Математическая физика, анализ, геометрия
2001, т. 8, № 1, с. 42–57

Отображение нелинейных управляемых систем специального вида на каноническую систему

В.И. Коробов, Т.И. Иванова

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
Пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина
E-mail:vkorobov@univer.kharkov.ua
tivanova@univer.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 21 сентября 2000 года

Приводятся примеры построения отображения нелинейных управляемых систем специального вида на каноническую систему. Примеры иллюстрируют общий подход для решения задачи попадания в начало координат по траекториям нелинейных систем, разработанный авторами. В конце статьи приводятся результаты численного эксперимента, поставленного с использованием полученных результатов.

Введение

Данная статья посвящена одной из важных задач теории оптимального управления — задаче попадания в начало координат по траекториям нелинейных управляемых систем. Рассмотрим нелинейные системы вида

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{y}_1 & = & u, \\ \dot{y}_j & = & y_{j-1},\ j=\overline{2,n-1}, \\ \dot{y}_n & = & y_{n-1}^k,\ k \geq 2, \\ |u| & \leq & 1\ . \end{array} \right. \tag{1}$$

Система (1) называется нуль-управляемой на $[0,\infty)$, если $\forall\ x \in R^n\ \exists T \in [0,\infty)$ и управление $u(t):\ |u(t)| \leq 1,\ t \in [0,T]$, переводящее x в 0 по траектории системы [1].

Отметим, что при чётных k системы вида (1) не являются нуль-управляемыми, а при нечётных k — неуправляемы по первому приближению [1]. Кроме того, при численном интегрировании систем вида (1) в окрестности начала координат возникают трудности, связанные с малостью $\dot{y}_n$. Так как $\dot{y}_n = y_{n-1}^k,\ k \geq 2$, то движение по координате y_n к 0 происходит очень медленно.

Для решения задачи попадания в начало координат по траекториям систем вида (1) в данной статье предлагается подход, основанный на использовании аналитического решения задачи быстродействия для канонической системы:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & u, \\ \dot{x}_j & = & x_{j-1},\ j = \overline{2,n}, \\ |u| & \leq & 1, \end{array}\right. \tag{2}$$

которое было получено В.И. Коробовым и Г.М. Скляром в 1987 году [2]. Предлагаемый в данной статье метод позволит избежать указанных выше трудностей при построении картины синтеза для рассматриваемых нелинейных систем.

Обозначим через $U_k,\ 0 \leq k \leq n-1$, класс кусочно-постоянных функций $u(t):\ [0,\infty) \to R$, $u(t) = \pm 1$, $t \in [0,T]$, $T < \infty$, $u(t) \equiv 0$, $t \in (T,\infty)$, имеющих не более k точек разрыва на интервале $(0,T)$. Заметим, что управления $u(t)$, решающие задачу быстродействия для канонической системы, принадлежат классу U_{n-1}.

Множеством нуль-управляемости системы (1) (системы (2)) называется множество точек $y \in R^n$ ($x \in R^n$), из которых можно попасть в начало координат за конечное время T в силу соответствующей системы под действием управления $u(t):\ |u(t)| \leq 1,\ t \in [0,T]$.

Рассмотрим множества нуль-управляемости систем (1) и (2) при управлениях $u(t) \in U_{n-1}$. Эти множества можно рассматривать как множества траекторий, ведущих в начало координат за конечное время T в силу систем (1) и (2) соответственно, под действием управлений $u(t) \in U_{n-1}$. Обозначим эти множества G_1^n и G_2^n. Хорошо известно, что $G_2^n = R^n$. Кроме того, $G_1^n = R^n$ при нечётных k, однако при чётных k G_1^n не совпадает с R^n.

Построим отображение $y = \Phi(x)$ множества G_2^n на множество G_1^n, при котором траектории системы (2), соответствующие некоторому управлению $u(t) \in U_{n-1}$ переходят в траектории системы (1), соответствующие тому же управлению, и направление движения по этим траекториям совпадает. Найдём также обратное отображение.

Определение 1. *Пусть S — поверхность в R^n. Отображение $y = \Phi(x)$ будем называть S-диффеоморфизмом, если оно непрерывно в области определения и непрерывно-дифференцируемо в ней, кроме, быть может, поверхности S.*

Отображение областей нуль-управляемости будем искать в классе S-диффеоморфизмов. Отметим, что этот класс функций является естественным в данном случае. Поверхностью, на которой будет нарушаться гладкость отображения, является поверхность переключения управления для системы, траектории которой отображаем.

Определение 2. *Пусть S — поверхность в R^n. Системы (1) и (2) назовём S-диффеоморфными, если существует S-диффеоморфизм множества нуль-управляемости системы (2) на множество нуль-управляемости системы (1), который удовлетворяет условиям:*

1) траектории системы (2), соответствующие некоторому управлению $u(t) \in U_{n-1}$, под действием S-диффеоморфизма переходят в траектории системы (1), которые соответствуют тому же управлению;

2) S-диффеоморфизм сохраняет направление движения по этим траекториям.

В дальнейшем будем предполагать, что все рассматриваемые S-диффеоморфизмы удовлетворяют условиям 1) и 2).

Справедлива следующая

Теорема. *Системы (1) и (2) S_{n-1}-диффеоморфны, где S_{n-1} — поверхность переключения управления для задачи быстродействия для системы (2).*

Доказательство теоремы приведём в одной из последующих статей. В данной же статье рассмотрены системы вида (1), (2) второго и третьего порядков. На примере этих систем демонстрируем предлагаемый подход к решению задачи попадания в начало координат по траекториям нелинейных систем, а также трудности, связанные с нахождением явного вида S_{n-1}-диффеоморфизма при $n \geq 3$.

