Математическая физика, анализ, геометрия
2001, т. 8, № 2, с. 158–174

Функциональная модель ограниченного оператора

В.А. Золотарев

Механико-математический факультет
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина
E-mail:Vladimir.A.Zolotarev@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 12 декабря 2000 г.

Осуществляется построение функциональной модели для произвольного ограниченного оператора T (сжимаемость которого не обязательно имеет место), действующего в гильбертовом пространстве H. Показано, что условия существования волновых операторов $W_{\pm}$ в рамках схемы рассеяния П. Лакса–Р. Филлипса приводят в этом случае к пространствам l^2_β с весом β. Эти обстоятельства приводят к пространствам Харди в кольце с весом $W(e^{i\theta})$, который определяется характеристической функцией $S_\Delta(e^{i\theta})$ оператора T. ·

Функциональная модель оператора сжатия T ($\|T\| \le 1$), которую принято считать аналогом спектрального разложения оператора T в неунитарном случае, впервые была построена Б. Секефальви–Надем и Ч. Фояшем [1]. Ключевым элементом конструкции Б. Секефальви–Надя и Ч. Фояша является построение унитарной дилатации U сжатия T, спектральное разложение которой после проектирования на исходное пространство и дает функциональную модель исходного оператора T, [1, 2, 4].

Попытка построения аналогичных конструкций для произвольного оператора T (сжимаемость которого не предполагается) наталкивалась на существенные трудности. Во-первых, в общей ситуации дилатация U является J-унитарной ($U^*JU = UJU^* = J$), а во-вторых, в пространстве дилатации задается индефинитная метрика J, что не позволяет разумным образом находить исходное прстранство H как ортогональное дополнение к $D_+ \oplus D_-$.

В данной работе, используя известный способ построения функциональной модели [5], основанный на схеме рассеяния П. Лакса–Р. Филлипса [3], получена функциональная модель любого ограниченного оператора T.

· Mathematics Subject Classification 2000: 470A45.

I. Напомним, что через $[H, H]$ принято обозначать множество всех ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H. Рассмотрим ограниченный оператор $T \in [H, H]$ в гильбертовом пространстве H. Совокупность

$$\Delta = \left(J_E, H \oplus E, V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix}, H \oplus F, J_F \right) \tag{1}$$

назовем унитарным метрическим узлом (унитарным расширением), если оператор $V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix}$, отображающий ортогональную сумму гильбертовых пространств $H \oplus E$ в $H \oplus F$, удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered} V^* \begin{bmatrix} I_H & 0 \\ 0 & J_F \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} I_H & 0 \\ 0 & J_E \end{bmatrix}, \\ V \begin{bmatrix} I_H & 0 \\ 0 & J_E \end{bmatrix} V^* = \begin{bmatrix} I_H & 0 \\ 0 & J_F \end{bmatrix}, \end{gathered} \tag{2}$$

где J_E и J_F — самосопряжённые операторы в E и F соответственно, причем $J_E^2 = I_E$ и $J_F^2 = I_F$. Прежде всего отметим, что для любого ограниченного оператора T в H можно построить соответствующие элементы узла Δ (1), чтобы выполнялись условия (2). Действительно, пусть $D_T = T^*T - I$ и $D_{T^*} = TT^* - I$ — дефектные операторы для $\mathbf{T}$, тогда легко проверить, что выбрав

$$E = \overline{D_{T^*}H}; \quad F = \overline{D_T H}; \quad K = T^*, \quad \Phi = |D_{T^*}|^{\frac{1}{2}},$$

$$\Psi = -|D_T|^{\frac{1}{2}} J_F, \quad J_F = -\operatorname{sign} D_T, \quad J_E = -\operatorname{sign} D_{T^*},$$

