Математическая физика, анализ, геометрия
2001, т. 8, № 1, с. 17–41

К вопросу о независимости линейных и квадратичных форм от независимых случайных величин

К.И. Кабанов

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
Пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61164, Украина
E-mail:kabanov@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 17 февраля 2000 года
Представлена Г.М. Фельдманом

Приводятся обобщения теоремы Лага о независимости выборочного среднего и квадратичной формы для произвольных линейных и квадратичных форм.

Введение

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые, одинаково распределенные случайные величины (с.в.) с функцией распределения $F(x)$. Рассмотрим линейную форму

$$L(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j X_j$$

и квадратичную форму

$$Q(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} X_i X_j$$

с произвольными вещественными коэффициентами.

Одним из важных результатов характеризационной теории математической статистики является теорема о характеризации нормального закона свойством независимости выборочного среднего $\overline{X}$ и выборочной дисперсии S^2, которая была доказана Джейри [6], Лукачем [8], Зингером [1], Кавата и Сакамото [7].

В 1942 году Лукачем при решении этой задачи был впервые применен метод дифференциальных уравнений. Используя этот метод, Лага [4] решил более общую задачу о независимости выборочного среднего $\overline{X}$ и произвольной квадратичной формы Q, предполагая, однако, существование вторых моментов у с.в. X_1. Показано, что для квадратичных форм, коэффициенты которых удовлетворяют условиям $\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} = 0$ и $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} = 0$, $j = 1, \ldots, n$, независимость Q и $\overline{X}$ характеризует нормальный закон, а для квадратичных форм вида $Q = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jj} X_j^2$ — закон $P(X_1^2 = const) = 1$.

В монографии Кагана, Линника, Рао [3] была поставлена задача обобщить результат Лага для случая линейной формы L с произвольными вещественными коэффициентами.

В данной работе дано обобщение теоремы Лага для нормального распределения. Показано, что формы L и Q, коэффициенты которых удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_i\beta_j = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_i = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

являются независимыми тогда и только тогда, когда с.в. X_1 распределена по нормальному закону. Условия, налагаемые на коэффициенты форм, полностью аналогичны условиям в теореме Лага и совпадают с ними, когда $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n$. Заметим, что этот результат не удается получить при помощи метода дифференциальных уравнений. С помощью изучения поведения моментов с.в. X_1 эта задача была решена. В связи с этим часть работы посвящена изучению свойств производящей функции моментов случайной величины X_1

$$M(t) = Ee^{tX_1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} dF(x),$$

вытекающих из независимости квадратичной и линейной форм, и даны условия, при которых величина $M(t)$ конечна при всех вещественных значениях t. Этот результат является аналогом теоремы Зингера [2] для квазиполиномиальных статистик, однако, в отличие от этой теоремы, рассматривались не только допустимые статистики.

Показано, что среди ограниченных с.в. только распределенные по закону $P(X_1 = const) = 1$ и по закону $P(X_1^2 = const) = 1$, когда $Q = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jj} X_j^2$, допускают независимость статистик L и Q. Как следствие этого факта, получено полное решение задачи для случая, когда квадратичная форма является строго знакопостоянной. Доказано, что для форм такого вида из независимости L и Q следует ограниченность с.в. Кроме того в работе рассмотрено обобщение теоремы о независимости выборочного среднего и выборочной дисперсии для выборок, имеющих случайную длину.

1. Аналитические свойства производящей функции моментов

Поскольку при получении части результатов в работе будет существенно использован тот факт, что для аналитической производящей функции моментов функция распределения восстанавливается единственным образом по своей последовательности моментов, то естественно начать с установления некоторых свойств $M(t)$, вытекающих из независимости Q и L.

Следующая теорема является аналогом результатов Зингера (см. [3, т. 4.3.1, 4.4.1]), который показал, что из независимости квазиполиномиальной статистики, допустимой по всем переменным, и линейной формы с ненулевыми коэффициентами следует, что $M(t)$ — целая функция конечного порядка. Используя его методы, докажем подобную теорему, не предполагая допустимости линейной и квадратичной форм по всем переменным.

Теорема 1.1. *Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые, одинаково распределенные случайные величины с конечным первым моментом. Если L и Q независимы и существуют номера i и j, для которых $\alpha_{ij}\beta_j \neq 0$, тогда:*

1. *Существует $\tau > 0$, что $Ee^{\tau|X_1|} < \infty$.*

2. *Если, кроме того, существует номер j, для которого выполняется соотношение*

$$\frac{|\alpha_{jj}|^{1/2}}{\max\limits_{i,j=1,\dots,n} |\alpha_{ij}|^{1/2}} + \frac{|\beta_j|}{\max\limits_{j=1,\dots,n} |\beta_j|} > 1,$$

то $Ee^{\tau|X_1|} < \infty$ для любого $\tau > 0$ и имеет место оценка

$$Ee^{\tau|X_1|} = O\left(\exp \tau^A\right),$$

где $A \geq 1$ — величина, не зависящая от τ.

Доказательство. Поскольку для ограниченной с.в. X_1 утверждение теоремы очевидно, далее будем предполагать, что носитель $F(x)$ не сосредоточен на конечном интервале. Для статистик L и Q, допустимых по некоторой переменной, т.е. $\alpha_{jj}\beta_j \neq 0$ для некоторого j, первое утверждение теоремы является прямым следствием теоремы Зингера ([3, т. 4.4.1]), причем требование $EX_1 < \infty$ оказывается излишним ([3, т. 4.3.1]). Остается доказать утверждение в случае, когда $\alpha_{jj}\beta_j = 0$ для всех $j = 1, \dots, n$. Для начала докажем, что с.в. X_1 имеет моменты любого порядка. Доказательство проведем методом от противного. Пусть p — это максимальное из чисел, для которых

$E|X|^p < \infty$, а $E|X|^{\frac{3p}{2}} = \infty$. Ввиду существования первого момента имеем $p \geq 1$. Поскольку L и Q независимы, можно записать

$$E\{|Q|^{\frac{p}{2}}|L|^p\} = E|Q|^{\frac{p}{2}}E|L|^p.$$

Существование математических ожиданий в правой части очевидно. Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|Q|^{\frac{p}{2}}|L|^p dF(x_1)\dots dF(x_n) = K < \infty. \tag{1.1}$$

Не нарушая общности будем считать, что $\beta_1 \neq 0$ и $\alpha_{12} \neq 0$. Всегда можно выбрать конечный интервал $[-A_1, A_1]$ таким образом, чтобы $P\left(X_1 \in [-A_1, A_1]\right) > 0$. Введем в рассмотрение

$$G_1 = \{(x_3, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n-2} : x_j \in [-A_1, A_1];\ j = 3, \dots, n\}.$$

Выберем достаточно большое положительное число A_2 так, что $P(2A_2 > |X_2| > A_2) > 0$, и при $2A_2 > |x_2| > A_2$ и $(x_3, \dots, x_n) \in G_1$ имеет место $|\sum_{j=2}^n \alpha_{1j}x_j| > \delta > 0$. Обозначим через G_2 множество

$$G_2 = \{(x_2, \dots, x_n) : 2A_2 > |x_2| > A_2;\ x_j \in [-A_1, A_1],\ j = 3, \dots, n\}. \tag{1.2}$$

Найдется такая константа C_1, что в области

$$G = \{(x_1, \dots, x_n) : |x_1| > C_1, (x_2, \dots, x_n) \in G_2\} \tag{1.3}$$

выполняются следующие соотношения:

$$|Q(x_1, \dots, x_n)| \geq C_2|x_1|, \quad |L(x_1, \dots, x_n)| \geq C_3|x_1|. \tag{1.4}$$

Здесь и далее символы C_1, C_2, C_3 используются для обозначения положительных констант. Поскольку в (1.1) функция, стоящая под знаком интеграла, положительна, то переходя к интегрированию по меньшей области G, получаем

$$\int\limits_G |Q|^{p/2}|L|^p dF(x_1)\dots dF(x_n) \leq K < \infty.$$

Теперь, используя оценки (1.4) для $|Q|$ и $|L|$ в этой области, будем иметь

$$C_2^{p/2}C_3^p\int\limits_G |x_1|^{\frac{3p}{2}}dF(x_1)\dots dF(x_n) \leq K.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{|x_1|>C_1}|x_1|^{\frac{3p}{2}}dF(x_1) \leq \frac{K}{C_2^{p/2}C_3^p}{b_0}^{-1},$$

где $b_0 = \int\limits_{G_2} dF(x_2)\dots dF(x_n) > 0$. Это неравенство показывает существование абсолютного момента порядка $\frac{3p}{2}$, что противоречит нашему предположению.

