Математическая физика, анализ, геометрия
2001, т. 8, № 2, с. 148–157

Многообразия самосопряженных операторов с кратными собственными значениями

Я.М. Дымарский

Физико-математический факультет
Луганский государственный педагогический университет
ул. Оборонная, 2, Луганск, 91011, Украина
E-mail:gunn@step.lep.lg.ua

Статья поступила в редакцию 22 декабря 2000 г.
Представлена Е.Я. Хрусловым

Рассмотрены многообразия самосопряженных операторов Гильберта–Шмидта с фиксированными условиями кратности собственных значений; доказана ортогональность этих многообразий. Также рассмотрены многообразие {(оператор, собственное значение, собственный вектор)} и многообразие {(оператор, собственный вектор)}. ·

Введение

Многообразия самосопряженных конечномерных операторов, собственные значения которых удовлетворяют данным условиям кратности, введены в рассмотрение В.И. Арнольдом в [1]. Там же дано определение семейства операторов, зависящих "общим образом" от параметров: у такого семейства многообразия операторов с разными фиксированными условиями конечной кратности спектра пересекаются *трансверсально.* В работе японских математиков [2] с помощью оригинальной замены координат некоторые результаты [1] обобщены для случая самосопряженных операторов Гильберта–Шмидта (Г.–Ш.). Аналогичные результаты получены в [3]. В настоящей работе мы усилим результаты [2], а также покажем, что пространство самосопряженных операторов Г.–Ш. является семейством "общего вида". Оказывается, в *гильбертовом* пространстве самосопряженных операторов Г.–Ш. выполняется более жесткое, нежели трансверсальность, условие *ортогональности.* Также

· Mathematics Subject Classification 2000: 58F19.

мы исследуем многообразие троек (оператор, собственное значение, нормированный собственный вектор)=(оператор, с.зн., н.с.в.) и многообразие пар (оператор, н.с.в.). Многообразие троек, по-видимому, впервые рассмотрено К. Уленбек в [4] для случая эллиптических дифференциальных операторов. Многообразие пар для конечномерного случая исследовано В.И. Арнольдом [5], а также автором в [6, 7]. Семейство периодических краевых задач исследовано автором в [8].

Автор благодарен Г.М. Волю за полезные обсуждения.

1. Основные обозначения и вспомогательные леммы

Обозначим: $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве H; L — пространство операторов Г.–Ш. на H. Известно [9], что тензорный квадрат $H\otimes H$ отождествляется с пространством линейных конечномерных операторов: для любых $a,b,u\in H$ полагаем $(a\otimes b)u=(a,u)b$. В $H\otimes H$ скалярное произведение определяется по формуле $\langle a\otimes b, c\otimes d\rangle=(a,c)\cdot(b,d)$; пополнение тензорного квадрата по норме, порожденной скалярным произведением, совпадает с пространством L.

Нас интересуют аналогичные конструкции для пространства L^s самосопряженных операторов Г.–Ш. Симметрическое тензорное произведение $a\overset{s}{\otimes}b=(1/2)(a\otimes b+b\otimes a)$ определяет самосопряженный оператор. Введем на симметрическом квадрате $H\overset{s}{\otimes}H$ скалярное произведение $\langle a\overset{s}{\otimes}b, c\overset{s}{\otimes}d\rangle^s=\frac{1}{2}((a,c)(b,d)+(a,d)(b,c))$. Естественность такого определения объясняет легко проверяемая

Лемма 1. $\langle a\overset{s}{\otimes}b, c\overset{s}{\otimes}d\rangle^s=\langle a\overset{s}{\otimes}b, c\overset{s}{\otimes}d\rangle$. ■

Таким образом, пополнение симметрического квадрата по норме, порожденной скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle^s$, совпадает с замкнутым подпространством $L^s\subset L$. Теперь, опираясь на определение скалярного произведения в L^s и лемму 1, легко доказать следующие утверждения.