В первой части статьи получен явный вид S_1-диффеоморфизма. Найдено также обратное отображение, переводящее траектории системы (1) второго порядка при управлениях $u(t) \in U_1$ в траектории системы (2) второго порядка (множество G_1^2 во множество G_2^2). Во второй части статьи получен S_2-диффеоморфизм для систем (1) и (2) третьего порядка. Третья часть статьи посвящена нахождению отображения, переводящего множество G_1^3 во множество G_2^3. В последней части статьи описан алгоритм использования полученного в разд. 3 отображения для решения задачи попадания в начало координат по траекториям системы (1) третьего порядка и приведены результаты численного эксперимента, поставленного с использованием полученных результатов.

Предлагаемый подход (нахождение S_{n-1}-диффеоморфизмов) применим также для нахождения аналитического решения задачи быстродействия для произвольных линейных управляемых систем. В работе [3] предлагаемый подход описан более подробно. Там же получен явный вид S_1-диффеоморфизма, который переводит множество нуль-управляемости канонической системы второго порядка во множество нуль-управляемости произвольной линейной управляемой системы того же порядка.

1. Отображение систем второго порядка

Найдём S_1-диффеоморфизм множества нуль-управляемости канонической системы (2) второго порядка на множество нуль-управляемости системы

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{y}_1 & = & u, \quad |u| \leq 1, \\ \dot{y}_2 & = & y_1^k, \; k \geq 2. \end{array} \right. \tag{3}$$

Отображение будем искать в виде

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1 & = & x_1, \\ y_2 & = & F(x_1, x_2), \end{array} \right. \tag{4}$$

где $F(0,0) = 0$. Подставим производную отображения в силу канонической системы в систему (3). Получим, что функция $F(x_1, x_2)$ удовлетворяет уравнению в частных производных первого порядка

$$uF_{x_1} + x_1 F_{x_2} = x_1^k \; .$$

Решать это уравнение будем отдельно при $u = 1$ и при $u = -1$, но для краткости будем писать u. Система характеристик полученного уравнения имеет вид

$$\frac{dx_1}{u} = \frac{dx_2}{x_1} = \frac{dF}{x_1^k} \; .$$

Первыми интегралами этой системы являются

$$p_1(x_1, x_2) = x_2 - \frac{1}{2u} x_1^2, \qquad p_2(x_1, x_2, F) = F - \frac{1}{(k+1)u} x_1^{k+1}.$$

Очевидно, что $p_1(0,0) = 0,\; p_2(0,0,0) = 0$. Общее решение уравнения в частных производных для определения функции $F(x_1, x_2)$ имеет вид $\Phi(p_1, p_2) = 0$, откуда при $\frac{\partial \Phi}{\partial p_2} \neq 0$ находим, что

$$F(x_1, x_2) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k+1} x_1^{k+1} + \varphi(x_2 - \frac{1}{2} x_1^2), \; u = 1, \\ -\frac{1}{k+1} x_1^{k+1} + \psi(x_2 + \frac{1}{2} x_1^2), \; u = -1. \end{array} \right. \tag{5}$$

Из условия $F(0,0) = 0$ получаем, что $\varphi(0) = \psi(0) = 0$.

Используем условие непрерывности искомой функции в R^2, в частности, на линии переключения управления для канонической системы, которая имеет вид $x_2 + \frac{1}{2}x_1|x_1| = 0$ [2]. При $x_2 = \frac{1}{2}x_1^2,\ x_1 \le 0$, имеем $\psi(x_1^2) = \frac{2}{k+1}x_1^{k+1}$. Обозначив x_1^2 через z, получим, что

$$\psi(z) = \frac{(-1)^{k+1}\cdot 2}{k+1} z^{\frac{k+1}{2}},\ z \ge 0.$$

Аналогично, на траектории $x_2 = -\frac{1}{2}x_1^2,\ x_1 \ge 0$, получим $\varphi(-x_1^2) = -\frac{2}{k+1}x_1^{k+1}$. Обозначив $-x_1^2$ через z, находим

$$\varphi(z) = -\frac{2}{k+1}(-z)^{\frac{k+1}{2}},\ z \le 0.$$

Таким образом, используя (5) и найденный вид функций $\psi(z)$ и $\varphi(z)$, получим, что искомая функция $F(x_1, x_2)$ имеет вид

$$F(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{1}{k+1}x_1^{k+1} - \frac{2}{k+1}(-x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^{\frac{k+1}{2}},\ x_2 + \frac{1}{2}x_1|x_1| \le 0, \\ -\frac{1}{k+1}x_1^{k+1} + \frac{(-1)^{k+1}\cdot 2}{k+1}(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^{\frac{k+1}{2}},\ x_2 + \frac{1}{2}x_1|x_1| \ge 0. \end{cases}$$

Покажем, что область значений найденного отображения совпадает со множеством нуль-управляемости системы (3).

