partial_z a \\ \partial_x a & \partial_y a & \partial_z a & 0 \end{vmatrix}}{(\partial_x a^2 + \partial_y a^2 + \partial_z a^2)^2}.$$

Эта формула удобна тем, что она не требует знания какой-либо внутренней параметризации поверхности, которая в нашем случае неизбежно была бы локальной, и может применяться "в целом". Кроме того, она включает элементарные алгебраические и дифференциальные операции, поэтому ее не сложно реализовать, например, средствами *Maple V*.

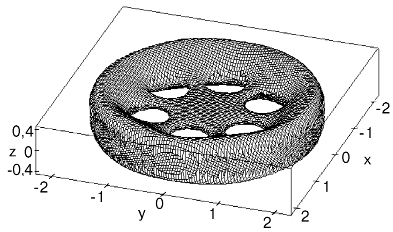

Рис. 2. Поверхность "6-симметрон" $\tilde{F} \subset E^3$, заданная неявно уравнением

$$z^2 + \frac{1}{36}(x^2 + y^2 - 4)\prod_{i=1}^{6}(\sqrt{(x - \cos(\frac{\pi i}{3}))^2 + (y - \sin(\frac{\pi i}{3}))^2} - \frac{1}{3}) = 0.$$

Даже в случае в p-симметронов аналитическое выражение для $\tilde{K}$ остается сложным. Но не трудно понять, что знак $\tilde{K}$ и форма параболических линий зависят от параметров r, R, тогда как ε является масштабирующим параметром, с помощью которого можно влиять на величину абсолютного значения и скорость изменения $\tilde{K}$. Средствами *Maple V* мы проводим качественный (графический) анализ параболических линий и областей знакопостоянства $\tilde{K}$: на рис. 3 показаны область Ω на плоскости x, y, в которую проектируется 2-симметрон, и проекции параболических линий 2-симметрона. Ввиду симметричности, обе параболические линии 2-симметрона проектируются в одну и ту же линию в Ω, имеющую вид восьмерки. Знаками $" + "$ и $" - "$ отмечены проекции областей 2-симметрона, на которых гауссова кривизна $\tilde{K}$ соответственно положительна и отрицательна.

Количественная оценка областей знакопостоянства может быть проведена различными методами. Один из наиболее естественных способов — нахождение численными методами отношения δ_S площадей S_+ и S_- областей положительной и отрицательной кривизны $\tilde{K}$ к общей площади S p-симметрона.

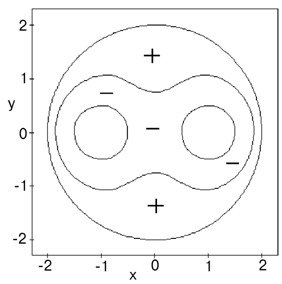

Рис. 3. Проекция 2-симметрона $\tilde{F}^2 \subset E^3$, заданного неявно уравнением

$$z^2 + \frac{1}{16}(x^2 + y^2 - 4)(\sqrt{(x-1)^2 + y^2} - \frac{1}{2})(\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \frac{1}{2}) = 0,$$

на плоскость xy.

Иным методом оценки является вычисление абсолютного значения δ_K отношения полных (интегральных) положительной и отрицательной кривизны $\tilde{K}_+^{total}$ и $\tilde{K}_-^{total}$ к полной кривизне p-симметрона, равной $2\pi(1-p)$ вследствие теоремы Гаусса–Бонне.

Безусловно, можно рассматривать и другие замкнутые поверхности, порождаемые иными конфигурациями замкнутых кривых на плоскости x, y. Например, можно брать пару лемнискат Бернулли с p фокусами [8], расположенными в вершинах правильного p-угольника. При этом параметры лемнискат следует выбирать так, чтобы одна из них, внутренняя, распадалась на p компонент связности, а вторая, внешняя, имела ровно одну компоненту. Замкнутая, ориентированная поверхность $\tilde{F}^2 \subset E^3$, заданная уравнением вида (0) соответственно такой конфигурации, будет гомеоморфна сфере с p ручками; она будет симметричной относительно плоскости x, y и будет иметь все симметрии p-угольника, как и в рассмотренном выше случае, но задающее ее уравнение будет несколько сложнее, чем в случае p-симметронов.