Переходим к доказательству первого утверждения теоремы в случае, когда $\alpha_{jj}\beta_j = 0$ для всех $j = 1,\dots,n$. Из независимости L и Q следует, что для любых натуральных m и N имеет место равенство

$$E\{L^{2N}|Q|^m\} = EL^{2N}E|Q|^m. \tag{1.5}$$

Существование интегралов обеспечивается предыдущим утверждением. Зафиксируем N и выберем $m > n-1$.

Поскольку при доказательстве утверждения будем опираться только на (1.5), то не нарушая общности можно считать, что Q зависит от n переменных. Действительно, пусть $Q = \sum_{ij=n_0}^{n} \alpha_{ij}x_ix_j$. Из независимости L и Q имеем $Ee^{itL+i\tau|Q|} = Ee^{itL}Ee^{i\tau|Q|}$. Тогда

$$E\exp\{it\sum_{j=1}^{n_0-1}\beta_jX_j\}E\exp\{it\sum_{j=n_0}^{n}\beta_jX_j + i\tau|Q|\}$$

$$= E\exp\{it\sum_{j=1}^{n_0-1}\beta_jX_j\}E\exp\{it\sum_{j=n_0}^{n}\beta_jX_j\}E\exp i\tau|Q|.$$

В силу того, что в некоторой окрестности нуля $E\exp\{it\beta_jX_j\} \neq 0$, при всех $j = 1,\dots,n_0-1$, то в указанной окрестности

$$E\exp\{it\sum_{j=n_0}^{n}\beta_jX_j + i\tau|Q|\} = E\exp\{it\sum_{j=n_0}^{n}\beta_jX_j\}E\exp i\tau|Q|.$$

Дифференцируя полученное соотношение $2N$ раз по t, m раз по τ и полагая $t=0$, $\tau=0$, получаем соотношение, аналогичное (1.5), в котором Q зависит от всех переменных, что и $L_{n_0} = \sum_{j=n_0}^{n}\beta_jX_j$.

Пусть $\beta_1 = 1$ — максимальный по модулю коэффициент в L. С учетом предыдущего замечания можно считать, что $\alpha_{12} \neq 0$. Опять используем области, определенные в (1.2) и (1.3). Полагаем

$$b_j = \int\limits_{G_2} |\beta_2x_2 + \dots + \beta_nx_n|^j dF(x_2)\dots dF(x_n).$$

Поскольку G_2 — ограниченная область, то, обозначив через

$$b = \max\{|\beta_2x_2 + \dots + \beta_nx_n| : (x_2,\dots,x_n) \in G_2\},$$

получаем $b_j \leq b^j$ для всех $j \in \mathbf{N}$. Пусть $\gamma_j = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^k dF(x)$ — абсолютный момент порядка k. Рассмотрим множество точек $(x_1, \ldots, x_n)$, которые удовлетворяют соотношениям $|x_1| \leq C_1$ и $(x_2, \ldots, x_n) \in G_2$. Это ограниченное множество; следовательно, существует положительная константа, которую обозначим C_4, что

$$\int\limits_{|x_1| \leq C_1} |x_1|^m dF(x_1)$$

$$\times \int\limits_{G_2} \left(|x_1| - |\beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n|\right)^{2N} dF(x_2) \ldots dF(x_n) \leq {C_4}^{2N+m}. \tag{1.6}$$

Для доказательства первого утверждения теоремы достаточно показать существование такого положительного числа R, что $\gamma_k \leq k! R^k$ для всех натуральных k. Тогда из теоремы Леви–Райкова (см. [5, с. 36]) будет следовать первое утверждение теоремы. Докажем нужное неравенство для γ_k по индукции. Полагаем

$$R = max\left(R_1, R_2, 4eb_1 b_0^{-1}\right), \tag{1.7}$$

где R_1 определяется из условия $R_1^k > \gamma_k / k!$, когда $k = 0, 1, \ldots, m$, а R_2 из условия

$$\frac{1}{(2N+m)!}\left(\frac{C_4}{R_2}\right)^{2N+m} + \frac{E|Q|^m\,(2N+1)^{n-1}}{(2N+1)\ldots(2N+m)\,R_2^m} + e^{b/R_2} - 1 \leq \frac{b_0}{2e}$$

для всех N. Предположим, что $\gamma_k \leq k! R^k$ для $k = 0, 1, \ldots, 2N+m-2$. Покажем, что тогда верны оценки

$$\gamma_{2N+m} \leq \frac{1}{e}\,(2N+m)! R^{2N+m} \leq (2N+m)! R^{2N+m},$$

$$\gamma_{2N+m-1} \leq (2N+m-1)! R^{2N+m-1}.$$

Переходя в левой части (1.5) к интегрированию по области G, используя первое из соотношений (1.4) и очевидное неравенство

$$|x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n| \geq \Big| |x_1| - |\beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n| \Big|,$$

получаем

$$\int\limits_{|x_1| > C_1} |x_1|^m dF(x_1)$$

$$\times \int\limits_{G_1} \left(|x_1| - |\beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n|\right)^{2N} dF(x_2) \ldots dF(x_n) \leq E|Q|^m E L^{2N}.$$

После прибавления к этому неравенству (1.6) будем иметь

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x_1|^m dF(x_1)$$

$$\times \int\limits_{G_1} \left(|x_1| - |\beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n|\right)^{2N} dF(x_2) \ldots dF(x_n)$$

$$\le {C_4}^{2N+m} + E|Q|^m EL^{2N}.$$

Далее, поскольку подынтегральное выражение положительно, раскладывая его по биному и отделяя первые два слагаемых, получаем

$$|b_0 \gamma_{2N+m} - 2N b_1 \gamma_{2N+m-1}| \le {C_4}^{2N+m}$$

$$+E|Q|^m L^{2N} + \sum_{j=2}^{2N} C_{2N}^j b_j \gamma_{2N+m-j}. \tag{1.8}$$

Оценим третье слагаемое в правой части (1.8), учитывая предположение индукции

$$\sum_{j=2}^{2N} C_{2N}^j b_j \gamma_{2N+m-j} \le \sum_{j=2}^{2N} C_{2N}^j b^j \, (2N+m-j)! R^{2N+m-j}$$

$$\le \sum_{j=2}^{2N} \frac{(2N)!}{j!\,(2N-j)!} \, (2N+m-j)! R^{2N+m} \, (b/R)^j$$

$$\le (2N+m)! R^{2N+m} \sum_{j=1}^{2N} \frac{1}{j!} \left(\frac{b}{R}\right)^j \le (2N+m)! R^{2N+m} \left(e^{b/R} - 1\right). \tag{1.9}$$