Пусть k — чётное. Покажем, что $\forall x_1 \in R$ справедливы неравенства

$$F(x_1, x_2) \le \frac{1}{k+1}x_1^{k+1} \text{ и } F(x_1,x_2) \le -\frac{1}{k+1}x_1^{k+1}. \tag{6}$$

Пусть $x \in S^+ = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_2 + \frac{1}{2}x_1|x_1| \le 0\}$. Тогда $(-x_2 + \frac{1}{2}x_1^2) \ge 0$, $\forall x_1 \in R$, и неравенство $\frac{1}{k+1}x_1^{k+1} - \frac{2}{k+1}(-x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^{\frac{k+1}{2}} \le \frac{1}{k+1}x_1^{k+1}$, $\forall x \in S^+$, очевидно. Неравенство $\frac{1}{k+1}x_1^{k+1} - \frac{2}{k+1}(-x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^{\frac{k+1}{2}} \le -\frac{1}{k+1}x_1^{k+1}$ эквивалентно неравенству $\frac{2}{k+1}x_1^{k+1} \le \frac{2}{k+1}(-x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^{\frac{k+1}{2}}$, которое справедливо $\forall x \in S^+ :\ x_1 < 0$. При $x \in S^+ :\ x_1 \ge 0$ получаем эквивалентное неравенство $x_1^2 \le -x_2 + \frac{1}{2}x_1^2$, которое выполнено в рассматриваемой области S^+.

Аналогично показываем, что неравенства (6) справедливы в области $S^- = \{(x_1, x_2) \in R^2 :\ x_2 + \frac{1}{2}x_1|x_1| \ge 0\}$.

Так как найденное отображение имеет вид (4), то на траекториях канонической системы

$$y_2 = \begin{cases} \frac{1}{k+1}y_1^{k+1} - c,\ c \ge 0, \\ -\frac{1}{k+1}y_1^{k+1} - d,\ d \ge 0. \end{cases}$$

В силу неравенств (6) данные кривые заполняют часть нижней полуплоскости, ограниченную кривыми $y_2 = \frac{1}{k+1}y_1^{k+1}$ и $y_2 = -\frac{1}{k+1}y_1^{k+1}$. С помощью непосредственных вычислений нетрудно проверить, что полученная часть R^2 является множеством нуль-управляемости системы (3) при четных k.

В случае нечётного k аналогично показывается, что областью значений найденного отображения является всё пространство R^2, которое является множеством нуль-управляемости системы (3) при нечетных k.

Обратное отображение имеет вид

$$\begin{cases} x_1 &= \quad y_1, \\ x_2 &= \quad F^{-1}(y_1, y_2), \end{cases}$$

$$F^{-1}(y_1, y_2) = \begin{cases} \quad \frac{1}{2}y_1^2 - \left(\frac{1}{2}y_1^{k+1} - \frac{k+1}{2}y_2\right)^{\frac{2}{k+1}}, \ u = 1, \\ \\ -\frac{1}{2}y_1^2 + \left(\frac{1}{2}y_1^{k+1} + \frac{k+1}{2}y_2\right)^{\frac{2}{k+1}}, \ u = -1. \end{cases}$$

Это отображение можем найти также, проделав аналогичные вычисления для нахождения явного вида отображения множества нуль-управляемости системы (3) на множество нуль-управляемости канонической системы.

2. Отображение канонической системы третьего порядка

Найдём S_2-диффеоморфизм множества нуль-управляемости канонической системы третьего порядка на множество нуль-управляемости системы

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = u, \qquad |u| \le 1, \\ \dot{y}_2 = y_1, \\ \dot{y}_3 = y_2^3. \end{cases} \tag{7}$$

Отображение будем искать в виде

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = F(x_1, x_2, x_3), \end{cases} \tag{8}$$

где $F(0,0,0) = 0$.

Как и в предыдущем пункте, продифференцируем (8) в силу канонической системы. Получим, что функция $F(x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяет уравнению в частных производных первого порядка

$$uF_{x_1} + x_1 F_{x_2} + x_2 F_{x_3} = x_2^3\,.$$

Система характеристик полученного уравнения имеет вид

$$\frac{dx_1}{u} = \frac{dx_2}{x_1} = \frac{dx_3}{x_2} = \frac{dF}{x_2^3}\ .$$

Первые интегралы этой системы:

$$
\begin{aligned}
p_1(x_1,x_2) &= x_2-\frac{1}{2u}x_1^2,\\
p_2(x_1,x_2,x_3) &= x_3-\frac{1}{6}x_1^3-\frac{1}{u}x_1(x_2-\frac{1}{2u}x_1^2),\\
\mathrm{p}_3(x_1,x_2,x_3,F) &= F-\frac{1}{56}x_1^7-\frac{3}{20u}x_1^5(x_2-\frac{1}{2u}x_1^2)-\\
&-\frac{1}{2}x_1^3(x_2-\frac{1}{2u}x_1^2)^2-\frac{1}{u}x_1(x_2-\frac{1}{2u}x_1^2)^3.
\end{aligned}
$$

Очевидно, что $p_1(0,0)=0$, $p_2(0,0,0)=0$, $p_3(0,0,0,0)=0$. Общее решение уравнения в частных производных для определения функции $F(x_1,x_2,x_3)$ имеет вид $\Phi(p_1,p_2,p_3)=0$, откуда при $\frac{\partial\Phi}{p_3}\neq 0$ находим, что

$$
F(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}
\frac{1}{56}x_1^7+\frac{3}{20}x_1^5C_1(x_1,x_2)+\\
+\frac{1}{2}x_1^3C_1^2(x_1,x_2)+x_1C_1^3(x_1,x_2)+\\
+\varphi(C_1(x_1,x_2),C_2(x_1,x_2,x_3)),\ u=1,\\
\\
\frac{1}{56}x_1^7-\frac{3}{20}x_1^5D_1(x_1,x_2)+\\
+\frac{1}{2}x_1^3D_1^2(x_1,x_2)-x_1D_1^3(x_1,x_2)+\\
+\psi(D_1(x_1,x_2),D_2(x_1,x_2,x_3)),u=-1,
\end{cases} \tag{9}
$$

где через C_1, C_2 обозначены первые интегралы, соответствующие значению управления $u=1$, а через D_1, D_2 — первые интегралы, соответствующие значению управления $u=-1$.