Лемма 2. *Для любого оператора $A\in L^s$ и любых векторов $u,v\in H$ справедливо: $(Au,v)=\langle A, u\overset{s}{\otimes}v\rangle$.*

Доказательство. Пусть $A=a\overset{s}{\otimes}b$, тогда $\langle A, u\overset{s}{\otimes}v\rangle=\langle a\overset{s}{\otimes}b, u\overset{s}{\otimes}v\rangle=\frac{1}{2}((a,u)(b,v)+(a,v)(b,u))=((a\overset{s}{\otimes}b)u,v)=(Au,v)$. Для произвольных A утверждение получаем по непрерывности. ■

Лемма 3. *Если ортогональны векторы: $a\perp c$ и $a\perp d$, то ортогональны операторы: $a\overset{s}{\otimes}b\perp c\overset{s}{\otimes}d$.* ■

2. Многообразия операторов

Все рассматриваемые объекты подразумеваются C^∞-гладкими. Для любого оператора $A \in L^s$ обозначим через $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \ldots \geq \lambda_i(A) \geq \ldots > 0$ его положительные с.зн., причем каждое с.зн. повторено столько раз, какова его кратность. Для любой пары натуральных n и m положим

$$L^s(n,m) = \{A \in L^s : \lambda_{n-1}(A) > \lambda_n(A) = \ldots = \lambda_{n+m-1}(A) > \lambda_{n+m}(A)\}.$$

Отрицательные с.зн. $\lambda_{-1} \leq \lambda_{-2} \leq \ldots < 0$ упорядочены по возрастанию; множество $L^s(n,m)$, где $n < 0$, а $m > 0$, определяется аналогичным образом. Пусть $A \in L^s(n,m)$. Пусть $H_0 \subset H$ — m-мерное векторное подпространство, порожденное ортонормированными с.в. $u_{n,1}(A), \ldots, u_{n,m}(A)$, которые соответствуют m-кратному с.зн. λ_n; пусть H_1 — ортогональное дополнение к H_0 в H; пусть ν_0 и ν_1 — ортогональные проекторы на H_0 и H_1 соответственно. Обозначим $A_{i,j} = \nu_i A \nu_j$ $(i,j = 0,1)$. Для любого оператора $A \in L^s$ определим антисимметрический оператор $Ant(A) = -A_{0,1} + A_{1,0}$ и самосопряженный блочно-диагональный оператор $Diag(A) = A_{0,0} + A_{1,1}$.

Теорема 1. *Для любых n и m множество $L^s(n,m)$ является подмногообразием коразмерности $(1/2)(m-1)(m+2)$. В точке $A \in L^s(n,m)$ касательное пространство $T_A L^s(n,m)$ определяется условиями*

$$(\Delta A u_{n,i}, u_{n,j}) = 0, \quad 1 \leq i < j \leq m, \tag{1}$$

$$(\Delta A u_{n,i}, u_{n,i}) = (\Delta A u_{n,1}, u_{n,1}), \quad 1 < i \leq m. \tag{2}$$

Отображение

$$\Psi : L^s \to L^s, \quad \Psi(\Delta A) = (exp Ant(\Delta A))(A + Diag(\Delta A)) exp(-Ant(\Delta A))$$

диффеоморфно отображает некоторую окрестность $V_T(0) \subset T_A L^s(n,m)$ нуля касательного пространства на некоторую окрестность $W_{n,m}(A) \subset L^s(n,m)$ точки A.

З а м е ч а н и е 1. Теорема 1 уточняет теорему 3 из [2]: в [2] не отмечено, что условия (1), (2) определяют именно касательное пространство $T_A L^s(n,m)$, а не только модельное пространство многообразия $L^s(n,m)$.

З а м е ч а н и е 2. Условия (1), (2) при $m = 2$ были получены методами теории возмущений в 20-х годах [10]. Однако сами по себе они еще не означают наличие гладкой структуры у множества $L^s(n,m)$.

