Математическая физика, анализ, геометрия
2001, т. 8, № 2, с. 128–142

Асимптотика решений уравнений Эйлера–Пуассона в особых точках решений

А.В. Беляев

Донецкий институт рынка и социальной политики
бульв. Шевченко, 4, Донецк, 83050, Украина
E-mail:dirsp@portal.net.ua

Статья поступила в редакцию 26 мая 2000 г.
Представлена В.И. Коробовым

Получена асимптотика особых точек решений уравнений Эйлера–Пуассона для решений общего положения. ·

Введение

Свойства решений уравнений Эйлера–Пуассона ([1, 2]) в значительной степени зависят от особых точек. Так, например, классическое решение С. Ковалевской ([3]) было обнаружено на пути исследования однозначных решений. С другой стороны, неоднозначность особых точек решений использовалась в [4, 5] для доказательства отсутствия однозначных аналитических первых интегралов. Можно предположить, что полная информация об особых точках дает и иные достаточно существенные результаты.

Возможный подход к исследованию особых точек решений уравнений Эйлера–Пуассона был предложен нами в работе [6]. На первом этапе его осуществления необходимо решить характеристическую систему нелинейных уравнений ([7]), естественно вытекающую из исходной задачи. Интересно, что уже на этом этапе возникают соотношения на параметры тела, имеющиеся в известных частных случаях Эйлера, Лагранжа, Ковалевской и Гриоли как случаи вырождения нелинейной (характеристической) системы уравнений.

Асимптотика особых точек в задаче о движении твердого тела без подробных доказательств была анонсирована в [8], а также приведена с некоторыми

·Mathematics Subject Classification 2000: 34M30, 34M45, 74H10.

новыми результатами в [9]. В настоящей работе мы приводим полное доказательство теорем об асимптотическом поведении решений Эйлера–Пуассона в окрестности не существенно особых точек.

Уравнения Эйлера–Пуассона запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} A\dot{p} = Ap \times p + \gamma \times r, \\ \dot{\gamma} = \gamma \times p, \end{cases} \tag{0.1}$$

здесь $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbf{C}^3$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbf{C}^3$, $Ap = (A_1p_1, A_2p_2, A_3p_3)$, $A_i > 0$, $r = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbf{R}^3$.

Будем также использовать обозначение $z(t) = (p(t), \gamma(t))$.

Определим $\mathbf{C}$-скалярное произведение в $\mathbf{C}^3$: $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$.

Производя замену переменных следующего вида: $p(t) = e^{-\tau}\,\tilde{p}\,(\tau), \gamma(t) = e^{-2\tau}\,\tilde{\gamma}\,(\tau)$, мы получим

$$\begin{cases} A\dot{\tilde{p}} = A\tilde{p} \times \tilde{p} + \tilde{\gamma} \times r + A\tilde{p} \\ \dot{\tilde{\gamma}} = \tilde{\gamma} \times \tilde{p} + 2\tilde{\gamma}\,. \end{cases} \tag{0.2}$$

Связь между решениями (0.1) и (0.2) выражается соотношениями

$$p(t) = \frac{1}{t - t_*}\,\tilde{p}\,(\ln(t - t_*)), \quad \gamma(t) = \frac{1}{(t - t_*)^2}\,\tilde{\gamma}\,(\ln(t - t_*)). \tag{0.3}$$

Пусть теперь $\overset{\sim 0}{z}$ — особая точка дифференциальных уравнений (0.2), тогда траектория $\tilde{p}\,(\tau)$, $\tilde{\gamma}\,(\tau)$, входящая в $\overset{\sim 0}{z}$, при обратной замене дает особую точку $t_*(t - t_* = e^{\tau})$ с асимптотикой $p(t) = \overset{\sim 0}{p}\,(t - t_*)^{-1} + \ldots$, $\gamma(t) = \overset{\sim 0}{\gamma}\,(t - t_*)^{-2} + \ldots$.

Чтобы найти особые точки $(\overset{\sim 0}{p}, \overset{\sim 0}{\gamma})$ дифференциального уравнения (0.2), необходимо решить систему, которую мы называем характеристической (см.[7]):

$$\begin{cases} A\overset{\sim 0}{p} \times \overset{\sim 0}{p} + \overset{\sim 0}{\gamma} \times r + A\overset{\sim 0}{p} = 0 \\ \overset{\sim 0}{\gamma} \times \overset{\sim 0}{p} + 2\overset{\sim 0}{\gamma} = 0. \end{cases} \tag{0.4}$$

Определение 1. *Особые точки решений системы уравнений Эйлера–Пуассона (0.1), соответствующие решениям характеристической системы (0.4), назовем α-особыми точками, если $\overset{\sim 0}{\gamma} = 0$, и β-особыми точками в противном случае.*

§ 1. Асимптотика α-особых точек

Итак, в рассматриваемом случае $\overset{\sim 0}{\gamma} = 0$, и, следовательно (см.(0.4)),

$$A\overset{\sim 0}{p} \times \overset{\sim 0}{p} + A\overset{\sim 0}{p} = 0. \tag{1.1}$$

Полагаем также, что $\prod_\sigma B_{12} \neq 0$ (здесь σ означает циклическую перестановку индексов), так как в противном случае α-особых точек просто не будет.

Чтобы получить искомую асимптотику, надо найти линейное приближение решений системы (0.2), то есть решение следующей системы:

$$\left\{ \begin{aligned} A\dot{\tilde{p}} = A\overset{\sim 0}{p} \times \tilde{p} + A\tilde{p} \times \overset{\sim 0}{p} + \tilde{\gamma} \times r + A\tilde{p} = A\mathbf{P}(\tilde{p}, \tilde{\gamma}), \\ \dot{\tilde{\gamma}} = \tilde{\gamma} \times \overset{\sim 0}{p} + 2\tilde{\gamma} = \mathbf{\Gamma}\,\tilde{\gamma}, \end{aligned} \right. \tag{1.2}$$

затем получить асимптотику решений (0.2) в окрестности особой точки и, наконец, сделать замену $\left(\tilde{p}(\tau), \tilde{\gamma}(\tau)\right) \to (p(t), \gamma(t))$.

Итак, будем искать решение системы (1.1), для чего необходимо иметь собственный базис оператора $\mathbf{P} \oplus \mathbf{\Gamma}$.

Линейное преобразование $\xi \to \overset{\sim 0}{p} \times \xi$ имеет собственный базис: $v_0 = \overset{\sim 0}{p}$, $v_1 = A\overset{\sim 0}{p}$, v_{-1}; его собственные значения равны соответственно $0, 1, -1$. Кроме того, v_{-1} можно нормировать условием $v_{-1} \times v_1 = \overset{\sim 0}{p}$ ($\Longrightarrow \langle v_{-1} \times v_1, \overset{\sim 0}{p} \rangle = -\langle v_{-1}, v_1 \rangle = \langle \overset{\sim 0}{p}, \overset{\sim 0}{p} \rangle = -1$).