Из условия $F(0,0,0)=0$ получаем, что $\varphi(0,0)=\psi(0,0)=0$.

Используем условие непрерывности искомой функции в R^3, в частности, на поверхности переключения управления для канонической системы, вид которой получен в [2]. Так, на траектории $x_2=\frac{1}{2}x_1^2$, $x_3=\frac{1}{6}x_1^3$, $x_1\leq 0$, которая ведёт в начало координат в силу канонической системы при $u=1$, $D_1(x_1,x_2)=x_1^2$, $D_2(x_1,x_2,x_3)=x_1^3$, поэтому получаем, что $\psi(x_1^2,x_1^3)=\frac{13}{20}x_1^7$. Обозначив x_1^2 через z, получим

$$\psi(z,-z^{\frac{3}{2}})=-\frac{13}{20}z^{\frac{7}{2}},\ z\geq 0. \tag{10}$$

Аналогично, на траектории $x_2=-\frac{1}{2}x_1^2$, $x_3=\frac{1}{6}x_1^3$, $x_1\geq 0$, которая ведёт в начало координат в силу канонической системы при $u=-1$, получаем, что $\varphi(-x_1^2,x_1^3)=\frac{13}{20}x_1^7$. Обозначив $-x_1^2$ через z, имеем

$$\varphi(z,(-z)^{\frac{3}{2}})=\frac{13}{20}(-z)^{\frac{7}{2}},\ z\leq 0. \tag{11}$$

Поверхность переключения управления для канонической системы имеет вид $S = S^+ \cup S^-$ [2], где

$$S^+: \quad x_3 + \frac{1}{3}x_1^3 - x_1x_2 - (\frac{1}{2}x_1^2 - x_2)^{\frac{3}{2}} = 0, \ x_2 + \frac{1}{2}x_1|x_1| \le 0,$$

$$S^-: \quad x_3 + \frac{1}{3}x_1^3 + x_1x_2 + (\frac{1}{2}x_1^2 + x_2)^{\frac{3}{2}} = 0, \ x_2 + \frac{1}{2}x_1|x_1| \ge 0.$$

Используя условие непрерывности искомой функции на S^+ из (9), находим, что

$$-\frac{4}{5}x_1^5x_2 - 2x_1x_2^3 + \psi(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2, 2x_1x_2 + (\frac{1}{2}x_1^2 - x_2)^{\frac{3}{2}}) = \varphi(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2, (\frac{1}{2}x_1^2 - x_2)^{\frac{3}{2}}),$$

откуда, учитывая (11), получаем

$$\psi(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2, 2x_1x_2 + (\frac{1}{2}x_1^2 - x_2)^{\frac{3}{2}}) = \frac{4}{5}x_1^5x_2 + 2x_1x_2^3 + \frac{13}{20}(\frac{1}{2}x_1^2 - x_2)^{\frac{7}{2}}. \qquad (12)$$

Аналогично, на поверхности S^- с учётом (9) и (10) находим

$$\varphi(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2, -2x_1x_2 - (\frac{1}{2}x_1^2 + x_2)^{\frac{3}{2}}) = -\frac{4}{5}x_1^5x_2 - 2x_1x_2^3 - \frac{13}{20}(\frac{1}{2}x_1^2 + x_2)^{\frac{7}{2}}.$$

Рассмотрим выражение для функции ψ (12). Обозначим $x_2 + \frac{1}{2}x_1^2$ через v, а $2x_1x_2 + (\frac{1}{2}x_1^2 - x_2)^{\frac{3}{2}}$ — через w и рассмотрим в области $x_2 + \frac{1}{2}x_1|x_1| < 0$ систему алгебраических уравнений относительно x_1, x_2

$$\begin{cases} x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 = v, \\ 2x_1x_2 + (\frac{1}{2}x_1^2 - x_2)^{\frac{3}{2}} = w. \end{cases} \qquad (13)$$

Якобиан системы имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ 2x_2 + \frac{3}{2}x_1(\frac{1}{2}x_1^2 - x_2)^{\frac{1}{2}} & 2x_1 - \frac{3}{2}(\frac{1}{2}x_1^2 - x_2)^{\frac{1}{2}} \end{vmatrix}.$$

Пусть $x_1^2 + x_2^2 \ne 0$. Тогда $\Delta = 0$ на кривой $2x_1^2 - 3x_1(\frac{1}{2}x_1^2 - x_2)^{\frac{1}{2}} - 2x_2 = 0$, откуда следует, что $\frac{1}{2}x_1^4 - x_1^2x_2 - 4x_2^2 = 0, x_1 > 0$. Из последнего уравнения находим, что якобиан вырождается на кривых $x_2 = -\frac{1}{2}x_1^2$ и $x_2 = \frac{1}{4}x_1^2$. Так как $x_1 > 0$, то ни одна из этих кривых не принадлежит рассматриваемой области $x_2 + \frac{1}{2}x_1|x_1| < 0$. Поэтому по теореме о неявном отображении, в окрестности каждой точки из рассматриваемой области можем найти единственное непрерывно-дифференцируемое решение системы (13) $x_1(v,w), x_2(v,w)$. Тогда в правой части (12) получим выражение для функции $\psi(v,w)$ через v и w. Подставляя $v = D_1(x_1,x_2) = x_2 + \frac{1}{2}x_1^2$, $w = D_2(x_1,x_2,x_3) = x_3 + \frac{1}{3}x_1^3 + x_1x_2$, получим вид искомой функции $F(x_1, x_2, x_3)$ в области, где управление принимает значение $u = -1$.