З а м е ч а н и е 3. Известно [11], что для некоторых групповых многообразий (группа невырожденных матриц, подгруппа матриц с детерминантом 1, подгруппа ортогональных матриц и др.) матричная экспонента преобразует окрестность нуля касательного пространства к группе в единице в окрестность самой единицы. Теорема 1 означает, что отображение Ψ в любой точке обладает аналогичным свойством по отношению к пространству L^s и его подмногообразиям $L^s(n,m)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отображение $\Psi \in C^\infty$. Найдем его производную в точке $0 \in L^s$. С этой целью разложим операторную экспоненту в ряд, а затем выделим линейную часть. Так как $\Psi(0) = A$, то $\Psi(\Delta A) - \Psi(0) = (E + Ant(\Delta A) + ...)(A + Diag(\Delta A))(E - Ant(\Delta A) + ...) - A$. Поэтому $D\Psi(0)\Delta A = Diag(\Delta A) + (Ant(\Delta A)A - A(Ant(\Delta A))) = Diag(\Delta A) + (A\pi_0\Delta A - \Delta A\pi_1 A)_{0,1} + (\Delta A\pi_0 A - A\pi_1\Delta A)_{1,0}$. Покажем, что $D\Psi(0)$ является биекцией. Любой оператор $B \in L^s$ единственным образом представим в виде $B = Diag(B) + B_{0,1} + B_{1,0}$. Следовательно, решение относительно ΔA уравнения $D\Psi(0)\Delta A = B$ равносильно системе $Diag(\Delta A) = Diag(B)$, $(A\pi_0\Delta A - \Delta A\pi_1 A)_{0,1} = B_{0,1}$, $(\Delta A\pi_0 A - A\pi_1\Delta A)_{1,0} = B_{1,0}$. Учитывая, что $A = Diag(A) = (\lambda_n E)_{0,0} + A_{1,1}$, после несложных блочных преобразований получаем, что последние два уравнения равносильны следующим: $\Delta A_{0,1}((\lambda_n E)_{1,1} - A_{1,1}) = B_{0,1}$, $((\lambda_n E)_{1,1} - A_{1,1})\Delta A_{1,0} = B_{1,0}$. Так как λ_n не является с.зн. оператора $A_{1,1}$, то $\Delta A_{0,1} = B_{0,1}((\lambda_n E)_{1,1} - A_{1,1})^{-1}$, $\Delta A_{1,0} = ((\lambda_n E)_{1,1} - A_{1,1})^{-1}B_{1,0}$. Итак, $D\Psi(0)$ — непрерывная биекция. Следовательно, отображение Ψ является локальным диффеоморфизмом некоторой окрестности нуля $V(0) \subset L^s$ на окрестность $W(A) \subset L^s$ точки A.

Оператор $Ant(\Delta A)$ антисимметричен. Следовательно, $expAnt(\Delta A)$ — ортогональный оператор и $exp(-Ant(\Delta A)) = (expAnt(\Delta A))^{-1}$ [11, с. 126]. Поэтому операторы $A + Diag(\Delta A)$ и $\Psi(\Delta A)$ ортогонально подобны, в частности, их спектральные свойства совпадают. Откуда следует, что оператор $\Psi(\Delta A) \in L^s(n,m)$ только в том случае, если $(A + Diag(\Delta A))_{0,0} = \lambda_n E_{0,0} + (\Delta A)_{0,0}$ является скалярным m-мерным оператором. Последнее равносильно выполнению условий (1) и (2). Так как Ψ локальный диффеоморфизм, то $B = \Psi(\Delta A) \in W_{n,m}(A) = W(A) \cap L^s(n,m)$ тогда и только тогда, когда ΔA удовлетворяет условиям (1) и (2).

Остается показать, что условия (1), (2) определяют касательное пространство $T_A L^s(n,m)$. Обозначим пока через $T \subset L^s$ подпространство, порожденное условиями (1), (2). Пусть $\Delta A \in T$, т.е. $Diag(\Delta A) = \lambda E_{0,0} + \Delta A_{1,1}$. Так как отображение $D\Psi(0)$ не меняет диагональную компоненту и является линейным изоморфизмом, то $D\Psi(0)(T) = T$. С другой стороны, по доказанному, окрестность $V_T(0) \subset T$ диффеоморфно отображается на окрестность $W_{n,m}(A) \subset L^s(n,m)$. Поэтому $D\Psi(0)(T_0 V_T(0)) = T_A L^s(n,m)$. Но касательное пространство в точке нуль к открытому множеству линейного пространства совпадает с самим пространством: $T_0 V_T(0) = T$. Следовательно, $T = T_A L^s(n,m)$. ∎