Из $\mathbf{\Gamma}\gamma = \lambda\gamma$ имеем $\overset{\sim 0}{p} \times \gamma = (2 - \lambda)\,\gamma$, следовательно, оператор $\mathbf{P} \oplus \mathbf{\Gamma}$ может иметь три собственных значения: $1, 2, 3$, если вектор γ собственного вектора (p, γ) не равен нулю.

Найдем для каждого из них собственные (корневые) подпространства, предварительно решив такую же задачу для оператора $\mathbf{D} : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$,

$$\mathbf{D}(\xi) = A^{-1}(A\overset{\sim 0}{p} \times \xi + A\xi \times \overset{\sim 0}{p}).$$

С этой целью равенство $A\overset{\sim 0}{p} \times \xi + A\xi \times \overset{\sim 0}{p} = \nu A\xi$ умножим скалярно на $\overset{\sim 0}{p}$ и $A\overset{\sim 0}{p}$. Получим $\langle A\overset{\sim 0}{p}, \xi \rangle = \nu \langle A\overset{\sim 0}{p}, \xi \rangle$, $\langle A\overset{\sim 0}{p}, A\xi \rangle = \nu \langle A\overset{\sim 0}{p}, A\xi \rangle$, откуда следует, что либо $\nu = 1$, либо $\langle A\overset{\sim 0}{p}, \xi \rangle = \langle A\overset{\sim 0}{p}, A\xi \rangle = 0 \Longrightarrow \xi = \overset{\sim 0}{p}$ с точностью до коэффициента.

Легко видеть, что $\mathbf{D}\,\overset{\sim 0}{p} = -2\,\overset{\sim 0}{p}$, следовательно, корневое пространство для собственного значения 1 двумерно. Чтобы убедиться, что оно является собственным, заметим, что размерность пространства $\{A\overset{\sim 0}{p} \times \xi + A\xi \times \overset{\sim 0}{p} - A\xi, \xi \in \mathbf{C}^3\}$ равна 1, поскольку оно ортогонально $A\overset{\sim 0}{p}$ и $\overset{\sim 0}{p}$.

Обозначим v_2 и v_3 векторы базиса собственного подпространства для оператора $\mathbf{D}$, соответствующего собственному значению 1. Итак, $\mathbf{D}\overset{\sim 0}{p} = -2\overset{\sim 0}{p}$, $\mathbf{D}v_2 = v_2$, $\mathbf{D}v_3 = v_3$.

Теперь мы можем указать базис $\{\varepsilon_i\}$ оператора $\mathbf{P} \oplus \mathbf{\Gamma}$, состоящий из собственных и корневых (там, где это имеет место) векторов.

Для собственных значений 1 и 3

$$\varepsilon_1 = (-\mathbf{D}^{-1}A^{-1}(v_1 \times \ r), v_1) = (u_1, v_1),$$

$$\varepsilon_3 = (-(\mathbf{D} - 2E)^{-1}A^{-1}(v_{-1} \times r), v_{-1}) = (u_{-1}, v_{-1}),$$

так как операторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D} - 2E$ очевидно невырождены.

Для собственного значения 2 имеем $A\overset{\sim 0}{p} \times p + Ap \times \overset{\sim 0}{p} + \overset{\sim 0}{p} \times r = Ap \iff (\mathbf{D} - E)p = -A^{-1}(\overset{\sim 0}{p} \times r)$, и, чтобы решение p существовало, необходимо и достаточно, чтобы вектор $A^{-1}(\overset{\sim 0}{p} \times r)$ был коллинеарен $\overset{\sim 0}{p}$, т.е. $\overset{\sim 0}{p} \times r = \lambda A\overset{\sim 0}{p} \iff \langle A\overset{\sim 0}{p}, r\rangle = 0$, и тогда

$$\varepsilon_2 = (-(\mathbf{D} - E)^{-1}A^{-1}(\overset{\sim 0}{p} \times r), \overset{\sim 0}{p}).$$

И наконец, для собственного вектора вида $(p, 0)$ $\mathbf{D}p = (\lambda - 1)p$, и мы имеем еще три собственных вектора $(\lambda = 2)\, \varepsilon_2^{'} = (v_2, 0), \varepsilon_2^{''} = (v_3, 0)$ и $(\lambda = -1)\, \varepsilon_{-1} = (\overset{\sim 0}{p}, 0)$.

Итак, в случае $\langle A\overset{\sim 0}{p}, r\rangle = 0$ оператор $\mathbf{P} \oplus \mathbf{\Gamma}$ имеет собственный базис $\{\varepsilon_i\}$, в противном случае надо искать корневой вектор.

Оператор $\mathbf{P} \oplus \mathbf{\Gamma}$ является блочным, а собственные значения операторов $\mathbf{D} + E$ и $\mathbf{\Gamma}$ равны $-1, 2, 2, 1, 2, 3$. Следовательно, искомый корневой вектор лежит в корневом пространстве с собственным значением 2, а значит, аннулируется некоторой степенью оператора $(\mathbf{P} - 2E) \oplus (\mathbf{\Gamma} - 2E)$. Отсюда вытекает, что $\gamma = \overset{\sim 0}{p}$ и, например, $p = \mu\overset{\sim 0}{p}$ (поскольку оператор $\mathbf{D} - E$ аннулирует векторы v_2 и v_3). Итак, $\varepsilon_2 = (\mu\overset{\sim 0}{p}, \overset{\sim 0}{p}) = (v_4, \overset{\sim 0}{p})$, где μ такое, что $A^{-1}(\overset{\sim 0}{p} \times r - 3\mu A\overset{\sim 0}{p}) \in \{v_2, v_3\}$.

Теперь мы можем выписать решение системы (1.2)

$$\left\{ \begin{aligned} p(\tau) &= \alpha_1 u_1 e^{\tau} + \textstyle\sum_2^4 \alpha_i v_i e^{2\tau} + \alpha_4(A^{-1}(\overset{\sim 0}{p} \times r) - 3\mu\overset{\sim 0}{p})\tau e^{2\tau} + \alpha_5 u_{-1}e^{3\tau}, \\ \gamma(\tau) &= \alpha_1 v_1 e^{\tau} + \alpha_4\overset{\sim 0}{p} e^{2\tau} + \alpha_5 v_{-1} e^{3\tau}. \end{aligned} \right. \tag{1.3}$$

Далее, основываясь на приближении (1.3), можем получить формальный ряд, дающий решения системы (0.2).

Теорема 1. *Существует формальный ряд, зависящий от пяти произвольных параметров a_i, задающий решения системы (0.2), траектории которых входят в особую точку* $(\overset{\sim 0}{p},0)$ *при* $Re\tau \to -\infty$.