Применяя аналогичные рассуждения, находим вид функции $F(x_1, x_2, x_3)$ в области, где управление принимает значение $u = 1$.

3. Отображение нелинейной системы третьего порядка

Найдём отображение множества нуль-управляемости системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= & u, \\ \dot{x}_2 &= & x_1, \\ \dot{x}_3 &= & x_2^3 \end{cases} \tag{14}$$

на множество нуль-управляемости канонической системы третьего порядка такое, чтобы траектории системы (14), соответствующие некоторому управлению из класса U_2, переходили в траектории канонической системы, которые соответствуют тому же управлению.

Отображение будем искать в виде (8). В этом случае функция $F(x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяет следующему уравнению в частных производных первого порядка:

$$uF_{x_1} + x_1 F_{x_2} + x_2^3 F_{x_3} = x_2\,.$$

Как и ранее, находим, что

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{1}{6}x_1^3 + x_1 C_1(x_1, x_2) + \\ +\varphi(C_1(x_1, x_2), C_2(x_1, x_2, x_3)), \; u = 1, \\ \\ \frac{1}{6}x_1^3 - x_1 D_1(x_1, x_2) + \\ +\psi(D_1(x_1, x_2), D_2(x_1, x_2, x_3)), \; u = -1, \end{cases} \tag{15}$$

где $C_1(x_1, x_2) = x_2 - \frac{1}{2}x_1^2$, $C_2(x_1, x_2, x_3) = x_3 - \frac{1}{56}x_1^7 - \frac{3}{20}x_1^5(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2) - \frac{1}{2}x_1^3(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2)^2 - x_1(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2)^3$, $D_1(x_1, x_2) = x_2 + \frac{1}{2}x_1^2$, $D_2(x_1, x_2, x_3) = x_3 - \frac{1}{56}x_1^7 + \frac{3}{20}x_1^5(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2) - \frac{1}{2}x_1^3(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^2 + x_1(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^3$.

Из условия $F(0,0,0) = 0$ получаем, что $\varphi(0,0) = \psi(0,0) = 0$.

Теперь используем условие непрерывности искомой функции в R^3, в частности, на поверхности переключения управления для нелинейной системы. При $u = 1$ в силу системы (14) в начало координат ведёт траектория $x_2 = \frac{1}{2}x_1^2$, $x_3 = \frac{1}{56}x_1^7$, $x_1 \le 0$. На этой траектории из (16) получаем, что $\psi(x_1^2, \frac{13}{20}x_1^7) = x_1^3$. Обозначив x_1^2 через z, имеем

$$\psi(z, -\frac{13}{20}z^{\frac{7}{2}}) = -z^{\frac{3}{2}}, \; z \ge 0. \tag{16}$$

Аналогично, на траектории $x_2 = -\frac{1}{2}x_1^2$, $x_3 = \frac{1}{56}x_1^7$, $x_1 \geq 0$, ведущей в начало координат при $u = -1$ в силу нелинейной системы, получим, что $\varphi(-x_1^2, \frac{13}{20}x_1^7) = x_1^3$. Обозначив $-x_1^2$ через z, получим

$$\varphi(z, \frac{13}{20}(-z)^{\frac{7}{2}}) = (-z)^{\frac{3}{2}},\ z \leq 0. \tag{17}$$

Уравнение поверхности переключения управления для системы (14) имеет вид $S = S^+ \cup S^-$, где

$$S^-: \quad x_3 - \frac{1}{56}x_1^7 + \frac{3}{20}x_1^5(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2) - \frac{1}{2}x_1^3(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^2 +$$

$$+x_1(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^3 + \frac{13}{20}(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^{\frac{7}{2}} = 0,\ x_2 + \frac{1}{2}x_1|x_1| \geq 0,$$

$$S^+: \quad x_3 - \frac{1}{56}x_1^7 - \frac{3}{20}x_1^5(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2) - \frac{1}{2}x_1^3(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2)^2 -$$

$$-x_1(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2)^3 - \frac{13}{20}(-x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^{\frac{7}{2}} = 0,\ x_2 + \frac{1}{2}x_1|x_1| \leq 0.$$

Эти уравнения получим ниже.