Теперь опишем взаимное расположение подмногообразий $L^s(n,m)$ в L^s. Конечный или счетный набор пар $\mu = \{(n_1,m_1),\ldots,(n_i,m_i),\ldots\}$ ($n_i, m_j \in \mathbf{Z}$, $n_i \neq 0$, $m_i > 1$) назовем допустимым, если существует оператор $A \in L^s_\mu = \cap_i L^s(n_i,m_i)$. Очевидно, что набор пар допустим в том и только том случае, когда из неравенств $n_i n_j > 0$ и $|n_i| \leq |n_j|$ следует, что $|n_i| + m_i - 1 < |n_j|$.

Теорема 2. *Для любых допустимых пар* (n_1,m_1), (n_2,m_2) *многообразия* $L^s(n_1,m_1)$ *и* $L^s(n_2,m_2)$ *пересекаются ортогонально. Для любого допустимого набора пар* $\mu = \{(n_1,m_1),\ldots,(n_i,m_i),\ldots\}$ *множество* L^s_μ *является подмногообразием. Если количество пар в наборе конечно, то коразмерность* L^s_μ *в* L^s *равна* $codim L^s_\mu = (1/2)\sum_i (m_i - 1)(m_i + 2)$.

Доказательство. Из леммы 2 следует, что в гильбертовом пространстве L^s линейные функционалы, задающие условия (1) и (2), порождены операторами $A(n;i,j) = u_{n,i} \overset{s}{\otimes} u_{n,j}$ и $A(n;i,i) - A(n;1,1) = u_{n,i} \overset{s}{\otimes} u_{n,i} - u_{n,1} \overset{s}{\otimes} u_{n,1}$ соответственно. Из леммы 3 и свойств н.с.в. самосопряженных операторов следует, что если набор пар допустим, то операторы $A(n_1;i,j)$, $A(n_1;i,i) - A(n_1;1,1)$ и операторы $A(n_2;k,l)$, $A(n_2;k,k) - A(n_2;1,1)$ попарно ортогональны. Остальные утверждения теоремы вытекают из первого. ■

3. Многообразия троек и пар

Пусть $S = \{u \in H : (u,u) = 1\}$. Касательное пространство $T_u S = \{\Delta u \in H : (\Delta u, u) = 0\}$. Рассмотрим следующие множества:

$$Q = \{(A,\lambda,u) \in L^s \times \mathbf{R} \times S : Au = \lambda u\}, \tag{3}$$

$$P = \{(A,u) \in L^s \times S : \text{ существует } \lambda \in \mathbf{R}, \text{ для которого } Au = \lambda u\}. \tag{4}$$

Теорема 3. Q *— связное подмногообразие с модельным пространством* L^s. *В любой точке* $q = (A,\lambda,u) \in Q$ *касательное пространство* $T_q Q$ *не содержит прямую, параллельную прямой* $0 \times \{\lambda\} \times 0 \cong \mathbf{R}$.

Доказательство. Связность Q очевидна. Отображение $G : L^s \times \mathbf{R} \times S \to H$, где $G(A,\lambda,u) = Au - \lambda u$, является субмерсией (в любой точке $q \in Q$ оператор частной производной $D_A G(q)$ эпиморфен, а его ядро $Ker(D_A G(q))$ разлагает касательное пространство $T_u(L^s \times \mathbf{R} \times S)$ в силу гильбертовости многообразия $L^s \times \mathbf{R} \times S$). Итак, Q — связное гильбертово многообразие, модельное пространство которого можно найти по любой карте. Пусть $(A,\lambda,u) \in Q$ и λ — простое с.зн. Тогда сумма операторов частных производных $(D_\lambda G(q) + D_u G(q))(\Delta\lambda, \Delta u) = -\Delta\lambda u + A\Delta u - \lambda\Delta u$ является линейным изоморфизмом (в силу свойств ядра и коядра самосопряженного оператора $A - \lambda E$). Следовательно, модельное пространство изоморфно $T_u(L^s \times \mathbf{R} \times S) \ominus \mathbf{R} \times T_u S = L^s$. Уравнение $D_\lambda G(q)(\Delta\lambda) \equiv -(\Delta\lambda)u = 0$ имеет единственное решение $\Delta\lambda = 0$ — второе утверждение доказано. ∎