Теперь оценим второе слагаемое из (1.8). Для этого покажем, что для всех $K \le 2N$

$$E|L|^K \le (K+1)^{n-1} \, K! R^K. \tag{1.10}$$

Проведем индукцию по n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что оно верно для $n - 1$. Тогда

$$E|L|^K = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big| x_1 + (\beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n) \Big|^K dF\,(x_1) \ldots dF\,(x_n)$$

$$\le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{K} C_K^j |x_1|^j |\beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n|^{K-j} dF\,(x_1) \ldots dF\,(x_n)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{K} C_K^j j! R^j \left(K-j+1\right)^{n-2} \left(K-j\right)! R^{K-j} \leq \left(K+1\right)^{n-1} K! R^K,$$

что и требовалось доказать. Подставляя (1.9) и (1.10) в (1.8) и учитывая (1.7), получаем

$$|\gamma_{2N+m} - 2Nb_1 b_0^{-1} \gamma_{2N+m-1}| \leq (2N+m)! R^{2N+m} \left(\frac{1}{(2N+m)!} \left(\frac{C_4}{R}\right)^{2N+m} \right.$$

$$\left. + \frac{E|Q|^m \left(2N+1\right)^{n-1}}{\left(2N+1\right) \ldots \left(2N+m\right) R^m} + e^{b/R} - 1 \right) b_0^{-1} \leq \frac{1}{2e} \left(2N+m\right)! R^{2N+m}.$$

Рассмотрим две взаимоисключающие возможности:

1) $(2Nb_1/b_0)\, \gamma_{2N+m-1} \leq \frac{1}{2} \gamma_{2N+m}$;

2) $(2Nb_1/b_0)\, \gamma_{2N+m-1} > \frac{1}{2} \gamma_{2N+m}$.

В первом случае

$$\gamma_{2N+m} \leq 2\gamma_{2N+m} - \left(4Nb_1 b_0^{-1}\right) \gamma_{2N+m-1} \leq \frac{1}{e} \left(2N+m\right)! R^{2N+m}.$$

Во втором случае воспользуемся классическим неравенством для абсолютных моментов $\gamma_{2N+m-1} \leq \gamma_{2N+m}^{1-1/(2N+m)}$. Тогда

$$\frac{1}{2} \gamma_{2N+m} \leq 2Nb_1 b_0^{-1} \gamma_{2N+m-1} \leq 2Nb_1 b_0^{-1} \gamma_{2N+m}^{1-1/(2N+m)},$$

и применив простое неравенство $\mathrm{e}^K > K^K/K!$, получаем

$$\gamma_{2N+m} \leq \left(4Nb_1 b_0^{-1}\right)^{2N+m} \leq \left(2b_1 b_0^{-1}\right)^{2N+m} \left(2N+m\right)^{2N+m}$$

$$\leq (2N+m)! \left(2eb_1 b_0^{-1}\right)^{2N+m} \leq (2N+m)! \left(\frac{R}{2}\right)^{2N+m} \leq \frac{1}{e} \left(2N+m\right)! R^{2N+m}.$$

Для завершения доказательства осталось оценить величину γ_{2N+m-1}:

$$\gamma_{2N+m-1} \leq \gamma_{2N+m}^{1-1/(2N+m)} \leq \frac{1}{e} (2N+m)! R^{2N+m-1} / ((2N+m)!)^{1/(2N+m)}$$

$$\leq \frac{1}{2N+m} \left(2N+m\right)! R^{2N+m-1} = (2N+m-1)! R^{2N+m-1},$$

что доказывает первое утверждение теоремы.

Переходим к доказательству случая 2. Будем считать, что для α_{11} и β_1 выполняется

$$\frac{|\alpha_{11}|^{1/2}}{\max\limits_{i,j=1,\ldots,n}|\alpha_{ij}|^{1/2}}+\frac{|\beta_1|}{\max\limits_{j=1,\ldots,n}|\beta_j|}>1. \tag{1.11}$$

Из аналитичности $M(t)$ в полосе $|Ret|<1/R$ следует сходимость следующего интеграла:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{\tau|x|}dF\left(x\right)<\infty,\qquad 0\leq\tau<1/R. \tag{1.12}$$

Пусть τ_0 — точная верхняя грань тех τ, для которых $E\left(e^{\tau|X_1|}\right)<\infty$. Воспользуемся оценками

$$|Q|<\max_{i,j=1,\ldots,n}|\alpha_{ij}|\left(|x_1|+\ldots+|x_n|\right)^2,|L|<\max_{j=1,\ldots,n}|\beta_j|\left(|x_1|+\ldots+|x_n|\right). \tag{1.13}$$

Опять выберем ограниченную область G_2 и достаточно большое C_1, что при $|x_1|>C_1$ и $(x_2,\ldots,x_n)\in G_2$ будут выполняться неравенства

$$|Q|^{1/2}>\left(|\alpha_{11}|-\delta_1\right)^{1/2}|x_1|,\qquad |L|>(|\beta_1|-\delta_2)|x_1|. \tag{1.14}$$

Заметим, что если C_1 будет достаточно большим, то δ_1 и δ_2 могут быть выбраны настолько близко к нулю, что будет иметь место

$$\frac{\left(|\alpha_{11}|-\delta_1\right)^{1/2}}{\max\limits_{ij}|\alpha_{ij}|^{1/2}}+\frac{(|\beta_1|-\delta_2)}{\max\limits_{j}|\beta_j|}>1. \tag{1.15}$$

Теперь пусть $\tau<\tau_0$. Из независимости L и Q следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{\frac{\tau}{\max_{ij}|\alpha_{ij}|^{1/2}}|Q|^{1/2}+\frac{\tau}{\max_j|\beta_j|}|L|\right\}dF\left(x_1\right)\ldots dF\left(x_n\right)$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{\frac{\tau}{\max_{ij}|\alpha_{ij}|^{1/2}}|Q|^{1/2}\right\}dF(x_1)\ldots dF(x_n)$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{\frac{\tau}{\max_j|\beta_j|}|L|\right\}dF(x_1)\ldots dF(x_n).$$

Существование интегралов следует из (1.13) и выбора τ.

С другой стороны,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\Big\{\frac{\tau}{\max_{ij}|\alpha_{ij}|^{1/2}}|Q|^{1/2}+\frac{\tau}{\max_j|\beta_j|}|L|\Big\}dF\left(x_1\right)\dots dF\left(x_n\right)$$

$$>\int\limits_{|x_1|>C_1}\int\limits_{G_1}\exp\Big\{\frac{(|\alpha_{11}|-\delta_1)^{1/2}}{\max_{ij}|\alpha_{ij}|^{1/2}}\tau|x_1|+\frac{|\beta_1|-\delta_2}{\max_j|\beta_j|}\tau|x_1|\Big\}dF\left(x_1\right)\dots dF\left(x_n\right).$$

Из этих двух соотношений следует аналитичность $M(t)$ в полосе

$$|Ret|<\tau_0\left(\frac{(|\alpha_{11}|-\delta_1)^{1/2}}{\max_{ij}|\alpha_{ij}|^{1/2}}+\frac{|\beta_1|-\delta_2}{\max_j|\beta_j|}\right).$$

В силу (1.15), получаем противоречие, которое показывает, что $M\left(t\right)$ — целая функция. Далее, обозначив через $\phi(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{\tau|x|}dF(x)$, имеем $\phi^n(\tau)>\phi(C_3\tau)-C_4e^{C_5\tau}$, где

$$C_3=\frac{|\alpha_{11}|^{1/2}}{\max\limits_{ij}|\alpha_{ij}|^{1/2}}+\frac{|\beta_1|}{\max\limits_{j}|\beta_j|}>1.$$

Пусть $\omega(\tau)=\max\{\phi(\tau),C_4e^{\tau}\}$. Тогда $\omega(C_3\tau)<\omega^n(\tau)$. Зафиксируем точку $x_0>0$ и $y_0=\omega(x_0)$. В силу монотонности функции ω получаем

$$\omega(\tau)<y_0^{n^{\log_{C_3}\tau/x_0}}=C_6e^{\tau^A},$$

что и доказывает теорему.