Первые члены формального ряда имеют вид:

$$\begin{cases} p(\tau) = \overset{\sim 0}{p} + \alpha_1 u_1 e^{\tau} + \sum_0^2 \psi_i \tau^i e^{2\tau} + \sum_2^4 \alpha_i v_i e^{2\tau} + \dots, \\ \gamma(\tau) = \alpha_1 v_1 e^{\tau} + \kappa_0 v_1 e^{2\tau} + \kappa_1 \overset{\sim 0}{p} \tau e^{2\tau} + \alpha_4 \overset{\sim 0}{p} e^{2\tau} \\ \qquad + \sum_0^2 \chi_i' \tau^i e^{3\tau} + \alpha_5 v_{-1} e^{3\tau} + \dots, \end{cases} \tag{1.4}$$

где $\kappa_i \in \mathbf{C}, \psi_i, \chi_i' \in \mathbf{C}^3$, *и могут быть получены явные выражения для* $\kappa_i, \psi_i, \chi_i'$ *как функций* A_i, r_i; *кроме того, дальнейшие члены формального ряда (1.4) в принципе могут быть вычислены для сколь угодно больших значений степеней* e^{τ}.

Доказательство. Чтобы получить представление (1.4), нужно добавлять подходящие члены в решение (1.3) линейного уравнения (1.2) так, чтобы при подстановке в (0.2) получить равенство по модулю высоких степеней e^{τ}. Например, чтобы уничтожить квадратичную часть по e^{τ} в правой части (0.2), необходимо добавить в решение выражение $\Phi_0 e^{2\tau} + \Phi_1 \tau e^{2\tau} + \Phi_2 \tau^2 e^{2\tau}$.

В самом деле, подставим эту добавку вместе с решением (1.3) в (0.2) (для удобства считаем, что $\alpha_4(A^{-1}(\overset{\sim 0}{p} \times r) - 3\mu \overset{\sim 0}{p}, 0)\tau e^{2\tau}$ содержится в $\Phi_1 \tau e^{2\tau}$). Мы получим

$$\begin{cases} 2\Phi_2 = (\mathbf{P} \oplus \mathbf{\Gamma})\Phi_2\,, \\ 2\Phi_2 + 2\Phi_1 = (\mathbf{P} \oplus \mathbf{\Gamma})\Phi_1\,, \\ \Phi_1 + 2\Phi_0 = (\mathbf{P} \oplus \mathbf{\Gamma})\Phi_0 + \alpha_1^2 (A^{-1}(Au_1 \times u_1), v_1 \times u_1), \end{cases} \tag{1.5}$$

при этом

$$\Phi_2 \in \{\varepsilon_2', \varepsilon_2''\}, \Phi_1 \in \{\varepsilon_2', \varepsilon_2'', \varepsilon_2\}, \Phi_0 \in \{\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_{-1}\}. \tag{1.6}$$

Из свойств оператора $\mathbf{P} \oplus \mathbf{\Gamma}$ следует, что решение системы (1.5) существует и единственно.

Действуя точно таким же образом далее, можно получить формальный ряд (1.4).

Итак, доказано существование формального ряда, требуемого в условии теоремы; уточним теперь его первые коэффициенты, не решая явно системы (1.5) и аналогичных ей, а воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов.

Сделав замену $\tilde{z}(\tau) \to z(t)$, получим

$$\begin{cases} p(t) = \overset{\sim 0}{p} t^{-1} + \alpha_1 u_1 + \sum_0^2 \psi_i t \ln^i t + \sum_2^4 \alpha_i v_i t + \dots, \\ \gamma(t) = \alpha_1 v_1 t^{-2} + \sum_1^0 \chi_i \ln^i t + \alpha_4 \overset{\sim 0}{p} + \sum_0^3 \chi_i' t \ln^i t + \alpha_5 v_{-1} t + \dots, \end{cases} \tag{1.7}$$

здесь $(\psi_i, \chi_i) = \Phi_i$, причем $\chi_2 = 0$, как следует из (1.6), $(\psi_i', \chi_i') = \Phi_i'$.

Затем подставим представление (1.7) в (0.1) и, приравнивая правые части, получим тождества

$$-A\overset{\sim 0}{p} = A\overset{\sim 0}{p} \times \overset{\sim 0}{p}, A\psi_2 = A\overset{\sim 0}{p} \times\psi_2 + A\psi_2\times \overset{\sim 0}{p} \ (\psi_2 \in \{v_2, v_3\}),$$

$$A\overset{\sim 0}{p} \times u_1 + Au_1\times \overset{\sim 0}{p} + v_1 \times r = 0 \, (u_1 = -\mathbf{D}^{-1}A^{-1}(v_1 \times r)) \tag{1.8}$$

и соотношения, необходимые для нахождения ψ_i, χ_i и χ_i':

$$2A\psi_2 + A\psi_1 = A\overset{\sim 0}{p} \times\psi_1 + A\psi_1\times \overset{\sim 0}{p} + \chi_1 \times r, \tag{1.9}$$

$$A\psi_1 + A\psi_0 + A\sum_2^4 \alpha_i v_i$$

$$= \alpha_1 A^2 u_1 \times u_1 + A\mathbf{D}(\sum_2^4 \alpha_i v_i + \psi_0) + \chi_0 \times r + \alpha_4 \overset{\sim 0}{p} \times r. \tag{1.10}$$

Аналогичным образом приравнивая $\dot\gamma$ и $\gamma \times p$, получаем тождества

$$-v_1 = v_1\times \overset{\sim 0}{p}, \chi_1\times \overset{\sim 0}{p} = 0 \qquad (\text{см.}(1.6))$$

и соотношения

$$\chi_1 = \alpha_1^2 v_1 \times u_1 + \chi_0\times \overset{\sim 0}{p}, \tag{1.11}$$

$$\chi_3' = \chi_3'\times \overset{\sim 0}{p}, \tag{1.12}$$

$$3\chi_3' + \chi_2' = \chi_2'\times \overset{\sim 0}{p} + \alpha_1 v_1 \times \psi_2 , \tag{1.13}$$

$$2\chi_2' + \chi_1' = \chi_1'\times \overset{\sim 0}{p} + \alpha_1 v_1 \times \psi_1 + \alpha_1\chi_1 \times u_1 , \tag{1.14}$$

$$\chi_1' + \chi_0' = \alpha_1\alpha_4 \overset{\sim 0}{p} \times u_1 + \alpha_1\chi_0 \times u_1 + \alpha_1 v_1 \times (\sum_2^4 \alpha_i v_i + \psi_0) + \chi_0'\times \overset{\sim 0}{p}. \tag{1.15}$$

Из (1.6) следует, $\chi_1 = \kappa_1 \overset{\sim 0}{p}, \kappa_1 \in \mathbf{C}$. Умножим (1.11) скалярно на $\overset{\sim 0}{p}$: $\kappa_1\langle\overset{\sim 0}{p}, \overset{\sim 0}{p}\rangle = -\kappa_1 = \alpha_1^2\langle v_1, u_1\rangle$.