Теорема 4. *Множество P является подмногообразием, диффеоморфным Q, в частности, его модельным пространством является L^s.*

Доказательство. Рассмотрим проектирование $\pi : L^s \times \mathbf{R} \times S \to L^s \times S$, где $\pi(A, \lambda, u) = (A, u)$. В силу определений (3) и (4), $\pi(Q) = P$ и сужение π на Q является биекцией. Из второго утверждения теоремы 3 следует, что сужение оператора производной $D\pi(q)$ на касательное пространство $T_q Q$ инъективно. ∎

Нас интересуют подмножества $P^{\pm} = \{p = (A, u) : Au = \lambda u,\ \lambda > 0\ (< 0)\} \subset P$. Так как отличное от нуля с.зн. конечнократно, каждой точке $p \in P^{\pm}$ припишем пару $(n, m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ — номер и кратность соответствующего с.зн. λ. Обозначим через $P(n, m) \subset P^{\pm}$ подмножество, состоящее из точек, которые имеют номер n и кратность m. Точку $p \in P^{\pm}$ назовем простой, если $m = 1$. Сформулируем некоторые очевидные свойства введенных множеств.

Теорема 5. *Подмножества $P\pm \subset P$ являются открытыми и связными. Объединение $P^+ \cup P^-$ всюду плотно в P, а пересечение $P^+ \cap P^- = \emptyset$. Многообразия $P^{\pm}$ стратифицируются по номерам и кратностям своих точек: 1) $P^{\pm} = \cup_{n,m} P(n, m)$, где $n > 0$ $(n < 0), m > 0$; 2) замыкание $\overline{P}(n, m) = \cup_{k,l} P(k, l)$, где $nk > 0$, $|k| \leq |n|$ и $|k| + l \geq |n| + m$; 3) если $n_1 n_2 > 0$, то $\overline{P}(n_1, m_1) \cap \overline{P}(n_2, m_2) = \overline{P}(n, m)$, где $|n| = min\{|n_1|, |n_2|\}$, $|n| + m = max\{|n_1| + m_1, |n_2| + m_2\}$.* ∎

Существует тесная связь между кратностью m точки $p \in P^{\pm}$ и свойствами проектирования $\pi_1 : P \to L^s$, где $\pi_1(A, u) = A$.

Теорема 6. *1) Сужение $\pi_1(n, m)$ проектирования π_1 на $P(n, m)$ является локально тривиальным расслоением над $L^s(n, m)$; его слой над A есть $A \times S^{m-1}$, где S^{m-1} — сфера нормированных собственных векторов оператора $A \in L^s(n, m)$. 2) Ядро $KerD\pi_1(A, u)$ оператора производной совпадает с $0 \times T_u S^{m-1}$ — касательным пространством в точке (A, u) к сфере $A \times S^{m-1}$. Пара $(A, u) \in P$ имеет кратность $m \iff dimKerD\pi_1(A, u) = m - 1$. 3) Сужение $\pi_1^{\pm}$ проектирования π_1 на $P^{\pm}$ является нелинейным фредгольмовым отображением нулевого индекса. 4) Все страты $P(n, m) \subset P$ являются подмногообразиями коразмерности $codimP(n, m) = m(m-1)/2$.*

Доказательство. 1) Очевидно, что $\pi_1(n,m)$ является накрытием и $\pi_1^{-1}(n,m)(A) = A \times S^{m-1}$. Из свойств отображения Ψ и оператора $expAnt(\Delta A)$ следует, что отображение

$$\varphi : W_{n,m}(A) \times S^{m-1} \to P(n,m), \quad \varphi(B,u) = (B, (expAnt(\psi^{-1}(B)))u)$$

является вложением и локальной тривиализацией расслоения $\pi_1(n,m)$ в окрестности точки базы A.