2. Характеризация нормального распределения

В этом разделе будет получена характеризация нормального закона свойством независимости линейной и квадратичной форм. Условия, которые налагаются на коэффициенты форм, являются непосредственным обобщением условий в теореме Лага.

Теорема 2.1. *Пусть*

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jj}\beta_j^k\neq 0,\quad k=0,1,\dots,\tag{2.1}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}\beta_i=0,\ \sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}\beta_i\beta_j=0.\tag{2.2}$$

Тогда для независимости L и Q необходимо и достаточно, чтобы с.в. $X_1, \ldots, X_n$ были распределены по нормальному закону и чтобы $\sum_{i=1}^n \alpha_{ij}\beta_i = 0, \;\; j = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Докажем необходимость. Не уменьшая общности будем считать, что $\max\limits_{j=1\ldots n} |\beta_j| \leq 1$. Из условия (2.1) теоремы следует, что существует хотя бы один номер j, для которого $\alpha_{jj}\beta_j \neq 0$. В силу теоремы Зингера (см. [3, т. 4.3.1]) и теоремы 1.1, с.в. X_1 имеет конечный первый момент, и, более того, найдется такое $R > 0$, что величина $M(t)$ будет конечна для всех комплексных t из полосы $|Ret| < R$.

Из независимости L и Q имеем

$$E\{Qe^{tL}\} = EQEe^{tL}, \tag{2.3}$$

причем математические ожидания, стоящие в обеих частях (2.3), имеют конечное значение для t из рассматриваемой полосы. Перепишем (2.3) в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \right) \exp\{t \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j\} dF(x_1) \ldots dF(x_n)$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \right) dF(x_1) \ldots dF(x_n)$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\{t \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j\} dF(x_1) \ldots dF(x_n).$$

В силу независимости X_j, это соотношение приводится к виду

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jj} M''(\beta_j t) \prod_{k \neq j} M(\beta_k t) + \sum_{i \neq j} \alpha_{ij} M'(\beta_i t) M'(\beta_j t) \prod_{k \neq i,j} M(\beta_k t)$$

$$= EQ \prod_{k=1}^{n} M(\beta_k t).$$

Поскольку $M(t)$ — аналитическая функция и $M(0) = 1$, то существует некоторая окрестность нуля, в которой $M(t) \neq 0$. В указанной окрестности

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jj} \frac{M''(\beta_j t)}{M(\beta_j t)} + \sum_{i \neq j} \alpha_{ij} \frac{M'(\beta_i t) M'(\beta_j t)}{M(\beta_i t) M(\beta_j t)} = EQ.$$

После замены $f(t) = [lnM(t)]'$ (здесь и далее имеется в виду непрерывная ветвь логарифмической функции, принимающая вещественные значения при положительных значениях аргумента) получаем уравнение

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jj} f'(\beta_j t) + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} f(\beta_i t) f(\beta_j t) = EQ. \tag{2.4}$$

Легко видеть, что при выполнении условий (2.2) теоремы уравнению (2.4) удовлетворяет функция $f(t) = \sigma^2 t + m$. Докажем теперь, что других решений для уравнения (2.4) нет. Для этого покажем, что $f^{(k)}(0) = 0$, $k \geq 2$. Доказательство проведем по индукции. Дифференцируя (2.4) по t и полагая $t = 0$, получаем

$$f''(0) \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jj} \beta_j + f(0) f'(0) \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} (\beta_i + \beta_j) = 0.$$

Из условия (2.1) и первого из условий (2.2) непосредственно вытекает, что $f''(0) = 0$. Дифференцируя (2.4) дважды по t и полагая $t = 0$, получим

$$f'''(0) \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} \beta_i^2 + f'^2(0) \sum_{i,j=1}^{n} 2\alpha_{ij} \beta_i \beta_j + f''(0) f(0) \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \left(\beta_i^2 + \beta_j^2\right) = 0.$$

В силу (2.1), второго из условий (2.2), получаем $f'''(0) = 0$, поскольку $f''(0) = 0$ из предыдущего утверждения. Далее, пусть $f^{(j)}(0) = 0$, $j = 1, \ldots, k-1$. Дифференцируя соотношение (2.4) $k-1$ раз и полагая $t = 0$, будем иметь

$$f^{(k)}(0) \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jj} {\beta_j}^{k-1} + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \sum_{l=0}^{k-1} C_{k-1}^{l} \beta_i^l \beta_j^{k-1-l} f^{(l)}(0) f^{(k-1-l)}(0) = 0. \tag{2.5}$$

Каждое слагаемое, стоящее под знаком суммы по l, содержит в качестве множителя производную f порядка выше второго, следовательно, согласно предположению индукции, вся вторая сумма в левой части (2.5) равна нулю. Тогда из (2.1) вытекает, что $f^{(k)}(0) = 0$. Таким образом, доказано, что единственным решением (2.4) является функция $f(t) = \sigma^2 t + m$, которая отвечает нормальному распределению с $EX = m$ и $DX = \sigma^2$.

Далее, пусть $X_1, \ldots, X_n$ распределены по нормальному закону с $EX = m$ и $DX = \sigma^2$. Рассмотрим $Y = AX$ — ортогональное преобразование, диагонализующее квадратичную форму Q, т.е. $Q = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k Y_k^2$. Как известно, Y_j тоже будут независимы и одинаково распределены по нормальному закону. При этом преобразовании линейная форма примет вид $L = \sum_{k=1}^{n} h_k Y_k$.

Независимость Q и L, как хорошо известно, равносильна следующему соотношению:

$$E\{e^{it_1L+it_2Q}\} = Ee^{it_1L}Ee^{it_2Q}. \tag{2.6}$$

Заметим, что для нормальных с.в. функция Ee^{it_1L} является аналитической во всей комплексной плоскости, а функция Ee^{it_2Q} — в полосе $|Imt_2| < \frac{1}{2\sigma^2 \max|\lambda_k|}$, поэтому равенство (2.6) можно рассматривать при t_1 на мнимой оси и t_2 на отрезке $[-i\frac{1}{2\sigma^2 \max|\lambda_k|}, i\frac{1}{2\sigma^2 \max|\lambda_k|}]$. Для таких t_1 и t_2 имеем

$$Ee^{it_1L} = \prod_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it_1h_ky_k}dF(y_k) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}t_1^2\sum_{k=1}^{n}h_k^2 + imt_1\sum_{k=1}^{n}h_k\right). \tag{2.7}$$

$$Ee^{it_2Q} = \prod_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it_2\lambda_ky_k^2}dF(y_k)$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(it_2\lambda_ky_k^2 - \frac{(y_k-m)^2}{2\sigma^2}\right)dy_k$$