мы получим унитарный метрический узел Δ (1), для которого имеют место (2). Так как операторы J_E и J_F являются инволюциями, $J_E^2 = I_E$, $J_F^2 = I_F$, то $J_E = Q_E^+ - Q_E^-$, $J_F = Q_F^+ - Q_F^-$, где $Q_E^\pm$, $Q_F^\pm$ — ортопроекторы, для которых $Q_E^+ Q_E^- = Q_F^+ Q_F^- = 0$. Напомним [1], что оператор $U \in [G, G]$ называется дилатацией оператора $T \in [H, H]$, если $G \supseteq H$, и

$$T^n h = P_H U^n h \quad (\forall h \in H, \forall n \in \mathbb{Z}_+), \tag{3}$$

где P_H — ортопроектор на H. Дилатация U называется унитарной (изометрической), если оператор U обладает унитарностью (изометричностью) в G.

Через $l_M^2(E)$ обозначим гильбертово пространство вектор-функций $u(k)$ дискретного аргумента $k \in M$, где M — подмножество в $\mathbb{Z}$, $M \subseteq \mathbb{Z}$, со значениями в гильбертовом пространстве E, $u(k) \in E$ для всех $k \in M$ таких, что

$$\sum_{k \in M} \|u(k)\|_E^2 < \infty.$$

Рассмотрим далее гильбертово пространство

$$G = l^2_{\mathbb{Z}_-}(E) \oplus H \oplus l^2_{\mathbb{Z}_+}(F) \tag{4}$$

вектор-функций $f = (u(k); h; v(k)) \in G$ с естественной структурой ортогональной суммы гильбертовых пространств, где $u(k) \in l^2_{\mathbb{Z}_-}(E) = \sum\limits_{-\infty}^{-1} \oplus E$, $h \in H$, а $v(k) \in l^2_{\mathbb{Z}_+}(F) = \sum\limits_{0}^{\infty} \oplus F$. Определим в G индефинитную, вообще говоря, J-метрику, $\langle J.,.\rangle$, где

$$Jf = (J_E u(k); h; J_F v(k)).$$

Зададим в G оператор U :

$$Uf = (P_- u(k+1); \Phi u(-1) + Th; \tilde{v}(k)), \tag{5}$$

где P_- — оператор сужения на $\mathbb{Z}_-$, а функция $\tilde{v}(k)$ из $l^2_{\mathbb{Z}_+}(F)$ равна $\tilde{v}(0) = Ku(-1) + \Psi h$, $\tilde{v}(k) = v(k+1)$ при $k > 0$. Легко видеть, что из узловых соотношений (2) для Δ немедленно следует, что оператор U (5) унитарен ($J-$унитарен) в J-метрике, т.е.

$$U^* J U = J, \quad U J U^* = J. \tag{6}$$

Кроме того, очевидно, что расширение U (5) обладает дилатационным свойством (3) по отношению к основному оператору T узла Δ (1).

Теорема 1. *Произвольный оператор $T \in [H, H]$ обладает дилатацией U (5) в G (4), которая является J-унитарным (6) оператором.*

Подпространства $D_- = l^2_{\mathbb{Z}_-}(E)$ и $D_+ = l^2_{\mathbb{Z}_+}(F)$ являются соответственно приходящим и уходящим подпространствами дилатации U (5) в смысле Лакса–Филлипса [3], а именно справедливы соотношения:

$$\begin{array}{ll} 1) & D_+ \perp D_-; \\ 2) & U^k D_+ \subseteq D_+, \quad k \in \mathbb{Z}_+; \\ 3) & (U^*)^s D_- \subseteq D_-, \quad s \in \mathbb{Z}_+. \end{array} \tag{7}$$