2) Так как π_1 — проектирование вдоль S, то $KerD\pi_1(A,u) \subset 0 \times T_uS$. Из 1) следует, что $0 \times T_uS^{m-1} \subset KerD\pi_1(A,u)$. Если же вектор $v \perp u$ и принадлежит ядру $KerD\pi_1(A,u)$, то $v \in T_{(A,u)}P$. Поэтому $(A - (\lambda + \varepsilon\lambda_0 + \ldots))(u+\varepsilon v) = o(\varepsilon)$. Следовательно, $(A-\lambda)v + \lambda_0 u = 0$. Умножим обе части равенства скалярно на u. Учитывая самосопряженность A, получаем $\lambda_0 = 0$. Итак, v — собственный вектор A, отвечающий тому же с.зн.

3) Из пунктов 1) и 2) и теоремы 1 следует, что в точке $A \in P^{\pm}$ справедливо $dimKerD\pi_1(A) < \infty$, $dimCokerD\pi_1(A) < \infty$. Следовательно, отображение $\pi_1^{\pm}$ является нелинейным фредгольмовым отображением. Так как компоненты P^+, P^- связны, индекс фредгольмовости можно вычислить в любой точке. В простой точке (A,u) проектирование π_1 является локальным диффеоморфизмом. Поэтому индекс равен нулю.

4) Во-первых, $codimP(n,m) < \infty$; в противном случае отображение $\pi_1^{\pm}$ не было бы фредгольмовым. Следовательно, $T_{(A,u)}P = T_{(A,u)}P(n,m) \oplus \mathbf{R}^k$, где k подлежит определению. Согласно п. 2), $KerD\pi_1(A,u) \subset T_{(A,u)}P(n,m)$ и $dimKerD\pi_1(A,u) = m-1$. Поэтому подпространство $T_{(A,u)}P(n,m) \ominus KerD\pi_1(A,u) \subset T_{(A,u)}P$, имеющее коразмерность $k+m-1$, изоморфно с помощью $D\pi_1(A,u)$ отображается в $T_AL^s(n,m)$. Но $D\pi_1(A,u)$ — фредгольмово нулевого индекса, а $codimL^s(n,m) = (1/2)(m-1)(m+2)$. Поэтому $(1/2)(m-1)(m+2) = k+m-1$. Откуда следует, что $k = m(m-1)/2$. ■

4. Расслоение P

В предыдущем пункте мы рассматривали многообразие P и его подмногообразия с точки зрения проектирования π_1. Теперь рассмотрим их с точки зрения проектирования $\pi_2 : L^s \times S \to S$, где $\pi_2(A,u) = u$. Через $\pi_2(P)$ и $\pi_2(n,m)$ обозначим сужение π_2 на P и $P(n,m)$ соответственно.

Обозначим через $L^s_u \subset L^s$ линейное подпространство операторов, для которых вектор u собственный. Имеет место изоморфизм линейных пространств $L^s_u = \mathbf{R} \times L^s_{\perp u}$, где $\mathbf{R}$ — множество всех с.зн., соответствующих u, а $L^s_{\perp u}$ — пространство операторов, действующих в ортогональном дополнении $H_{\perp u}$ к u.

Теорема 7. *Проектирование $\pi_2(P)$ является тривиальным векторным расслоением над S. Прообразом точки $u \in S$ расслоения $\pi_2(P)$ является*

$P_u = u \times L^s_u$. *Ортогональное дополнение к* $\pi_2(P)$ *в* π_2 *канонически изоморфно касательному расслоению* TS. *Имеют место канонические изоморфизмы: 1) векторных пространств* $L^s = L^s_u \oplus T_uS$, *2) векторных расслоений* $\pi_2 = \pi_2(P) \oplus TS$.