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sqrt{1-2i\sigma^2t_2\lambda_k})y_k - \frac{m}{\sqrt{1-2i\sigma^2t_2\lambda_k}}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{im^2t_2\lambda_k}{1-2i\sigma^2t_2\lambda_k}\right)dy_k = \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-2i\sigma^2t_2\lambda_k}}\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{im^2t_2\lambda_k}{1-2i\sigma^2t_2\lambda_k}\right). \tag{2.8}$$

$$Ee^{it_1L+it_2Q} = \prod_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(it_1h_ky_k + it_2\lambda_ky_k^2 - \frac{(y_k-m)^2}{2\sigma^2}\right)dy_k$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sqrt{1-2i\sigma^2t_2\lambda_k}y_k - \frac{m+i\sigma^2t_1h_k}{\sqrt{1-2i\sigma^2t_2\lambda_k}}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{(m+i\sigma^2t_1h_k)^2}{2\sigma^2(1-2i\sigma^2t_2\lambda_k)} - \frac{m^2}{2\sigma^2}\right)dy_k$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-2i\sigma^2t_2\lambda_k}}\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(m+i\sigma^2t_1h_k)^2}{2\sigma^2(1-2i\sigma^2t_2\lambda_k)} - \frac{m^2}{2\sigma^2}\right). \tag{2.9}$$

Подставляя выражения (2.7)–(2.9) в (2.6), получаем

$$\exp\left(-\sigma^2 t_1^2 \sum_{k=1}^n h_k^2 + imt_1 \sum_{k=1}^n h_k\right)$$

$$\times \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1-2i\sigma^2 t_2\lambda_k}} \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{im^2 t_2\lambda_k}{1-2i\sigma^2 t_2\lambda_k}\right)$$

$$= \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1-2i\sigma^2 t_2\lambda_k}} \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{(m+i\sigma^2 t_1 h_k)^2}{2\sigma^2(1-2i\sigma^2 t_2\lambda_k)} - \frac{m^2}{2\sigma^2}\right). \qquad (2.10)$$

Беря логарифм от обеих частей (2.10), после сокращения приходим к следующему выражению:

$$\frac{\sigma^2}{2} t_1^2 \sum_{k=1}^n h_k^2 \left(\frac{2i\sigma^2 t_2\lambda_k}{1-2i\sigma^2 t_2\lambda_k}\right) - imt_1 \sum_{k=1}^n h_k \left(\frac{2i\sigma^2 t_2\lambda_k}{1-2i\sigma^2 t_2\lambda_k}\right) = 0.$$

Заметим, что если это равенство верно для t_2 из нашего отрезка, то оно выполняется для всех t_2. Устремляя $t_2 \to \infty$, немедленно получаем, что $\sum\limits_{k:\lambda_k\neq 0} h_k^2 = 0$. Следовательно, скалярное произведение $< h, diag(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)h >$ $= 0$, где $h = (h_1, \ldots, h_n)$. Далее, обозначим через $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Из определения оператора A следует, что $h = A\beta$ и $Q = A^{-1} diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)A$. Учитывая, что матрица квадратичной формы Q симметрическая, получаем

$$0 =< h, diag(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)h >=< A\beta, diag(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)A\beta >$$

$$=< \beta, A^{-1} diag(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)A\beta >=< \beta, Q^2\beta >=< Q\beta, Q\beta > .$$

Следовательно, $Q\beta = 0$, т.е. $\sum_{i=1}^n \alpha_{ij}\beta_i = 0$ для всех $j = 1, \ldots, n$.

В обратную сторону утверждение теоремы очевидно, поскольку существует ортогональное преобразование, расцепляющее статистики L и Q. Теорема доказана.

3. Ограниченные случайные величины

В этом разделе покажем, что в классе ограниченных с.в. X_j независимость Q и L может приводить только к распределениям вида $P(X_1^2 = const) = 1$. Как следствие этого факта, будет получено полное описание распределений, которые обеспечивают независимость линейной и квадратичной форм, в случае, когда последняя является строго знакопостоянной.

Теорема 3.1. *Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые, одинаково распределенные ограниченные с.в. Тогда, если L и Q являются независимыми и $\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \neq 0$, то случайная величина X_1 дискретно распределена по закону*

$$P(X_1 = a) = p, \quad P(X_1 = -a) = 1 - p,$$

когда $Q = \sum_{j=1}^n \alpha_{jj} X_j^2$, и ее распределение вырожденно в остальных случаях.

Доказательство. По условию теоремы все точки роста функции распределения $F(x)$ случайной величины X_1 сосредоточены на конечном интервале. Пусть A_1 и B_1 — соответственно точная нижняя и точная верхняя грани для этих точек, т.е. $A_1 = \sup\{A : F(A) = 0\}$, а $B_1 = \inf\{B : F(B) = 1\}$, и пусть $\max_{j=1,\dots,n} |\beta_j| = 1$. Поскольку случайные величины $X_1, \dots, X_n$ могут принимать значения только из конечного интервала $[A_1, B_1]$, то и линейная статистика $L(X_1, \dots, X_n)$ будет принимать значения из ограниченного множества. Будем считать, что в линейной форме $L = \sum_{j=1}^n \beta_j X_j$ первые n_0 коэффициентов $\beta_j > 0$, а при $j > n_0 : \ \beta_j \leq 0$. Обозначим через $X_0 = (X_1^0, \dots, X_n^0)$, где $X_j^0 = A_1, j = 1, \dots, n_0$; $X_j^0 = B_1, j = n_0, \dots, n$ Тогда, очевидно, $P(L \geq L_0) = 1$, где $L_0 = L(X_0)$. Введем в рассмотрение событие

$$G_\varepsilon = \{\omega : L\Big(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\Big) \in [L_0, L_0 + \varepsilon]\}.$$

Легко убедиться, что $P(G_\varepsilon) > 0$ для всех $\varepsilon > 0$ и что условные вероятности

$$P(X_j \in [A_1, A_1 + \varepsilon] \mid G_\varepsilon) = 1, \quad j \leq n_0,$$

$$P(X_j \in [B_1 - \varepsilon, B_1] \mid G_\varepsilon) = 1, \quad j > n_0.$$

Далее, рассмотрим

$$D_\delta = \{\omega : Q\left(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\right) \in [Q_0 - \delta, Q_0 + \delta]\},$$

где $Q_0 = Q(X_0)$. Нетрудно проверить, что при

$$\delta = \delta(\varepsilon) = 2\varepsilon \sum_{i,j=1}^n |\alpha_{ij}| \max\{|A_1| + |B_1|, \varepsilon\}$$

верно включение $G_\varepsilon \subset D_\delta$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$

$$P\left(Q \in [Q_0 - \delta(\varepsilon), Q_0 + \delta(\varepsilon)]\}, L \in [L_0, L_0 - \varepsilon]\right)$$
$$= P\left(Q \in [Q_0 - \delta(\varepsilon), Q_0 + \delta(\varepsilon)]\right).$$

С другой стороны, из независимости Q и L для любого $\varepsilon > 0$ следует, что

$$P\left(Q \in [Q_0 - \delta(\varepsilon), Q_0 + \delta(\varepsilon)], L \in [L_0, L_0 + \varepsilon]\right)$$
$$= P\left(Q \in [Q_0 - \delta(\varepsilon), Q_0 + \delta(\varepsilon)]\right) P\left(L \in [L_0, L_0 + \varepsilon]\right).$$

Объединяя последние два равенства, будем иметь

$$P\left(Q \in [Q_0 - \delta(\varepsilon), Q_0 + \delta(\varepsilon)]\right) = 1$$

при всех $\varepsilon > 0$, т.к. $P(G_\varepsilon) > 0$. Переходя к пределу, при $\varepsilon \to 0$, получаем $P(Q = Q_0) = 1$.

Далее покажем, что функция распределения случайной величины X_1 может иметь не более двух точек роста. Доказательство проведем методом от противного. Пусть точки a_1, a_2, a_3 такие, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$P\left(X_1 \in [a_l - \varepsilon, a_l + \varepsilon]\right) > 0, \qquad l = 1, 2, 3.$$

Выбираем с.в. X_m, для которой хотя бы один из коэффициентов $\alpha_{m,j}$, $j = 1, \ldots, n$, не равнялся бы нулю. Не нарушая общности можно считать, что это X_1.