Теперь, если умножить на $\overset{\sim 0}{p}$ соотношение (1.8), мы получим $\langle v_1, u_1\rangle + \langle v_1, r\rangle = 0$ и более простое выражение для κ_1. Итак,

$$\chi_1 = \kappa_1 \overset{\sim 0}{p} = \alpha_1^2\langle v_1, r\rangle \overset{\sim 0}{p}. \tag{1.16}$$

Теперь умножим скалярно (1.11) на v_1 и получим $\langle \chi_0, v_1 \rangle = 0$, откуда следует, что $\chi_0 \in \{v_1, \overset{\sim 0}{p}\}$.

В то же время из (1.6) следует, что $\chi_0 \in \{v_1, v_{-1}\}$, значит, $\chi_0 = \kappa_0 v_1$. Подставим это представление χ_0 в (1.11): $\kappa_0 v_1 = \alpha_1^2 v_1 \times u_1 - \kappa_1 \overset{\sim 0}{p}$ и, умножив его скалярно на v_{-1}, получим $\kappa_0 = \alpha_1^2 \langle \overset{\sim 0}{p}, u_1 \rangle$.

Таким образом, известен вектор χ_0:

$$\chi_0 = \kappa_0 v_1 = \alpha_1^2 \langle \overset{\sim 0}{p}, u_1 \rangle v_1. \tag{1.17}$$

Чтобы найти выражение для ψ_2, проще использовать координатную запись, а не инвариантную. Заодно найдем и векторы v_2, v_3, которые пока заданы как базисные собственного пространства оператора $\mathbf{D}$.

Векторы v_2 и v_3 являются решениями линейного уравнения $\mathbf{D}v = v$; например, можно положить $v_2 = (\overset{\sim 0}{p}_1, -\overset{\sim 0}{p}_2, 0), v_3 = (\overset{\sim 0}{p}_1, 0, -\overset{\sim 0}{p}_3)$.

Из (1.6), (1.9) следует, что $\psi_2 \in \{v_2, v_3\}, \langle \psi_2, A \overset{\sim 0}{p} \rangle = 0$. Поэтому имеет место представление $\psi_2 = \lambda v_1 + \mu \overset{\sim 0}{p}$.

Векторы ν_2 и ν_3 ортогональны вектору $w = \left(\frac{1}{\overset{\sim 0}{p}_1}, \frac{1}{\overset{\sim 0}{p}_2}, \frac{1}{\overset{\sim 0}{p}_3} \right)$, значит, $0 = \langle \psi_2, w \rangle = \lambda \sum_\sigma A_1 + 3\mu \Longrightarrow \psi_2 = \lambda_0 (3v_1 - \sum_\sigma A_1 \overset{\sim 0}{p})$. Умножим (1.9) скалярно на v_1. $2\langle A\psi_2, v_1 \rangle = -\kappa_1 \langle v_1, r \rangle \Longleftrightarrow 6\lambda_0 \langle Av_1, v_1 \rangle = -\alpha_1^2 \langle v_1, r \rangle^2$. Следовательно,

$$\psi_2 = \frac{\alpha_1^2 \langle v_1, r \rangle^2}{6\langle Av_1, v_1 \rangle} \left((\sum_\sigma A_1) \overset{\sim 0}{p} - 3v_1 \right). \tag{1.18}$$

Из (1.12) следует, что $\chi_3^{'} \in \{v_{-1}\}$, а из (1.13) — что $\langle \chi_3^{'}, v_1 \rangle = 0$; значит, $\chi_3^{'} = 0$.

Если вектор $\chi_2^{'}$ разложить по базису $\overset{\sim 0}{p}, v_1, v_{-1}$, то, как следует из соотношений (1.13), (1.14), $\langle \psi_2, A \overset{\sim 0}{p} \rangle = 0, \chi_2^{'} \in \{v_1, v_{-1}\}$ и

$$\chi_2^{'} = \frac{\alpha_1}{2} v_1 \times \psi_2 + \frac{\alpha_1 \kappa_1}{2} \langle v_1, r \rangle v_{-1}. \tag{1.19}$$

Вектор ψ_1 легко найти из (1.9) и (1.10). В самом деле, $A(\mathbf{D} - E)\psi_1 = 2A\psi_2 - \chi_1 \times r$:

$$A\psi_1 = A(\mathbf{D} - E)(\sum_2^4 \alpha_i v_i + \psi_0) + \alpha_1^2 A u_1 \times u_1 + \chi_0 \times r + \alpha_4 \overset{\sim 0}{p} \times r, \tag{1.20}$$

следовательно, из свойств оператора $\mathbf{D} - E$

$$\psi_1 = -\frac{2}{3}\psi_2 + \frac{1}{3} A^{-1}(\chi_1 \times r) + pr^{\overset{\sim 0}{p}}_{v_1, v_2} A^{-1}(\alpha_1^2 A u_1 \times u_1 + \chi_0 \times r + \alpha_4 \overset{\sim 0}{p} \times r), \tag{1.21}$$

где проекция $pr_{V_2}^{V_1}$ осуществляется параллельно плоскости V_1 на плоскость V_2.

Аналогично, из соотношений (1.6), (1.20) получаем $\psi_0 = \kappa_0 u_1 + \nu \overset{\sim 0}{p}$:

$$A(\mathbf{D}-E)\psi_0 = A\psi_1 - A(\mathbf{D}-E)\sum_2^4 \alpha_i v_i - \alpha_1^2 A u_1 \times u_1 - \chi_0 \times r - \alpha_4 \overset{\sim 0}{p} \times r, \quad (1.22)$$

где ν — неизвестный коэффициент.

Тогда

$$\psi_0 = -\frac{1}{3}(\mathbf{D}-E)\psi_0 + pr_{v_2,v_3}^{\overset{\sim 0}{p}} \kappa_0 u_1, \qquad (1.23)$$

где $(\mathbf{D}-E)\psi_0$ берем из (1.22).