2. Построение поверхности в E^4

Пусть x, y, z, w — декартовы координаты в E^4, и гиперплоскость E^3 задана уравнением $w = 0$. На поверхности $\tilde{F}^2 \subset E^3$, заданной уравнением $a(x,y,z) = 0$, рассмотрим функцию $b(x,y,z)$. Набор уравнений

$$\begin{gathered} a(x,y,z) = 0, \\ w - b(x,y,z) = 0 \end{gathered}$$

определяет некоторую поверхность $F^2 \subset E^4$. При ортогональной проекции $E^4 \to E^3$ эта поверхность проектируется в точности на $\tilde{F}^2 \subset E^3$, при этом ясно, что она сохраняет топологические свойства $\tilde{F}^2$. В частности, если $\tilde{F}^2$ является ориентированной, замкнутой поверхностью, гомеоморфной сфере с p ручками, то такой же будет и F^2.

Мы можем рассматривать $F^2 \subset E^4$ как график ограничения функции $w = b(x,y,z)$ с E^3 на $\tilde{F}^2$. С другой стороны, можно рассматривать $F^2 \subset E^4$ и как некоторую "деформацию" поверхности $\tilde{F}^2 \subset E^3$: зафиксировав $\tilde{F}^2$ (т.е. зафиксировав a) и изменяя функцию b, получаем определенную деформацию исходной поверхности $\tilde{F}^2 \subset E^3$, выводящую ее в E^4.

Основной вопрос: *можно ли подобрать функции a, b так, чтобы гауссова кривизна K поверхности $F^2 \subset E^4$ была всюду отрицательна?*

Решение хотелось бы получить в наиболее простом виде из возможных. Поэтому в качестве начальной поверхности берем p-симметрон $\tilde{F}^2 \subset E^3$, т.е. фиксируем функцию a вида (1*). Далее с помощью b деформируем исходный p-симметрон, пытаясь положительно решить поставленный вопрос.

Для вычисления гауссовой кривизны K удобно использовать формулу, установленную в работе [4]. В дальнейшем применим обозначения $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = w$; также первые и вторые производные функций a и b условимся обозначать следующим образом: $\partial_{x_i} a = a_i, \partial^2_{x_i x_j} a = a_{ij}$ и т.д. Введем в рассмотрение симметрическую матрицу

$$T = \begin{pmatrix} T_{2323} & T_{3123} & T_{2132} \\ T_{3123} & T_{1313} & T_{1231} \\ T_{2132} & T_{1231} & T_{1212} \end{pmatrix},$$

где

$$T_{ijkl} = a_{ik} b_{jl} + a_{jl} b_{ik} - a_{il} b_{jk} - a_{jk} b_{il}.$$

Тогда гауссова кривизна K метрики поверхности $F^2 \subset E^4$ вычисляется по следующей формуле [4]:

$$K = \frac{1}{|q|^4} \cdot \{ - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \end{vmatrix} \cdot (1 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

$$- (\, a_1, \quad a_2, \quad a_3 \,)\, T \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)$$

$$- \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & a_1 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & a_2 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \end{vmatrix} \cdot (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \}, \tag{2}$$

здесь

$$|q|^4 = (|\nabla a|^2 \; + \; |[\nabla a, \nabla b]|^2)^2.$$

Эта формула хорошо приспособлена для компьютерных вычислений. С ее помощью средствами *Maple V* проводим качественный анализ влияния функции b на знак гауссовой кривизны K: а именно, на области Ω плоскости x, y, в которую проектируется деформированный p-симметрон $F^2 \subset E^4$, изучаем динамику проекций параболических линий и проекций областей знакопостоянства гауссовой кривизны поверхности F^2.

Подбор функции b с целью уменьшения и полного уничтожения областей (проекций областей) положительной гауссовой кривизны K на F^2 проводится не совсем произвольно. Дело в том, что связь между кривизнами $\tilde{K}$ и K начального и деформированного p-симметронов выражается еще и следующей формулой:

$$K \;=\; \tilde{K} \frac{\nabla_1 b}{1 + \nabla_1 b} \;+\; \frac{\nabla_{22} b}{(1 + \nabla_1 b)^2}, \tag{3}$$

где $\nabla_1 b$ — первый дифференциальный параметр Бельтрами, $\nabla_{22} b$ — оператор Монжа–Ампера на $\tilde{F}^2$ [6, 7]. (Отметим, что сопоставление формул (2) и (3) дает выражение для $\nabla_{22} b$ через производные функций a и b по пространственным переменным.)