Рассмотрим множества

$$M_k = \{x_1 \in [a_k - \varepsilon, a_k + \varepsilon]; x_j \in [a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon],\ j = 2, \ldots, n\}.$$

Так как $Q(x_1, \ldots, x_n)$ по переменной x_1 является полиномом степени не выше второй, то среди величин

$$Q(a_1, a_1, \ldots, a_1), \quad Q(a_2, a_1, \ldots, a_1), \quad Q(a_3, a_1, \ldots, a_1)$$

хотя бы две будут различны. В силу непрерывности квадратичного полинома, найдется такое $\varepsilon > 0$, что хотя бы на двух из множеств M_k форма $Q(x_1, \ldots, x_n)$ будет принимать различные значения. Но $P\left((X_1, \ldots, X_n) \in M_k\right) > 0$, $k = 1, 2, 3$. Мы приходим к противоречию с тем, что случайная квадратичная форма $Q(X_1, \ldots, X_n)$ принимает постоянное значение на событии полной вероятности. Следовательно, случайная величина X_1 может принимать только два значения a_1 и a_2. Теперь, если Q принимает постоянное значение, то отсюда вытекает $Q(a_1, \ldots, a_1) = Q(a_2, \ldots, a_2)$, т.е. $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} a_1^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} a_2^2$. Поскольку $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \neq 0$, то получаем, что $a_1^2 = a_2^2$. Если $a_1 = a_2$, теорема доказана. Пусть $a_1 = -a_2$. Проверим, что в этом случае коэффициенты α_{ij}

равны нулю, когда $i \neq j$. Действительно, если Q остается постоянной, когда случайные величины X_j независимо принимают значения a и $-a$, то

$$Q_0 = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} X_i X_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jj} X_j^2 + \sum_{i \neq j} \alpha_{ij} X_i X_j.$$

Просуммируем эти равенства по всем 2^n значениям $X_j = \pm a$, тогда получаем

$$2^n Q_0 = 2^n \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jj} a^2 + \sum_{(X_1=\pm a,\ldots,X_n=\pm a)} \sum_{i\neq j} \alpha_{ij} X_i X_j = 2^n \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jj} a^2,$$

поскольку $\displaystyle\sum_{X_i=\pm a} \sum_{X_j=\pm a} X_i X_j = 0$, $i \neq j$.

Следовательно, $Q_0 = a^2 \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jj}$. Таким образом, $\displaystyle\sum_{i\neq j} \alpha_{i,j} X_i X_j = 0$ при всех значениях $X_j = \pm a$. Покажем, что отсюда следует утверждение теоремы. Будем действовать по индукции. При $n = 2$ утверждение очевидно. Предположим, что оно верно для числа переменных, равного $n-1$, и докажем его для случая n переменных. При всех значениях $X_j = \pm a$ выполняется

$$\sum_{i\neq j\leq n} \alpha_{i,j} X_i X_j = \sum_{i=1}^{n-1} 2\alpha_{i,n} X_i X_n + \sum_{i\neq j\leq n-1} \alpha_{i,j} X_i X_j = 0. \tag{3.1}$$

Пусть случайный вектор $(X_1, \ldots, X_{n-1})$ принимает какое-либо из 2^{n-1} значений при $X_j = \pm a$. Полагая в равенстве (3.1) сначала $X_n = a$, а затем $X_n = -a$ и складывая полученные равенства, получаем

$$2 \sum_{\substack{i\neq j \\ i,j\leq n-1}} \alpha_{ij} X_i X_j = 0.$$

Тогда, согласно индукционному предположению, имеем $\alpha_{i,j} = 0$ при всех $i \neq j$, когда $i,\ j = 1, 2, \ldots, n-1$. Далее, фиксируя значения $(X_2, \ldots, X_n)$, полагая $X_1 = a$, а потом $X_1 = -a$, и складывая полученные равенства, получаем, что $\alpha_{1,n} = 0$. Действуя аналогичным образом, получим

$$\alpha_{2,n} = \alpha_{3,n} = \ldots = \alpha_{n-1,n} = 0,$$

что и доказывает наше утверждение.

Далее покажем, что независимость линейной и квадратичной форм в случае, когда последняя является строго знакопостоянной, может приводить только к распределениям, которые имеют ограниченный носитель. Тогда, как следствие из предыдущей теоремы, получаем характеризацию указаных распределений независимостью линейной и квадратичной форм.

Теорема 3.2. *Пусть Q — строго знакопостоянная квадратичная форма. Если Q и L независимы, то распределение с.в. X_1 ограниченно.*

Доказательство. Не нарушая общности будем считать, что квадратичная форма Q является положительно определенной.

Если Q — строго положительно определенная квадратичная форма, то существует линейное преобразование $Y = TX$, которым она приводится к виду $Q = \sum_{j=1}^{n} Y_j^2$, а L будет иметь вид $L = \sum_{j=1}^{n} c_i Y_i$. Рассмотрим событие $\{Q < q_0\}$. Всегда возможно подобрать такое число q_0, что $P\left(Q < q_0\right) > 0$. Очевидно, что

$$\{Q < q_0\} \subset \{y_j^2 < q_0, j = 1, \ldots, n\} \subset \{|L| < |q_0|^{\frac{1}{2}} \sum_{ij=1}^{n} |c_j|\}.$$

Тогда $P\left(Q < q_0, |L| < l_0\right) = P\left(Q < q_0\right)$, где $l_0 = |q_0|^{\frac{1}{2}} \sum_{ij=1}^{n} |c_j|$. С другой стороны, из независимости L и Q следует независимость $|L|$ и Q, и мы должны иметь

$$P\left(Q < q_0, |L| < l_0\right) = P\left(Q < q_0\right) P\left(|L| < l_0\right).$$

Объединяя эти два равенства, получаем $P\left(|L| < l_0\right) = 1$. Тогда (см. [5, с. 326]) носитель функции распределения $F\left(x\right)$ случайной величины X_1 также ограничен. Теорема доказана.

4. Выборки случайной длины

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые, одинаково распределенные случайные величины с конечной дисперсией $DX_1 = \sigma^2$ и $EX_1 = m$.

Рассмотрим "выборочное среднее" $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} X_j$ и "выборочную дисперсию" $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum\limits_{j=1}^{n} \left(X_j - \overline{X_n}\right)^2$, где объем выборки n есть случайная величина, дискретно распределенная по закону $P(n = k) = p_k$, $k \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, и не зависящая от X_j.

Теорема 4.1. *Если S_n^2 имеет постоянную регрессию на $\overline{X_n}$, то с.в. X_1 нормальна.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что не нарушая общности можно считать $m = 0$. Для доказательства теоремы потребуется следующая вспомогательная лемма.

Лемма 4.1. *В условиях теоремы 4.1, если* $EX_1^{2p} < \infty$, *то моменты* $EX_1^m = EY^m$, *где* $Y \in N_{(0,\sigma^2)}$ *— нормальная с.в.,* $m = 1, 2, \ldots, 2p$.