Остается найти векторы χ_0' и χ_1'. Пусть $\chi_1' = \nu_0 \overset{\sim 0}{p} + \nu_1 v_1 + \nu_{-1} v_{-1}$, тогда, умножив (1.14) на $\overset{\sim 0}{p}, v_{-1}$ и (1.15) на v_1, получаем

$$\begin{cases} -\nu_0 = \alpha_1 \langle v_1, \psi_1 \rangle, \\ 2\nu_1 = \alpha_1 \langle \overset{\sim 0}{p}, \psi_1 \rangle - 2\langle v_{-1}, \chi_2' \rangle - \alpha_1 \kappa_1 \langle v_{-1}, u_1 \rangle, \\ \nu_{-1} = \alpha_1 \alpha_4 \langle v_1, r \rangle. \end{cases} \qquad (1.24)$$

Подобно тому, как для коэффициента при $e^{2\tau}$ $\Phi_0 = (\psi_0, \chi_0) \in \{\varepsilon_1, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_3\}$, так для $e^{3\tau}$ $\Phi_0' = (\psi_0', \chi_0') \in \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_2', \varepsilon_2'', \varepsilon_{-1}\}$.

Поэтому $\chi_0' \in \{v_1, \overset{\sim 0}{p}\}$ и из (1.15) имеем

$$\chi_0' - \chi_0' \times \overset{\sim 0}{p} = -\chi_1' + \alpha_1 \alpha_4 \overset{\sim 0}{p} \times u_1 + \alpha_1 \chi_0 \times u_1 + \alpha_1 v_1 \times \left(\sum_2^4 \alpha_i v_i + \psi_0 \right).$$

Скалярно умножая это равенство на $\overset{\sim 0}{p}$ и v_{-1}, получим, представив предварительно $\chi_0' = \mu_0 \overset{\sim 0}{p} + \mu_1 v_1$:

$$\begin{cases} -\mu_0 = -\langle \chi_1', \overset{\sim 0}{p} \rangle - \alpha_1 \kappa_0 \langle v_1, r \rangle + \alpha_1 \langle v_1, \sum_2^4 \alpha_i v_i + \psi_0 \rangle, \\ 2\mu_1 = -\langle \chi_1', v_{-1} \rangle + \alpha_1 \alpha_4 \langle v_{-1}, u_1 \rangle + \alpha_1 \kappa_0 \langle \overset{\sim 0}{p}, u_1 \rangle + \langle \alpha_1 \overset{\sim 0}{p}, \sum_2^4 \alpha_i v_i + \psi_0 \rangle. \end{cases} \qquad (1.25)$$

Итак, теорема полностью доказана, к тому же найдены явные формулы для нахождения параметров κ_0 (1.17), κ_1 (1.16), ψ_2 (1.18), ψ_1 (1.21), ψ_0 (1.23), χ_2' (1.19), χ_1' (1.24), χ_0' (1.25). ■

Замечание 1. *Степени i и j слагаемых $\Phi_{ij}\tau^i e^{j\tau}$ формального ряда (1.4) удовлетворяют неравенству $i \le j$.*

Теорема 2. *Формальный ряд (1.4) является асимптотическим при условии $Re\tau \to -\infty$, $Im\tau = \tau_0 = const$, и сходящимся в области $Re\tau \leq C(Im\tau)$, где C — некоторая функция $C : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.*

Доказательство. Рассмотрим пространство $\mathcal{V}$ быстро убывающих функций $z(\tau) \in \mathbf{C}^6$ с нормой

$$\|z\|_{\mathcal{V}} = \sup_{\tau\in\tau_0+\mathbf{R}^-}(\|z(\tau)e^{-k\tau}\tau^{-k}\|), \quad |\tau| > const > 0,$$

где $\| * \|$ — норма в $\mathbf{C}^6, k \in \mathbf{N}$.

Определим оператор Пикара для системы (0.2)

$$\mathcal{A}(y(\tau)) = y(\tau_0 - \infty) + \int_{\tau_0+\mathbf{R}^-} \mathcal{F}(y(s))ds, \tau \in \tau_0 + \mathbf{R}^-.$$

Пусть $z_{k-1}(\tau) = \sum_{i\leq j<k}\Phi_{ij}\tau^i e^{j\tau}$ — часть формального ряда $z(t)$(1.4),$k \geq 4$ такая, что $\mathcal{A}(z_{k-1}(\tau)) \equiv z_{k-1}(\tau)(mod \sum_{j\geq k}\Phi_{ij}\tau^i e^{j\tau})$.

Тогда определен оператор $\widetilde{\mathcal{A}}$: $x(\tau) \to \mathcal{A}(z_{k-1}(\tau) + x(\tau)) - z_{k-1}(\tau)$.

$$\begin{aligned} &\|\widetilde{\mathcal{A}}\, x_1 - \widetilde{\mathcal{A}}\, x_2\|_{\mathcal{V}} \\ &= \sup_{\tau\in\tau_0+\mathbf{R}^-}\|e^{-k\tau}\tau^{-k}\int_{\tau_0+\mathbf{R}^-}(\mathcal{F}(z_{k-1}(s)+x_1(s)) - \mathcal{F}(z_{k-1}(s)+x_2(s)))ds\| \\ &\leq M \sup_{\tau\in\tau_0+\mathbf{R}^-} e^{-k\tau}\,\tau^{-k}\int_{\tau_0+\mathbf{R}^-}\|x_1(s) - x_2(s)\|ds \\ &\leq M \sup_{\tau\in\tau_0+\mathbf{R}^-} e^{-k\tau}\,\tau^{-k}\int_{\tau_0+\mathbf{R}_-}\|x_1 - x_2\|_{\mathcal{V}}\, e^{ks}\, s^k ds, \end{aligned}$$

где M — максимум нормы преобразования $\mathcal{F}$ в заранее выбранной окрестности точки $\tilde{z}^0 = (\tilde{p}^0, 0)$.

Мы видим, что оператор $\widetilde{\mathcal{A}}$ является сжимающим, если взять $-Re\,\tau_0$ достаточно большим, а значит, будет иметь неподвижную точку $x_0(\tau)$, $\|x_0\|_{\mathcal{V}} < \infty$.

Так как $z_{k-1}(\tau) + x_0(\tau)$ — решение (0.2), то $\lim\limits_{\tau\to\tau_0-\infty}\|x_0(\tau)e^{-k\tau}\,\tau^{-k}\| < \infty$, следовательно, $x_0(\tau) = o(e^{(k-1)\tau})$, то есть доказано, что ряд (1.4) является асимптотическим.

Если рассмотреть последовательность $(\widetilde{\mathcal{A}})^n(0)$, получим в пределе сходящийся ряд вида $\sum\Phi'_{ij}\tau^i e^{j\tau}$, который асимптотически равен (1.4), следовательно, последний ряд является сходящимся. ■

Сделав замену переменной (0.3), получим теорему об особых точках решений задачи (0.1).