Используя условие непрерывности искомой функции на поверхности переключения управления, получаем равенства:

при $x_2 + \frac{1}{2}x_1|x_1| > 0$

$$-2x_1x_2 + \psi\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2, -\frac{13}{20}(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^{\frac{7}{2}}\right)$$

$$= \varphi\left(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2, -\frac{4}{5}x_1^5x_2 - 2x_1x_2^3 - \frac{13}{20}(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^{\frac{7}{2}}\right),$$

при $x_2 + \frac{1}{2}x_1|x_1| < 0$

$$2x_1x_2 + \varphi\left(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2, \frac{13}{20}(-x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^{\frac{7}{2}}\right)$$

$$= \psi\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2, \frac{4}{5}x_1^5x_2 + 2x_1x_2^3 + \frac{13}{20}(-x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^{\frac{7}{2}}\right).$$

Используя найденные зависимости (16) и (17), находим, что

$$\varphi\left(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2, -\frac{4}{5}x_1^5x_2 - 2x_1x_2^3 - \frac{13}{20}(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^{\frac{7}{2}}\right) = -2x_1x_2 - (x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^{\frac{3}{2}}, \tag{18}$$

$$\psi\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2, \frac{4}{5}x_1^5x_2 + 2x_1x_2^3 + \frac{13}{20}(-x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^{\frac{7}{2}}\right) = 2x_1x_2 + (-x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Рассмотрим в области $S^+ = \{x_1, x_2 : x_2 + \frac{1}{2}x_1|x_1| > 0\}$ систему алгебраических уравнений относительно x_1 и x_2:

$$\begin{cases} x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 = v, \\ -\frac{4}{5}x_1^5 x_2 - 2x_1 x_2^3 - \frac{13}{20}(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^{\frac{7}{2}} = w. \end{cases}$$

Якобиан системы имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} -x_1 & 1 \\ -4x_1^4 x_2 - 2x_2^3 - \frac{91}{40}x_1(\frac{1}{2}x_1^2 + x_2)^{\frac{5}{2}} & -\frac{4}{5}x_1^5 - 6x_1 x_2^2 - \frac{91}{40}(\frac{1}{2}x_1^2 + x_2)^{\frac{5}{2}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{4}{5}x_1^6 + 6x_1^2 x_2^2 + 4x_1^4 x_2 + 2x_2^3 + \frac{91}{20}x_1(\frac{1}{2}x_1^2 + x_2)^{\frac{5}{2}}.$$

Покажем, что в рассматриваемой области он невырожден.

Область S^+ представим в виде $S^+ = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$, где $S_1 = \{x_1, x_2 : x_1 < 0, x_2 > \frac{1}{2}x_1^2\}$, $S_2 = \{x_1, x_2 : x_1 = 0, x_2 > 0\}$, $S_3 = \{x_1, x_2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$, $S_4 = \{x_1, x_2 : x_1 > 0, 0 \geq x_2 > -\frac{1}{2}x_1^2\}$.

При $(x_1, x_2) \in S_2$ $\Delta = 2x_2^3 > 0$.

При $(x_1, x_2) \in S_3$ очевидно, что $\Delta > 0$.

Область S_1 покрывают кривые $x_2 = kx_1^2,\ k > \frac{1}{2},\ x_1 < 0$. На этих кривых якобиан принимает вид $\Delta = x_1^6\left(\frac{4}{5} + 6k^2 + 4k + 2k^3 - \frac{91}{20}(k + \frac{1}{2})^{\frac{5}{2}}\right) \equiv x_1^6 f(k)$, $f(\frac{1}{2}) = 0$. Покажем, что $f'(k) > 0$ при $k \geq \frac{1}{2}$. $f'(k) = 6k^2 + 12k + 4 - \frac{91}{8}(k + \frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}$. Обозначим $z = k - \frac{1}{2}$. Тогда $\Delta = 6z^2 + 18z + \frac{23}{2} - \frac{91}{8}(z + 1)^{\frac{3}{2}}$. Рассмотрим неравенство $\left(6z^2 + 18z + \frac{23}{2}\right)^2 > (\frac{91}{8})^2(z + 1)^3$. Раскрывая скобки, получим эквивалентное неравенство

$$36z^4 + \left(216 - \left(\frac{91}{8}\right)^2\right)z^3 + \left(462 - 3\left(\frac{91}{8}\right)^2\right)z^2$$

$$+ \left(414 - 3\left(\frac{91}{8}\right)^2\right)z + \left(132\frac{1}{4} - \left(\frac{91}{8}\right)^2\right) > 0.$$

В силу положительности всех коэффициентов, последнее неравенство справедливо при $z \geq 0$. Следовательно, $f'(k) > 0$ при $k \geq \frac{1}{2}$. Тогда $f(k) > 0$ при $k > \frac{1}{2}$ и $\Delta > 0$ в области S_1.

Область S_4 покрывают кривые $x_2 = kx_1^2,\ -\frac{1}{2} < k \leq 0$. На этих кривых якобиан принимает вид $\Delta = x_1^6\left(\frac{4}{5} + 6k^2 + 4k + 2k^3 + \frac{91}{20}(k + \frac{1}{2})^{\frac{5}{2}}\right) > x_1^6(2k^3 + 6k^2 + 4k + \frac{4}{5}) \equiv x_1^6 f(k)$, $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{20} > 0$, $f(0) = \frac{4}{5} > 0$. На отрезке $[-\frac{1}{2}; 0]$

есть только одна точка локального минимума функции $f(k) - k_0 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$, причём $f(k_0) = \frac{36-20\sqrt{3}}{45} > 0$. Значит, $f(k) > 0$ при $-\frac{1}{2} \le k \le 0$, поэтому $\Delta > 0$ в области S_4.

Таким образом, якобиан $\Delta > 0$ в области S^+. Следовательно, по теореме о неявном отображении, в окрестности каждой точки из рассматриваемой области можем найти единственное непрерывно-дифференцируемое решение рассматриваемой системы уравнений $x_1(v, w)$, $x_2(v, w)$. Тогда в правой части (18) получим выражение для функции $\varphi(v, w)$ через v и w. Затем, подставляя $v = C_1(x_1, x_2)$, $w = C_2(x_1, x_2, x_3)$, получим вид искомой функции $F(x_1, x_2, x_3)$ в области, где управление принимает значение $u = 1$.