Формула (3) предполагает знание функции b как функции внутренних координат на $\tilde{F}^2$ и знание метрики $\tilde{F}^2$, что осложняет ее использование для компьютерного анализа. Кроме того, вообще говоря, невозможно дать единое аналитическое выражение функции b в терминах внутренних координат.

Однако из формулы (3) уже можно сделать некоторые предварительные предположения о классе функции b, среди которых следует искать решение поставленной задачи. В частности, точки экстремума функции b не могут располагаться произвольно. А именно, если в области положительной гауссовой кривизны $\tilde{K}$ есть точки экстремума эллиптического типа, т.е.

$\nabla_1 b = 0, \nabla_{22} b > 0$, то вследствие (3) в этих точках экстремума будет $K > 0$. Поэтому, если хотим избавиться от областей положительной кривизны, то эллиптические точки экстремума выбираемой функции b должны располагаться в области, где $\tilde{K} < 0$, причем их эллиптичность должна быть достаточно малой, чтобы кривизна K оставалась отрицательной. В то же время в области положительной кривизны $\tilde{K}$ должны располагаться седловые точки экстремума функции b, где $\nabla_1 b = 0, \nabla_{22} b < 0$; с их помощью, принимая во внимание (3), можно попытаться компенсировать положительную $\tilde{K}$ и сделать K отрицательной.

В качестве функции с отмеченными свойствами выбиралось $b = \lambda \cdot xyz$, где λ — числовой параметр. Эта функция меняет знак на пересечении поверхности с координатными гиперплоскостями. На рис. 4 показаны линии уровня и точки экстремума функции $\lambda \cdot xyz$ на 2-симметроне $\tilde{F}^2$, спроектированные на область Ω в плоскости x, y: проекции девяти седловых точек обозначены символом $\circ$, а четыре проекции восьми эллиптических точек (располагающихся симметрично относительно плоскости x, y) — символом $\bullet$.

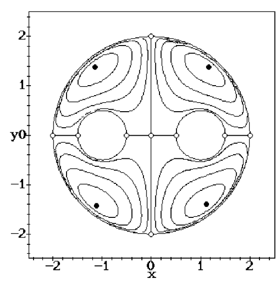

Рис. 4. Линии уровня функции $b = xyz$ на 2-симметроне $\tilde{F}^2 \subset E^3$, заданном неявно уравнением

$$z^2 + \frac{1}{16}(x^2+y^2-4)(\sqrt{(x-1)^2+y^2} - \frac{1}{2})(\sqrt{(x+1)^2+y^2} - \frac{1}{2}) = 0,$$

спроектированные на плоскость x, y.

Используя формулу (2) и применяя аналитические и графические возможности *Maple V*, вычисляем гауссову кривизну K при $b = \lambda \cdot xyz$ и качественно анализируем области знакопостоянства K. На рис. 5, как пример, изображена область Ω в плоскости x, y и проекции на Ω параболических линий деформированного p-симметрона. Знаками "$+$" и "$-$" обозначены проекции областей, где K положительна и отрицательна. При изменении параметров λ, ε, r и R форма проекций параболических линий и областей знакопостоянства гауссовой кривизны тоже изменяется, однако полностью избавиться от областей, где $K > 0$, все же не удается. Тем не менее отметим, что положительная кривизна убрана с большой части области, соответствующей выпуклой части поверхности $\tilde{F}^2$.

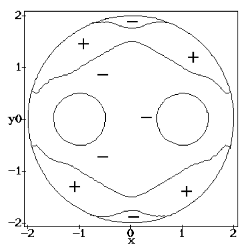

Рис. 5. "Деформированный" 2-симметрон $F^2 \subset E^4$, заданный неявно уравнениями

$$z^2 + \frac{1}{16}(x^2 + y^2 - 4)(\sqrt{(x-1)^2 + y^2} - \frac{1}{2})(\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \frac{1}{2}) = 0,$$

$$w - 1000xyz = 0,$$

проектируется в плоскость xy.