Очевидным выводом из леммы 4.1 является

Следствие. *Все моменты нечетного порядка с.в.* X_1 *равны нулю.*

Доказательство. Условие теоремы 4.1 равносильно (см.[3]) следующему соотношению:

$$E\{S_n^2 e^{it\overline{X_n}}\} = ES_n^2 Ee^{it\overline{X_n}}, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{4.1}$$

Перепишем уравнение (4.1) в виде

$$\sum_{k=2}^{\infty} p_k \varphi^k(t/k)\left((\ln\varphi(t/k))'' + \sigma^2\right) = 0.$$

Поскольку $\varphi(t)$ — непрерывная функция и $\varphi(0) = 1$, то в некоторой окрестности нуля $\varphi(t) \neq 0$. После замены $f(t) = ln\varphi(t)$ в указанной окрестности получаем

$$\sum_{k=2}^{\infty} p_k e^{kf(t/k)}\left(f''(t/k) + \sigma^2\right) = 0. \tag{4.2}$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что $f^{(k)}(0) = 0$, при $k = 3, \ldots, 2p$. Заметим, что ряд в (4.2) имеет $2p - 2$ непрерывные производные в окрестности нуля, получаемые почленным дифференцированием. Теперь, дифференцируя (4.2) по t и полагая $t = 0$, получим $f'''(0)\sum\limits_{k=2}^{\infty} p_k/k = 0$, откуда сразу следует, что $f'''(0) = 0$. Теперь покажем, что для любого $3 \leq m \leq 2p$: $f^{(m)}(0) = 0$. Доказательство проведем по индукции. Пусть $f^{(j)}(0) = 0$, $j = 3, \ldots, m$. Покажем, что $f^{(m+1)}(0) = 0$. Дифференцируя (4.2) $m - 1$ раз по t и полагая $t = 0$, будем иметь

$$\sum_{k=2}^{\infty} p_k \Bigg((e^{kf(t/k)})^{(m-1)}|_{t=0}(f''(0) + \sigma^2)$$

$$+ \sum_{j=1}^{m-2} C_{m+1}^{j}(e^{kf(t/k)})^{(m-1-j)}|_{t=0} f^{(j+2)}(0) + e^{kf(0)}(1/k)^{m-1} f^{(m+1)}(0)\Bigg) = 0.$$

Используя предположение индукции, заключаем, что

$$\sum_{k=2}^{\infty} p_k e^{kf(0)}(1/k)^{m-1} f^{(m+1)}(0) = 0.$$

Следовательно, $f^{(m+1)}(0) = 0$, что и доказывает лемму.

Теперь переходим непосредственно к доказательству теоремы. Покажем, что с.в. X_1 имеет моменты любого порядка. Доказательство проведем по индукции. Допустим, что существует момент порядка $2p$, и докажем существование момента порядка $2p+2$. Продифференцируем обе части (4.1) $2p-2$ раза по t, так что получаем

$$E\{S_n^2 \overline{X_n}^{2p-2} e^{it\overline{X_n}}\} = ES_n^2 E\{\overline{X_n}^{2p-2} e^{it\overline{X_n}}\}.$$

Подставим в это равенство выражения для S_n^2 и $\overline{X_n}$ и после некоторых преобразований будем иметь

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{p_k}{k^{2p}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2p} \left(1 - \exp\left(\frac{itx}{k}\right)\right) dF(x) = \sum_{k=2}^{\infty} p_k \left(\frac{1}{k^{2p}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2p} dF(x) \right.$$

$$\left. +(-1)^p \sigma^2 R_{1,k}(t) - R_{2,k}(t) + R_{3,k}(t) + (-1)^p R_{4,k}(t) \right), \tag{4.3}$$

где

$$R_{1,k}(t) = \frac{1}{k^{2p}} (\varphi(t/k)^k)^{(2p-2)},$$

$$R_{2,k}(t) = \frac{1}{k^{2p}} \varphi^{(2p-1)}(t/k) \varphi'(t/k),$$

$$R_{3,k}(t) = \frac{1}{k^{2p}} \varphi(t/k)^{k-2} \sum_{s=0}^{2p-3} C_{2p-2}^s \left(\varphi^{(s+2)}(t/k) \varphi^{(2p-s-2)}(t/k) \right.$$

$$\left. -\varphi^{(s+1)}(t/k) \varphi^{(2p-s-1)}(t/k) \right),$$

$$R_{4,k}(t) = \frac{1}{k^{2p}} \sum_{j=0}^{2p-3} C_{2p-2}^j (\varphi(t/k)^{k-2})^{(2p-2-j)}$$

$$\times \sum_{s=0}^{j} C_{2p-2}^s \left(\varphi^{(s+2)}(t/k) \varphi^{(2p-s-2)}(t/k) - \varphi^{(s+1)}(t/k) \varphi^{(2p-s-1)}(t/k) \right).$$

Рассмотрим выражение в правой части (4.3). Мы видим, что ряд $R_1(t) = \sum_{k=2}^{\infty} p_k R_{1,k}(t)$ — дважды дифференцируемая функция, производные которой получаются почленным дифференцированием ряда, и, стало быть, в силу следствия к лемме 4.1, существует конечный предел

$$\lim_{t \to 0} \frac{R_1(t) - R_1(0)}{t^2} = r_1.$$

Далее, рассмотрим ряд $R_2(t) = \sum_{k=2}^{\infty} p_k R_{2,k}(t)$. Поскольку производные $\varphi(t)$ нечетного поряка, меньшего $2p$, есть дифференцируемые функции, которые обращаются в нуль при $t = 0$, то они представимы в виде $\varphi^{(2j+1)}(t) = t(c_{2j+1} + \gamma_{2j+1}(t))$, где $\lim_{t\to 0} \gamma_{2j+1}(t) = 0$. Заметим, что ряд $\sum_{k=2}^{\infty} p_k \gamma_{2j+1}(t/k)$ сходится равномерно в окрестности нуля и $\lim_{t\to 0} \sum_{k=2}^{\infty} p_k \gamma_{2j+1}(t/k) = 0$. Отсюда следует, что

$$\lim_{t\to 0} \frac{R_2(t)}{t^2} = r_2$$

существует и конечен. Теперь оценим ряд $R_3(t) = \sum_{k=2}^{\infty} p_k R_{3,k}(t)$. Разобъем в выражении для $R_{3,k}$ сумму по s на две, S_1 и S_2, где S_1 содержит произведения производных $\varphi(t/k)$ четных порядков, а S_2 — нечетных. Проведя для S_1 рассуждение, аналогичное проведенному для R_1, а для S_2 — аналогичное R_2, приходим к выводу , что

$$\lim_{t\to 0} \left|\frac{R_3(t) - R_3(0)}{t^2}\right| < \infty.$$

Последнее слагаемое имеет вид $R_4(t) = \sum_{k=2}^{\infty} p_k R_{4,k}(t)$. Это дважды дифференцируемая функция, под знаком суммы по k стоит сумма произведений трех множителей, являющихся производными, причем либо все производные четного порядка, либо ровно одна четного и две нечетного порядка. В любом случае, после почленного дифференцирования ряда в нуле, получаем $R_4'(0) = 0$. Поэтому существует конечный предел

$$\lim_{t\to 0} \frac{R_4(t) - R_4(0)}{t^2} = r_4.$$

Далее, из классической теоремы о независимости $\overline{X}$ и S^2 (см.[1]), используя лемму 4.1, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2p} dF(x) + (-1)^p \sigma^2 R_{1,k}(0) + R_{3,k}(0) + (-1)^p R_{4,k}(0) = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to 0} \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{p_k}{t^2 k^{2p}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x^{2p} dF(x) + (-1)^p \sigma^2 R_1(t) \right.\right.$$
$$\left.\left. - R_2(t) - R_3(t) + (-1)^p R_4(t) \right\} \right| < K < \infty.$$

Теперь выделим в обеих частях (4.3) вещественную часть и разделим на t^2. Выражение в левой части будет иметь вид

$$Re \sum_{k=2}^{\infty} p_k/t^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^{2p} \left(1 - \exp\left(\frac{itx}{k}\right)\right) dF(x)$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} p_k/t^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{2p}(1-\cos(tx/k))dF(x)$$

$$= 2\sum_{k=2}^{\infty} p_k/t^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{2p}\sin^2(tx/k)dF(x).$$

Поскольку при $t \to 0$ выражение в правой части (4.3) конечно, то

$$\lim_{t\to 0} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2p_k}{k^{2p}t^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{2p}\sin^2\frac{tx}{2k}dF < K < \infty.$$

Слева стоит ряд с неотрицательными членами, следовательно, для любого номера k такого, что $p_k \neq 0$, должно выполняться

$$\lim_{t\to 0} \frac{2p_k}{k^{2p}t^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{2p}\sin^2\frac{tx}{2k}dF < K < \infty.$$

Применяя лемму Фату, находим, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{2p+2}dF < \infty$. Таким образом, с.в. X_1 имеет все моменты, которые, в силу леммы 4.1, совпадают с моментами нормальной с.в., что доказывает теорему.