Аналогично находим вид функции $F(x_1, x_2, x_3)$ в области, где управление принимает значение $u = -1$.

Найдём теперь уравнение поверхности переключения управления для системы (14), а также уравнение поверхности S^-. Эта поверхность состоит из траекторий системы (14), которые соответствуют значению управления $u = -1$ и оканчиваются в некоторый момент времени $t_1 < \infty$ в точках траектории, ведущей в начало координат при $u = 1$. На такой траектории $D_1(x_1, x_2) = x_1^2$, $D_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{13}{20}x_1^7$. Так как при $u = 1$ $x_1 < 0$, то $D_2 = -\frac{13}{20}D_1^{\frac{7}{2}}$ на рассматриваемой траектории. Вдоль траекторий, которые образуют поверхность S^-, функции $D_1(x_1, x_2)$ и $D_2(x_1, x_2, x_3)$ постоянны и принимают те же значения, что и в соответствующих точках траектории, ведущей в начало координат при $u = 1$. Поэтому последнее равенство сохраняется и на поверхности S^-. Отсюда получаем уравнение поверхности S^-:

$$-\frac{13}{20}(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^{\frac{7}{2}} = x_3 - \frac{1}{56}x_1^7 + \frac{3}{20}x_1^5(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2) - \frac{1}{2}x_1^3(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^2 + x_1(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^3.$$

Аналогично находим уравнение части поверхности S^+.

4. Использование полученного отображения и результаты численного эксперимента

Найдём, с использованием полученного в разд. 3 отображения, траектории нелинейной системы (14), ведущие из заданных начальных точек в начало координат за конечное время в силу системы под действием управления из класса U_2. Введём обозначения

$$\begin{aligned} x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 &= c_1, \\ -\frac{4}{5}x_1^5 x_2 - 2x_1 x_2^3 - \frac{13}{20}(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^{\frac{7}{2}} &= c_2, \\ -2x_1 x_2 - (x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^{\frac{7}{2}} &= c_3. \end{aligned}$$

Величины c_1, c_2, c_3, как следует из (18), задают зависимость между аргументами функции φ и её значениями. Исключая из трёх равенств x_2, получаем зависимость между c_1, c_2, c_3, x_1:

$$\begin{cases} -6c_1x_1^5 - 13c_3x_1^4 - 5c_1^2x_1^3 - 26c_1c_3x_1^2 + 14c_1^3x_1 - 13c_1^3c_3 + 20c_2 = 0, \\ c_1x_1^4 + 2c_3x_1^3 + c_1^2x_2^2 + 4c_1c_3x_1 + c_3^2 - c_1^3 = 0. \end{cases}$$

Исключив из этой системы x_1, получим уравнение 12-й степени для определения $c_3 = c_3(c_1, c_2)$:

$$\begin{gathered} 2197c_3^{12} - 24488c_1^3c_3^{10} + 22880c_1c_2c_3^9 + 110735c_1^6c_3^8 - 247920c_1^4c_2c_3^7 \\ +(234400c_2^2 - 196448c_1^7)c_1^2c_3^6 + (555520c_1^7 - 128000c_2^2)c_2c_3^5 \\ +(155618c_1^7 - 601600c_2^2)c_1^5c_3^4 + (320000c_2^2 - 553440c_1^7)c_1^3c_2c_3^3 \\ +(780800c_2^2 - 16028c_1^7)c_1^8c_3^2 + (47200c_1^7 - 608000c_2^2)c_1^6c_2c_3 \\ -3025c_1^{18} + 160000c_1^4c_2^4 - 8000c_1^{11}c_2^2 = 0. \end{gathered}$$

Затем, подставив в найденную зависимость

$$\begin{aligned} c_1 &= x_2 - \frac{1}{2}x_1^2, \\ c_2 &= x_3 - \frac{1}{56}x_1^7 - \frac{3}{20}x_1^5(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2) - \frac{1}{2}x_1^3(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2)^2 - x_1(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2)^3, \end{aligned}$$

получим явный вид функции φ. Аналогично найдём вид функции ψ. Используя такое отображение, вычисляем соответствующую начальную точку для канонической системы и для этой точки находим аналитическое решение задачи быстродействия [2]. Полученные вид управления, точки его переключения и время быстродействия, по построению, будут давать решение задачи попадания из заданной начальной точки в начало координат по траектории нелинейной системы.

Заметим, что такой путь решения задачи трудно реализовать на практике, поэтому предлагается иной способ решения задачи, позволяющий обойти решение уравнения 12-й степени.

Для нахождения траектории нелинейной системы, ведущей в начало координат, нам не нужен явный вид функций φ и ψ, а необходимо лишь их значение в конкретной (начальной) точке. Для определения этого значения для функции φ поступим следующим образом.