Теорема 3. *Пусть в задаче (0.1) о движении тяжелого твердого тела все моменты инерции различны. Тогда среди особых точек решений будут особые точки, имеющие асимптотику следующего вида:*

$$\begin{cases} p(t) = \overset{\sim 0}{p}\, t^{-1} + \alpha_1 u_1 + \sum_0^2 \psi_i t \ln^i t + \sum_2^4 \alpha_i v_i t + o(t), \\ \gamma(t) = \alpha_1 v_1 t^{-2} + \kappa_1 \overset{\sim 0}{p} \ln t + \kappa_0 v_1 + \alpha_4 \overset{\sim 0}{p} + t \sum_0^2 \chi_i' \ln^i t + \alpha_5 v_{-1} t + o(t), \end{cases} \tag{1.26}$$

$argt = const$; здесь $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ — свободные параметры, $u_1, v_i, \psi_i, \chi_i', \kappa_i$ выражаются через A_i, r_i.
Представление (1.26) может быть включено в ряд, сходящийся в окрестности точки $t = 0$.

§ 2. Асимптотика β-особых точек

Напомним, что β-особые точки характеризуются условием $\overset{\sim 0}{\gamma} \neq 0$. Далее будем действовать, как и в предыдущем параграфе, то есть сначала найдем решение системы

$$\begin{cases} A\dot{p} = A\overset{\sim 0}{p} \times p + Ap \times \overset{\sim 0}{p} + \gamma \times r + Ap \\ \dot{\gamma} = \gamma \times \overset{\sim 0}{p} + \overset{\sim 0}{\gamma} \times p + 2\gamma \end{cases} \iff \qquad \dot{z} = \mathbf{Q}z, \tag{2.1}$$

а затем получим асимптотику (0.2) для решений, входящих в особые точки типа β, и, наконец, сделаем замену $(\tilde{p}, \tilde{\gamma}) \to (p, \gamma)$.

Чтобы выписать решение (2.1), надо сначала найти собственные векторы соответствующего линейного оператора $\mathbf{Q}$, т.е. решить систему

$$\begin{cases} A\overset{\sim 0}{p} \times p + Ap \times \overset{\sim 0}{p} + \gamma \times r + Ap = \lambda A p, \\ \gamma \times \overset{\sim 0}{p} + \overset{\sim 0}{\gamma} \times p + 2\gamma = \lambda\gamma. \end{cases} \tag{2.2}$$

Положим в (2.2) $p = \lambda_1 \overset{\sim 0}{p} + \lambda_2 \overset{\sim 0}{\gamma} + \lambda_3 \overset{\sim 0}{\delta}$, $\gamma = \mu_1 \overset{\sim 0}{p} + \mu_2 \overset{\sim 0}{\gamma} + \mu_3 \overset{\sim 0}{\delta}$, где $\overset{\sim 0}{p} \times \overset{\sim 0}{\gamma} = 2\overset{\sim 0}{\gamma}$, $\overset{\sim 0}{p} \times \overset{\sim 0}{\delta} = -2\overset{\sim 0}{\delta}$, $\overset{\sim 0}{\delta} \times \overset{\sim 0}{\gamma} = \overset{\sim 0}{p}$ $\left(\left\langle \overset{\sim 0}{p}, \overset{\sim 0}{p} \right\rangle = -4, \left\langle \tilde{\delta}^0, \tilde{\gamma}^0 \right\rangle = 2\right)$.

Подставив разложение p и γ во второе уравнение системы (2.2) и приравняв коэффициенты при базисных векторах, получим

$$\begin{cases} \lambda_3 + (\lambda - 2)\mu_1 = 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda\mu_2 = 0, \\ (4 - \lambda)\mu_3 = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Подставим разложение p и γ в первое уравнение системы (2.2) и умножим это равенство скалярно на p, γ и δ:

$$\mu_2(2-\lambda)(1+\lambda)\langle\gamma, r\rangle + \mu_1(2-\lambda)(3-\lambda)\langle p, r\rangle - 2\mu_3\langle\delta, r\rangle = 0, \tag{2.4}$$

$$\lambda_2(3-\lambda)\langle A\gamma,\gamma\rangle + \mu_1(3-\lambda)(\langle A\gamma,\delta\rangle(2-\lambda) + \langle Ap,p\rangle) - \mu_3\langle p,r\rangle = 0, \tag{2.5}$$

$$\frac{\mu_2}{2}(\lambda+1)(\lambda+2)\langle p,r\rangle - \lambda_2((\lambda+1)\langle A\gamma,\delta\rangle + \langle Ap,p\rangle)+$$
$$\mu_1((\lambda-2)(\lambda+1)\langle A\delta,\delta\rangle + 2\langle\delta,r\rangle) = 0. \tag{2.6}$$

Здесь и далее вместо $\overset{\sim 0}{p}, \overset{\sim 0}{\gamma}, \overset{\sim 0}{\delta}$ мы пишем просто p, γ, δ.

В неравенствах (2.4), (2.6) использовано соотношение $\langle Ap, \delta\rangle = \langle p, r\rangle$, которое получается, если первое уравнение характеристической системы (0.4) скалярно умножить на δ.

Из (2.3) следует, что собственным значением является $\lambda = 4$, из (2.4) — $\lambda = 2$, из (2.5) — $\lambda = 3$, а из (2.4)–(2.6) — $\lambda = -1$.

Пусть $\lambda \neq -1, 2, 3, 4$. Тогда из (2.5)–(2.7) следует $(\lambda-3)(\lambda+2)\langle p,r\rangle^2\langle\gamma,r\rangle^{-2}$ $+2(\lambda-2)(\lambda+1)\langle A\delta,\delta\rangle + 4\langle\delta,r\rangle + 2((\lambda+1)\langle A\gamma,\delta\rangle + \langle Ap,p\rangle)((2-\lambda)\langle A\gamma,\delta\rangle +$ $\langle Ap,p\rangle) < A\gamma,\gamma >^{-1} = 0$, и мы находим два оставшихся собственных значения λ_0 и λ^0.

$$\lambda^2 - \lambda + S = 0, \tag{2.7}$$

где

$$S = \frac{\dfrac{(2\langle A\gamma,\delta\rangle + \langle Ap,p\rangle)(\langle A\gamma,\delta\rangle + \langle Ap,p\rangle)}{\langle A\gamma,\gamma\rangle} - \dfrac{3\langle p,r\rangle^2}{\langle\gamma,r\rangle} - 2\langle A\delta,\delta\rangle + 2\langle\delta,r\rangle}{\dfrac{\langle p,r\rangle^2}{2\langle\gamma,r\rangle} - \dfrac{\langle A\gamma,\delta\rangle^2}{\langle A\gamma,\gamma\rangle} + \langle A\delta,\delta\rangle}.$$

Итак, $\lambda_0^{(0)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - S}$, где S — свободный член. Заметим также, что $\lambda^0 = 1 - \lambda_0$.

В принципе, мы нашли все собственные векторы, так как для этого осталось лишь решить линейную систему (2.3)–(2.6) для $\lambda = -1, 2, 3, 4, \lambda_0, \lambda^0$, которая к тому же весьма проста.