Аналогичный анализ был проведен для большого числа функций b. Некоторые из графических результатов представлены на рис. 6–8.

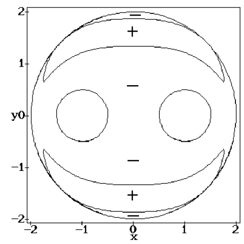

Рис. 6. $z^2+(x^2+y^2-4)((x-1)^2+y^2-\frac{1}{4})((x+1)^2+y^2-\frac{1}{4})=0, \quad w-xyz=0.$

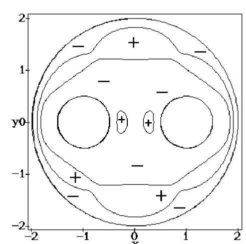

Рис. 7. $z^2+(x^2+y^2-4)(\sqrt{(x-1)^2+y^2}-\frac{1}{2})(\sqrt{(x+1)^2+y^2}-\frac{1}{2})=0,$
$w-5(x^2-y^2)z^3=0.$

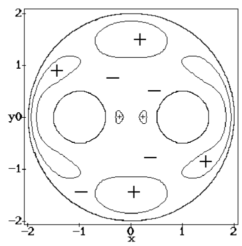

Рис. 8. $z^2+(\sqrt{x^2+y^2}-2)(\sqrt{(x-1)^2+y^2}-\frac{1}{2})(\sqrt{(x+1)^2+y^2}-\frac{1}{2})=0$, $w-5(x^2-y^2)z^3=0$.

Получение таких детальных картин поведения функции кривизны было бы совершенно невозможно без использования компьютера.

Список литературы

[1] *T. Otsuki*, A construction of closed surfaces of negative curvature in E^4. — *Math. J. Okayama University* (1954), v. 3, p. 95–108.

[2] *Э.Г. Розендорн*, О полных поверхностях отрицательной кривизны $K \le -1$ в евклидовых пространствах E^3 и E^4. — *Мат. сб.* (1962), т. 58, №. 4, с. 453–478.

[3] *Э.Г. Розендорн*, Слабо нерегулярные поверхности отрицательной кривизны. — *Успехи мат. наук* (1966), т. XXI, вып. 5, с. 59–116.

[4] *Ю.А. Аминов*, Выражение тензора Римана подмногообразия евклидова пространства, заданного системой уравнений. — *Мат. заметки* (1999), т. 66, № 1, с. 3–9.

[5] *Ю.А. Аминов*, Геометрия векторного поля. Наука, Москва (1990).

[6] *Ю.А. Аминов*, О двумерных метриках отрицательной кривизны. — *Укр. геом. сб.* (1973), вып. 13, с. 9–15.

[7] *Ю.А. Аминов*, К проблеме Хопфа. — *Мат. заметки* (2000), т. 68, № 4, с. 637–640.

[8] *Ю.А. Аминов*, Дифференциальная геометрия и топология кривых. Наука, Москва (1987).

On the Gauss curvature of closed surfaces in E^3 and E^4

Yu.A. Aminov, V.A. Gorkavyy

New class of closed surfaces of arbitrary genus in E^3 called p-symmetrons is introduced. Applying these surfaces closed regular surfaces in E^4 are constructed. The behaviour of the Gauss curvature of constructed surfaces is studied by computer methods. It is considered the problem of the constructed of closed surfaces of genus 2 with negative Gauss curvature in E^4 which have regular projection in E^3.

Про гауссову кривину замкнених поверхонь в E^3 та E^4

Ю.А. Амінов, В.О. Горькавий

Вводиться новий клас замкнених поверхонь в E^3 довільного роду, що називаються p-симетронами. За їх допомогою будуються замкнені регулярні поверхні в E^4. Комп'ютерними методами досліджується поведінка гауссової кривини побудованих поверхонь. Розглядається задача побудови замкненої поверхні роду 2 с від'ємною гауссовою кривиною в E^4, що має регулярну проекцію на E^3.