Пусть (x_1^0, x_2^0, x_3^0) — начальная точка для нелинейной системы. Вычислим значения

$$\begin{aligned} c_1^0 &= x_2^0 - \frac{1}{2}x_1^{0^2}, \\ c_2^0 &= x_3^0 - \frac{1}{56}x_1^{0^7} - \frac{3}{20}x_1^{0^5}(x_2^0 - \frac{1}{2}x_1^{0^2}) - \frac{1}{2}x_1^{0^3}(x_2^0 - \frac{1}{2}x_1^{0^2})^2 - x_1^0(x_2^0 - \frac{1}{2}x_1^{0^2})^3. \end{aligned}$$

Затем решим в области $x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 > 0$ систему уравнений

$$\begin{cases} x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 = c_1^0, \\ -\frac{4}{5}x_1^5 x_2 - 2x_1 x_2^3 - \frac{13}{20}(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^{\frac{7}{2}} = c_2^0. \end{cases}$$

Выше было показано, что в данной области система имеет единственное решение. Обозначим решение системы $\hat{x}_1, \hat{x}_2$. Затем вычислим значение $\Phi =$

$$= \varphi(x_2^0 - \frac{x_1^{0^2}}{2}, x_3^0 - \frac{x_1^{0^7}}{56} - \frac{3}{20}x_1^{0^5}(x_2^0 - \frac{1}{2}x_1^{0^2}) - \frac{1}{2}x_1^{0^3}(x_2^0 - \frac{x_1^{0^2}}{2})^2 - x_1^0(x_2^0 - \frac{x_1^{0^2}}{2})^3)$$

$$= \varphi(\hat{x}_2 - \frac{1}{2}\hat{x}_1^2, -\frac{4}{5}\hat{x}_1^5\hat{x}_2 - 2\hat{x}_1\hat{x}_2^3 - \frac{13}{20}(\hat{x}_2 + \frac{1}{2}\hat{x}_1^2)^{\frac{7}{2}})$$

$$= -2\hat{x}_1\hat{x}_2 - (\hat{x}_2 + \frac{1}{2}\hat{x}_1^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Последнее равенство справедливо в силу соотношения (18). Тогда соответствующая начальная точка для канонической системы имеет координаты $y_1^0 = x_1^0$, $y_2^0 = x_2^0$, $y_3^0 = \frac{1}{6}x_1^{0^3} + x_1^0(x_2^0 - \frac{1}{2}x_1^{0^2}) + \Phi$.

Аналогично поступаем в случае, когда для определения начальной точки для канонической системы необходимо использовать функцию ψ.

С использованием построенного отображения был поставлен численный эксперимент. Приведём некоторые результаты работы программы. В таблице в первой колонке содержатся координаты начальной точки $x^0 = (x_1^0$, x_2^0, $x_3^0)$ для нелинейной системы (14); во второй колонке содержатся моменты переключения управления $u_0(t)$, решающего задачу попадания в начало координат из точки x^0 в силу нелинейной системы, и T — время попадания в начало координат; в третьей колонке содержатся координаты конечной точки.

При $u_0(T) = -1$ получены следующие результаты, приведенные в таблице.

Начальная точка	Моменты переключения и T	Конечная точка
1	1.55845909868549	0
-1	3.01796013030616	$6.65049612602608 \cdot 10^{-14}$
1	3.91900206324135	$-9.69834188513374 \cdot 10^{-8}$
0	4.26646686864842	0
10	11.3969762546621	$7.18088088991209 \cdot 10^{-12}$
5	14.2610187720275	$1.48765366247972 \cdot 10^{-5}$
7	13.9986319311283	0
0	25.9450763998611	$-1.24589977223977 \cdot 10^{-10}$
-3	30.8928889374656	$8.14396608620882 \cdot 10^{-3}$

При $u_0(T) = 1$ получены следующие результаты, представленные в таблице.

Начальная точка	Моменты переключения и T	Конечная точка
-1	1.99980678678548	0
0	3.70644708360123	-2.32884805190237$\cdot 10^{-12}$
0	4.41328059363150	-7.72383106362184$\cdot 10^{-8}$
-1	2.74890834838880	0
-1	5.74628792635485	-2.78981525381194$\cdot 10^{-11}$
-1	6.99475915593212	1.92953208966173$\cdot 10^{-8}$
-1	2.51601433428732	0
0	5.37303555213293	2.77407125048867$\cdot 10^{-11}$
-10	6.71404243569123	1.73588901475341$\cdot 10^{-7}$

В заключение отметим, что S_2-диффеоморфизм, а также обратное отображение были построены для систем вида (1) и (2) третьего порядка при $k = 5$.

Список литературы

[1] *Э.Б. Ли, Л. Маркус*, Основы теории оптимального управления. Наука, Москва (1972).

[2] *В.И. Коробов, Г.М. Скляр*, Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов. — *Мат. сб.* (1987), т. 134(176), № 2(10), с. 186–206.

[3] *V.I. Korobov and T.I. Ivanova*, Nonsmooth mapping of linear control systems. — *J. Optimization Theory and Appl.* (2001), v. 108, № 2, p. 389–405.

Mapping of nonlinear control systems of the special form onto the canonical system

V.I. Korobov, T.I. Ivanova

The examples of the mapping of nonlinear control systems of the special form onto the canonical system are constructed. These examples illustrate the general approach proposed by the authors to solve the steering problem by virtue of nonlinear systems. At the end of the paper the results of the machine computations are considered.

Відображення нелінійних керованих систем спеціального вигляду на канонічну систему

В.І. Коробов, Т.І. Іванова

Наводяться приклади побудови відображення нелінійних керованих систем спеціального вигляду на канонічну систему. Приклади ілюструють загальний підхід до розв'язання задачі попадання в початок координат по траєкторіях нелінійних систем, що розроблений авторами. В кінці статті наводяться результати чисельного експерименту, який був поставлений з використанням отриманих результатів.