Обозначим собственные векторы оператора $\mathbf{Q}$ (решение системы (2.2)), соответствующие собственным значениям $-1, 2, 3, 4,\ \lambda_0,\ \lambda^0 - (u_{-1}, v_{-1})$, (u_2, v_2), (u_3, v_3), (u_4, v_4), (u_0, v_0), (u^0, v^0).

Теорема 4. *Существует формальный ряд, зависящий от пяти произвольных параметров β_2, β_3, β_4, β_0, β^0, задающий решения системы (0.2) в окрестности точки $(\overset{\sim 0}{p}, \overset{\sim 0}{\gamma})$, $\overset{\sim 0}{\gamma} \neq 0$.*

Первые члены этого ряда имеют вид

$$\begin{cases} \tilde{p}\,(\tau) = \overset{\sim 0}{p} + \beta_2 u_2 e^{2\tau} + \beta_3 u_3 e^{3\tau} + \beta_4 u_4 e^{4\tau} + \beta_0 u_0 e^{\lambda_0 \tau} \\ \qquad + \beta^0 u^0 e^{\lambda^0 \tau} + \sum\limits_{i+j>1} \beta_0^i (\beta^0)^j \psi_{ij} e^{i\lambda_0 + j\lambda^0} + \dots \\ \tilde{\gamma}\,(\tau) = \overset{\sim 0}{\gamma} + \beta_2 v_2 e^{2\tau} + \beta_3 v_3 e^{3\tau} + \beta_4 v_4 e^{4\tau} + \beta_0 v_0 e^{\lambda_0 \tau} \\ \qquad + \beta^0 v^0 e^{\lambda^0 \tau} + \sum\limits_{i+j>1} \beta_0^i (\beta^0)^j \chi_{ij} e^{i\lambda_0 + j\lambda^0} + \dots, \end{cases} \tag{2.8}$$

ψ_{ij}, χ_{ik} — *функции* $A_i, r_i, \overset{\sim 0}{p}, \overset{\sim 0}{\gamma}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что нас интересуют только решения, входящие в особую точку $(\overset{\sim 0}{p}, \overset{\sim 0}{\gamma})$ при $Re\tau \to -\infty$, поэтому в (0.2) рассматриваем лишь 5-параметрическое семейство решений (если $Re\lambda_0^{<0>} > 0$, то даже для формальных решений (0.2) можно говорить, что решение задает траекторию, входящую в особую точку, в противном случае ситуация требует более подробного рассмотрения, но поскольку формальное решение останется таким же, нет необходимости рассматривать отдельно случаи $Re\lambda_0 \le 0, Re\lambda^0 \le 0$).

Интересующее нас решение системы (2.1) имеет вид

$$\begin{cases} p(\tau) = \beta_2 u_2 e^{2\tau} + \beta_3 u_3 e^{3\tau} + \beta_4 u_4 e^{4\tau} + \beta_0 u_0 e^{\lambda_0 \tau} + \beta^0 u^0 e^{\lambda^0 \tau}\,, \\ \gamma(\tau) = \beta_2 v_2 e^{2\tau} + \beta_3 v_3 e^{3\tau} + \beta_4 v_4 e^{4\tau} + \beta_0 v_0 e^{\lambda_0 \tau} + \beta^0 v^0 e^{\lambda^0 \tau}\,. \end{cases} \tag{2.9}$$

Чтобы получить представление (2.8), будем действовать, исходя из имеющегося линейного приближения (2.9), как и в предыдущем параграфе. Если считать(2.9) первым приближением решения системы (0.2), то во втором приближении появляется член $(\beta_0\beta^0\psi_0 e^{\tau}, \beta_0\beta^0\chi_0 e^{\tau})$, который может оказаться причиной наличия резонансных членов $\Phi\tau^k e^{(i\lambda_0 + j\lambda^0)\tau}$.

Кроме того, ясно, что степени e^{τ} являются, вообще говоря, комплексными и геометрически образуют решетку на $\mathbf{C}$, поэтому естественно обозначить коэффициент при $e^{(i\lambda_0 + j\lambda^0)\tau}$ с помощью двух индексов $\Phi_{i,j} = (\psi_{i,j}, \chi_{i,j})$. Итак, первые члены $p(t)$, $\gamma(t)$ в окрестности точки $\overset{\sim 0}{z} = (\overset{\sim 0}{p}, \overset{\sim 0}{\gamma})$, вообще говоря, имеют вид $\tilde{z}\,(\tau) = \overset{\sim 0}{z} + \beta_0 w_0 e^{\lambda_0\tau} + \beta^0 w^0 e^{\lambda^0\tau} + \sum_{2\le i+j\le 4} \beta_0^i (\beta^0)^j \Phi_{i,j} e^{(i\lambda_0 + j\lambda^0)\tau} + \beta_0^2 (\beta^0)^2 \Phi'_{2,2} \tau e^{2\tau} + \beta_2 w_2 + \dots$, $w_0 = (u_0, v_0)$, $w^0 = (u^0, v^0)$, $w_2 = (u_2, v_2)$, причем векторы $\Phi_{2,2}$, $\Phi'_{2,2}$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 2\Phi'_{22} = \mathbf{Q}\Phi'_{22}\,, \\ 2\Phi_{22} + \Phi'_{22} = \mathbf{Q}\Phi_{22} + R, \end{cases}$$

где R — коэффициент при $\beta_0^2(\beta^0)^2e^{2\tau}$, а вектор $\Phi'_{2,2}$ коллинеарен собственному вектору (u_2, v_2) оператора $\mathbf{Q}$.

Ниже мы докажем, что $\Phi'_{2,2} = 0$, а пока получим некоторые соотношения на коэффициенты Φ_{ij}.

Пусть (u, v) — собственный вектор оператора $\mathbf{Q}$ с собственым значением λ. Тогда

$$\begin{cases} A\overset{\sim 0}{p} \times u + Au \times \overset{\sim 0}{p} + v \times r + Au = \lambda Au, \\ v \times \overset{\sim 0}{p} + \overset{\sim 0}{\gamma} \times u + 2v = \lambda v. \end{cases} \tag{2.10}$$

Умножим скалярно первое уравнение (2.10) на $\overset{\sim 0}{p}$, а второе — на r и затем сложим. Мы получим

$$-\left\langle A\overset{\sim 0}{p} \times \overset{\sim 0}{p} + \overset{\sim 0}{\gamma} \times r + A\overset{\sim 0}{p}, u\right\rangle = (\lambda - 2)\left(\left\langle A\overset{\sim 0}{p}, u\right\rangle + \langle v, r\rangle\right),$$

и в силу характеристической системы (0.4)

$$(\lambda - 2)\left(\left\langle A\overset{\sim 0}{p}, u\right\rangle + \langle v, r\rangle\right) = 0. \tag{2.11}$$