Как показывает теорема 4.1, для нормальных с.в. эффект постоянства регрессии S_n^2 на $\overline{X_n}$ полностью сохраняется при рассмотрении выборок случайной длины. Следующая теорема дает ответ на вопрос, при каких условиях S_n^2 и $\overline{X_n}$ являются независимыми, где n — случайная величина, не зависящая от X_j.

Теорема 4.1'. *Для независимости $\overline{X_n}$ и S_n^2 необходимо и достататочно выполнения одного из двух условий: либо распределение с.в. X_1 вырождено, либо $\mathrm{P}(n = n_0) = 1$ и X_1 нормальна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 4.1 непосредственно следует, что с.в. X_1 распределена по нормальному закону, возможно вырожденному. Если $P(n = n_0) = 1$, то теорема сводится к классической [1]. Далее будем считать, что распределение с.в. n не вырожденно. Если $\overline{X_n}$ и S_n^2 независимы, то мы, очевидно, должны иметь

$$E\left\{(S_n^2)^N \exp\{it\overline{X_n}\}\right\} = E(S_n^2)^N E\exp\{it\overline{X_n}\}, \tag{4.4}$$

при всех $N \in \mathbf{N}$. Существование математических ожиданий следует из теоремы 4.1. Покажем, что уже при $N = 2$ равенство (4.4) не может иметь места, когда распределение с.в. n не вырожденно. Перепишем (4.4) при $N = 2$ в следующем виде:

$$\sum_{k=2}^{\infty} p_k \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} x_j^2 - \frac{1}{k(k-1)} \sum_{i \neq j} x_i x_j \right)^2$$

$$\times \exp\left(it \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} x_j \right) dF(x_1) \dots dF(x_k)$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} p_k \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} x_j^2 - \frac{1}{k(k-1)} \sum_{i \neq j} x_i x_j \right)^2 dF(x_1) \dots dF(x_k)$$

$$\times \sum_{k=2}^{\infty} p_k \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{ it \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} x_j \} dF(x_1) \dots dF(x_k).$$

Поскольку с.в. X_1 нормальна, то при каждом фиксированном k из классической теоремы ([1]) следует, что $\overline{X_k}$ и S_k^2 независимы, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} x_j^2 - \frac{1}{k(k-1)} \sum_{i \neq j} x_i x_j \right)^2 \exp\{ it \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} x_j \} dF(x_1) \dots dF(x_k)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} x_j^2 - \frac{1}{k(k-1)} \sum_{i \neq j} x_i x_j \right)^2 dF(x_1) \dots dF(x_k)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{ it \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} x_j \} dF(x_1) \dots dF(x_k).$$

Тогда

$$\sum_{k=2}^{\infty} p_k \left(\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} x_j^2 - \frac{1}{k(k-1)} \sum_{i \neq j} x_i x_j \right)^2 dF(x_1) \dots dF(x_k) \right.$$

$$\left. - \sum_{k_1=2}^{\infty} p_{k_1} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{k_1} \sum_{j=1}^{k_1} x_j^2 - \frac{1}{k_1(k_1-1)} \sum_{i \neq j} x_i x_j \right)^2 dF(x_1) \dots dF(x_{k_1}) \right)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{it\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_j\} dF(x_1)\ldots dF(x_k) = 0.$$

Поскольку с.в. X_j независимы и нормальны, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{it\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_j\} dF(x_1)\ldots dF(x_k) = \exp\{-\frac{\sigma^2}{2k}t^2\}.$$

Таким образом, если $\sigma^2 \neq 0$, то, очевидно, для любого k такого, что $p_k \neq 0$, должно выполняться

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_j^2 - \frac{1}{k(k-1)}\sum_{i\neq j} x_i x_j \right)^2 - \sum_{k_1=2}^{\infty} p_{k_1} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{k_1}\sum_{j=1}^{k_1} x_j^2 \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{k_1(k_1-1)}\sum_{i\neq j} x_i x_j \right)^2 dF(x_1)\ldots dF(x_{k_1}) \right\} dF(x_1)\ldots dF(x_k) = 0.$$

Следовательно, если p_{k_1} и p_{k_2} не равны нулю при $k_1 \neq k_2$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{k_1}\sum_{j=1}^{k_1} x_j^2 - \frac{1}{k_1(k_1-1)}\sum_{i\neq j} x_i x_j \right)^2 dF(x_1)\ldots dF(x_{k_1})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{k_2}\sum_{j=1}^{k_2} x_j^2 - \frac{1}{k_2(k_2-1)}\sum_{i\neq j} x_i x_j \right)^2 dF(x_1)\ldots dF(x_{k_2}).$$

Пусть $\sigma^2 = 1$. Непосредственный подсчет показывает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} (S_k^2)^2 dF(x_1)\ldots dF(x_k) = 1 + \frac{2}{k} + \frac{1}{k(k-1)}.$$

Это монотонно убывающая функция по переменной k, следовательно, ее значения при различных k также будут различны. Полученное противоречие доказывает теорему.

В заключение выражаю благодарность своему научному руководителю Г.П. Чистякову за помощь и постоянное внимание к работе.

Список литературы

[1] *А.А. Зингер*, О независимых выборках из нормальной совокупности. — *Успехи мат. наук.* (1951), т. VI, № 5, с. 172.

[2] *А.А. Зингер*, Независимость квазиполиномиальных статистик и аналитические свойства распределений. — *Теория вероятн. и ее применен.* (1958), т. III, № 3, с. 265–284.

[3] *А.М. Каган, Ю.В. Линник, С.Р. Рао*, Характеризационные задачи математической статистики. Наука, Москва (1972).

[4] *Р. Лага*, О стохастической независимости однородной квадратичной статистики и среднего. — *Вестн. Ленингр. ун-та* (1956), т. 1, с. 25–32.

[5] *Ю.В. Линник, И.В. Островский*, Разложения случайных величин и векторов. Наука, Москва (1972).

[6] *R.C. Geary*, Moments of the radio of the mean deviation to the standard deviation for normal samples. — *Biometrika* (1936), v. 28, p. 294–305.

[7] *T. Kawata and H. Sakamoto*, On the characterization of the independence of the sample mean and the sample variance. — *J. Math. Soc. Japan* (1949), v. 1, No. 2, p. 111–115.

[8] *E. Lukacs*, A characterization of the normal distribution. — *Ann. Math. Stat.* (1942), v. 13, No. 1, p. 91.

On the independence of the linear and quadratic forms on independent random variables

K.I. Kabanov

We consider generalizations of the Laha's theorem on the independence of the sample mean and the quadratic form for any linear and quadratic forms.

До питання про незалежність лінійних та квадратичних форм від незалежних випадкових величин

К.І. Кабанов

Наводяться узагальнення теореми Лага про незалежність вибіркового середнього та квадратичної форми для довільних лінійних і квадратичних форм.