Доказательство. Исключая с помощью нормировки $(u,u) = 1$ с.зн. λ в (4), получаем, что $P = \{(A,u) : Au - (Au,u)u = 0\}$. Для всех $u \in S$ справедливо $Au - (Au,u)u \in H_{\perp u}$. Последнее означает, что определено отображение векторных расслоений $\Theta : \pi_2 \to TS$, где $\Theta(A,u) = (Au - (Au,u)u, u)$. Так как Θ — эпиморфизм, получаем, что $\pi_2(P)$ — ядро эпиморфизма. Все утверждения теоремы, кроме тривиальности расслоения, вытекают из этого факта. Тривиальность $\pi_2(P)$ является следствием гомотопической тривиальности бесконечномерной сферы S. (Мы вторично (см. теорему 4) установили наличие гладкой структуры на P.) ■

В силу определения $L^s_{\perp u}$ — это пространство самосопряженных операторов Г.–Ш. $A_{\perp u}$, действующих в $T_uS = H_{\perp u}$. Обозначим $P^{tg} = \cup_u(L^s_{\perp u}, u)$. В каждом касательном пространстве T_uS индуцируется скалярное произведение, с помощью которого устанавливается канонический изоморфизм между P^{tg} и пополнением симметрического квадрата $TS \overset{s}{\otimes} TS$ касательного расслоения (см. п. 1 и [11, с. 620]). Таким образом, P^{tg} является пространством тривиального векторного расслоения $\pi_2^{tg} : P^{tg} \to S$, где $\pi_2^{tg}(A_{\perp u}, u) = u$. Обозначим через NS^{n-1} пространство нормального расслоения над S в H, т.е. объединение пар $\cup(\lambda u, u)$, где $\lambda \in \mathbf{R}$, $u \in S$. Слой нормального расслоения $N_uS^{n-1} = \mathbf{R}$. Само нормальное расслоение будем обозначать так же, как и его пространство. Исследуем подробнее строение расслоения $\pi_2(P)$.

Теорема 8. *Имеет место канонический изоморфизм векторных расслоений* $\pi_2(P) = NS^{n-1} \oplus \pi_2^{tg}$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\Lambda : \pi_2(P) \to NS^{n-1}$, $\Lambda(A,u) = (\lambda u, u)$, где $\lambda = (Au,u)$ — с.зн. оператора A, соотвествующее с.в. u. Λ — эпиморфизм векторных расслоений. Ядром эпиморфизма Λ в каждом слое L^s_u является подпространство операторов, у которых названное с.зн. $\lambda = 0$. Таким образом, $Ker\Lambda$ канонически изоморфно пространству $L^s_{\perp u}$. А ортогональным дополнением этого ядра в слое L^s_u является одномерное подпространство операторов следующего вида: $A(u+v) = \lambda u$, $\forall v \in T_uS$, т.е. слой нормального расслоения. ■

Из теорем 7 и 8 следует

Теорема 9. *Имеют место канонические изоморфизмы векторных пространств* $L^s = \mathbf{R} \oplus L^s_{\perp u} \oplus T_u S$ *и векторных расслоений* $\pi_2 = NS \oplus \pi_2^{tg} \oplus TS$. ■

Описанное в теореме 9 разложение слоя L^s над точкой $u \in S$ тривиального расслоения π_2 становится очевидным в ортонормированном базисе $\{u, v_1, v_2, \ldots\}$, где $v_i \in T_u S$, т.к. $v_i \perp u$. Если $(a_{i,j})$ — симметрическая матрица самосопряженного оператора A в базисе $\{u, v_1, v_2, \ldots\}$, то $a_{1,1} \in N_u S \cong \mathbf{R}$, $(a_{i,j})_{i,j \geq 2}$ — матрица оператора из $L^s_{\perp u}$, а $(a_{2,1}, a_{3,1}, \ldots) \in T_u S$.

Обозначим через $L^s_u(n,m) = (\pi_2(n,m))^{-1}(u)$.