Теперь умножим скалярно первое уравнение (2.10) на $\overset{\sim 0}{\gamma}$, а второе — на $A\overset{\sim 0}{p}$ и затем сложим. Учитывая (0.4), получим

$$(\lambda - 3)\left(\left\langle A\overset{\sim 0}{\gamma}, u\right\rangle + \left\langle A\overset{\sim 0}{p}, v\right\rangle\right) = 0. \tag{2.12}$$

И, наконец, умножив второе уравнение (2.10) скалярно на $\overset{\sim 0}{\gamma}$, получим

$$(\lambda - 4)\left\langle \overset{\sim 0}{\gamma}, v\right\rangle = 0. \tag{2.13}$$

Из соображений размерности имеем

$$\begin{cases} \left\langle A\overset{\sim 0}{p}, u_2\right\rangle + \langle v_2, r\rangle \neq 0, \\ \left\langle A\overset{\sim 0}{\gamma}, u_3\right\rangle + \left\langle A\overset{\sim 0}{p}, v_3\right\rangle \neq 0, \\ \left\langle \overset{\sim 0}{\gamma}, v_4\right\rangle \neq 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Докажем теперь, что $\Phi'_{22} = 0$. Для этого сначала запишем асимптотику $p(t), \gamma(t)$, делая замену (0.3), и затем, подставляя ее в интеграл энергии

$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\langle Ap, p\rangle + \langle \gamma, r\rangle$, получим $\left\langle A \overset{\sim 0}{p}, \psi'_{22}\right\rangle + \langle \chi'_{22}, r\rangle = 0$, что с учетом коллинеарности Φ'_{22}, w_2 и (2.14) доказывает, что $\Phi'_{22} = 0$.

Аналогично, используя (2.11)–(2.14), можно доказать, что $\Phi'_{33} = \Phi'_{44} = 0$, то есть асимптотика $p(t), \gamma(t)$ в β-особых точках не имеет резонансных членов.

Итак, теорема доказана. ■

Обратим внимание на то обстоятельство, что существует направление ω на комплексной плоскости, такое что $e^{\omega\theta}, e^{\omega\lambda_0\theta}, e^{\omega\lambda^0\theta} \to 0$, при $\theta \to +\infty$.

В самом деле, этим свойством обладает направление $\omega = i(\bar\lambda_0 - \bar\lambda^0)$, где $Im\lambda^0 \geq 0, \lambda^0 + \lambda_0 = 1$.

$$Re(i(\bar\lambda_0 - \bar\lambda^0)) = -Im(\bar\lambda_0 - \bar\lambda^0) = Im(\lambda_0 - \lambda^0) = 2Im\lambda_0 \leq 0,$$

$$Re(i\lambda^0(\bar\lambda_0 - \bar\lambda^0)) = Re(i\lambda^0\bar\lambda_0) = -Im(\lambda^0\bar\lambda_0) = Im(\lambda_0\bar\lambda_0 - \bar\lambda_0) = -Im\bar\lambda_0 \leq 0,$$

$$Re(i\lambda_0(\bar\lambda_0 - \bar\lambda^0)) = -Re(i\lambda_0\bar\lambda^0) = Im(\lambda_0\bar\lambda^0) = Im(\lambda_0 - \lambda_0\bar\lambda_0) = Im\lambda_0 \leq 0.$$

Таким образом, мы можем рассматривать вопрос о сходимости формального ряда β-особой точки.

Теорема 5. *Среди особых точек решений задачи (0.1) о движении тяжелого твердого тела имеются особые точки, имеющие асимптотику следующего вида:*

$$\begin{cases} p(t) = \overset{\sim 0}{p} t^{-1} + \beta_0 u_0 t^{\lambda_0 - 1} + \beta^0 u^0 t^{\lambda^0 - 1} + \beta_2 u_2 t + \beta_3 u_3 t^2 + \beta_4 u_4 t^3 t + \ldots, \\ \qquad \sum\limits_{i+j\geq 2} \beta_0^i (\beta^0)^j \psi_{ij} t^{i\lambda_0 + j\lambda^0 - 1} + \ldots, \\ \gamma(t) = \overset{\sim 0}{\gamma} t^{-2} + \beta_0 v_0 t^{\lambda_0 - 2} + \beta^0 v^0 t^{\lambda^0 - 2} + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 t + \beta_4 v_4 t^2 + \ldots, \\ \qquad \sum\limits_{i+j\geq 2} \beta_0^i (\beta^0)^j \chi_{ij} t^{i\lambda_0 + j\lambda^0 - 2} + \ldots. \end{cases} \tag{2.15}$$

Начиная с некоторого достаточно малого $t = e^{i(\bar\lambda_0 - \bar\lambda^0)\theta}, \theta \to +\infty$, ряд (2.15) становится сходящимся.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теорем 2 и 3.

Список литературы

[1] *Ю.А. Архангельский*, Аналитическая динамика твердого тела. Наука, Москва (1966).

[2] *Г.В. Горр, Л.А. Степанова*, Классические задачи динамики твердого тела. Наук. думка, Киев (1978).

[3] *С.В. Ковалевская*, Научные труды. Изд-во АН СССР, Москва (1948).

[4] *В.В. Козлов*, Несуществование однозначных интегралов и ветвление решений в динамике твердого тела. — *Прикл. математика и механика* (1978), т. 42, № 3, с. 400–406.

[5] *С.Л. Зиглин*, Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике. — *Функц. анализ и его прил.* (1983), т. 17, № 1, с. 8–23.

[6] *А.В. Беляев*, Особые точки решений уравнений Эйлера–Пуассона. — *Докл. АН УССР* (1989), № 5, с. 3–6.

[7] *A.V. Belyaev*, The characteristic system for the Euler–Poisson's equations. — *Nonlinear Boundary Problems.* Vol. 9, NAS of Ukraine IAMM, Donetsk (1999), p. 135–147.

[8] *A.V. Belyaev*, On the classification of the singular points of the solutions to the Euler–Poisson's equations. — New Developments in Analysis series. Voronezh University Press (1993), p. 3–22.

[9] *А.В. Беляев*, О классификации особых точек решений задачи о движении тяжелого твердого тела. — *Докл. АН УССР* (1999), № 5, с. 11–15.

The asymptotics of the solutions to the Euler–Poisson's equations in the singular points of the solutions

A.V. Belyaev

The asymptotics of the singular points of the solutions to the Euler–Poisson's equations for the solutions in general is obtained.

Асимптотика розв'язків рівнянь Ейлера–Пуассона в особливих точках розв'язків

О.В. Бєляєв

Одержано асимптотику особливих точок рівнянь Ейлера–Пуассона для розв'язків загального вигляду.