Теорема 10. *Проектирования* $\pi_2(n,m)$ *являются подрасслоениями расслоения* $\pi_2(P)$. *При* $m \geq 2$ *слой* $L^s_u(n,m)$ *канонически диффеоморфен* $L^s_{\perp u}(n, m-1)$. *В* L^s_u *коразмерность* $codim L^s_u(n,m) = m(m-1)/2$.

Доказательство. Достаточно проверить гладкость слоя, т.к. функции склейки расслоений $\pi_2(n,m)$ те же, что у $\pi_2(P)$. Напомним, что для всех операторов из L^s_u касательное пространство $T_u S$ инвариантно. Понятно, что $L^s_u(n,m)$ — множество самосопряженных операторов A, для которых н.с. вектору u соответствует n-е с.зн. λ_n, имеющее кратность m. При $m \geq 2$ сужение $A_{\perp u}$ оператора A на $T_u S$ имеет то же самое n-е с.зн. λ_n, но кратности $m-1$. Таким образом, оператор A полностью определяется своим сужением $A_{\perp u}$, принадлежащим многообразию $L^s_{\perp u}(n, m-1)$. В $L^s_{\perp u}$ многообразие $L^s_{\perp u}(n, m-1)$ имеет коразмерность $(m-2)(m+1)/2$ (теорема 1). В L^s_u пространство $L^s_{\perp u}$ имеет коразмерность 1. Поэтому в L^s_u коразмерность $codim L_u(n,m) = (m-2)(m+1)/2 + 1 = m(m-1)/2$. ■

Учитывая, что расслоение $\pi_2(P)$ локально тривиально, из теоремы 10 мы еще раз получаем п. 4 теоремы 6 о коразмерности: $codim P(n,m) = m(m-1)/2$.

Список литературы

[1] *И.В. Арнольд*, Моды и квазимоды. — *Функц. анализ и его прил.* (1972), т. 6, № 2, с. 94–101.

[2] *D. Fudjiwara, M. Tanikawa, and Sh. Yukita*, The spectrum of the Laplacian. 1. — *Proc. Jap. Acad. Ser. A* (1978), v. 54, No. 4, p. 87–91.

[3] *D. Lupo, A.M. Micheletti*, On multiple eigenvalues of selfadjoint compact operators. — *J. Math. Anal. Appl.* (1993), No. 172, p. 106–116.

[4] *K. Uhlenbeck*, Generic properties of eigenfunctions. — *Amer. J. Math.* (1976), v. 98, No. 4, p. 1059–1078.

[5] *В.И. Арнольд*, Замечания о собственных числах и векторах эрмитовых матриц. В сб.: Избранное-60. Фазис, Москва (1997), с. 583–604.

[6] *Я.М. Дымарский*, О ветвях малых решений некоторых операторных уравнений. — *Укр. мат. журн.* (1996), т. 48, № 7, с. 901–909.

[7] *Я.М. Дымарский*, Об одном топологическом методе в теории собственных векторов квазилинейных задач. — *Докл. НАН Украины* (1999), № 5, с. 25–30.

[8] *Я.М. Дымарский*, О многообразиях собственных функций и потенциалов, порожденных семейством периодических краевых задач. — *Укр. мат. журн.* (1996), т. 48, № 6, с. 771–781.

[9] *А.А. Кириллов*, Элементы теории представлений. Наука, Москва (1972).

[10] *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц*, Квантовая механика. Физматгиз, Москва (1963).

[11] *Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко*, Современная геометрия. Наука, Москва (1979).

The manifolds of self-adjoint operators with multiple eigenvalues

Ya.M. Dymarskii

The manifolds of self-adjoint Hilbert–Schmidt operators with fixed conditions of multiplicity of eigenvalues are considered; the orthogonality of these manifolds is proved. The manifold {(operator, eigenvalue, eigenvector)} and the manifold {(operator, eigenvector)} are considered too.

Многовиди самоспряжених операторів з кратними власними значеннями

Я.М. Димарський

Розглянуто многовиди самоспряжених операторів Гільберта–Шмідта с фіксованими умовами кратності власних значень; доведено ортогональність цих многовидів. Також розглянуто многовид {(оператор, власне значення, власний вектор)} та многовид {(оператор, власний вектор)}.