II. Односторонний сдвиг, который индуцирует оператор U (5) на D_+, а U^*, соответственно, на D_-, естественно продолжить до двустороннего сдвига. В гильбертовом пространстве

$$l^2_{\mathbb{Z}}(F) = \sum_{-\infty}^{\infty} \oplus F \tag{8}$$

зададим метрику J_F, которую можно рассматривать как естественное продолжение J-метрики с подпространства D_+, $\langle J_F.,.\rangle$:

$$(J_F v)(k) = J_F v(k),$$

где $v(k) \in l^2_{\mathbb{Z}}(F)$. Введем в $l^2_{\mathbb{Z}}(F)$ оператор трансляции

$$(U_F v)(k) = v(k+1), \quad v(k) \in l^2_{\mathbb{Z}}(F), \tag{9}$$

который будет унитарным как в метрике Гильберта $\langle .,. \rangle$ пространства $l^2_{\mathbb{Z}}(F)$, так и в J_F метрике $\langle J_F.,.\rangle$. Аналогичным образом, в пространстве $l^2_{\mathbb{Z}}(E)$ зададим J_E метрику и соответствующий оператор сдвига U_E:

$$(U_E u)(k) = u(k+1), \tag{10}$$

где $u(k) \in l^2_{\mathbb{Z}}(E)$:

В дальнейшем через P_+ и P_- будем обозначать соответствующие ортопроекторы (в пространствах G, $l^2_{\mathbb{Z}}(F)$, $l^2_{\mathbb{Z}}(E)$) на надлежащее уходящее D_+ и приходящее D_- подпространства.

III. Связывая асимптотическое поведение трансляций U_F, U_E и оператора дилатации U, зададим волновые операторы $W_\pm$:

$$\begin{aligned} W_- &= s - \lim_{n\to\infty} U^n P_- U_E^{-n} \quad (l^2_{\mathbb{Z}}(E) \to G); \\ W_+ &= s - \lim_{n\to\infty} U^{-n} P_+ U_F^{n} \quad (l^2_{\mathbb{Z}}(F) \to G); \end{aligned} \tag{11}$$

при этом $U^{-1} = JU^*J$ в силу (6). Корректность введенных операторов $W_\pm$ очевидна, ибо $G \cap l^2_{\mathbb{Z}}(E) \supseteq D_-$, $G \cap l^2_{\mathbb{Z}}(F) \supseteq D_+$. Ясно, что

$$W_- P_- = P_-, \quad W_+ P_+ = P_+. \tag{12}$$

Кроме того, имеют место соотношения сплетаемости:

$$W_- U_E = U W_-, \quad W_+ U_F = U W_+. \tag{13}$$

Основным вопросом для $W_\pm$ является вопрос о существовании пределов (11). Исследуем на сходимость предел для W_- (для W_+ рассуждения носят аналогичный характер). Рассмотрим допредельное выражение в (11) для W_- :

$$f_n = U^n P_- U_E^{-n} u, \quad u \in l^2_{\mathbb{Z}}(E), n \geq 1, \tag{14}$$

при этом $f_n \in G$ имеет вид

$$f_n = (P_- u(k); h_n; v_n(k)),$$

а компоненты h_n и $v_n(k)$, в силу (5) и (10), как легко видеть, явно вычисляются:

$$h_n = \sum_{s=0}^{n-1} T^s \Phi u(s);$$

$$v_n(k) = \begin{cases} Ku(k) + \sum\limits_{s=k+1}^{n-1} \Psi T^{s-k-1} \Phi u(s); & 0 \leq k \leq n-1; \\ 0; \quad k > n-1. \end{cases} \tag{15}$$

Отсюда следует, что

$$f_n = u_- \oplus \sum_{s=1}^{n} U^s P_{-1} U_E^{-s} u,$$

где $u_- = P_- u$, а P_{-1} — ортопроектор сужения на множество, состоящее из одной точки "-1":

$$(P_{-1}u)(k) = \begin{cases} u(-1); & k = -1; \\ 0; & k \neq -1; \end{cases}$$

то есть $(P_{-1}u)(k) = \delta_{k,-1} u(k)$, а $\delta_{k,-1}$ — символ Кронекера. Отметим, что данная формула для f_n следует и из общих соображений с учетом (5) и (10). Достаточно функцию $u(k)$ при $0 \leq k \leq n-1$ разложить покомпонентно и учесть то обстоятельство, что $UU_E^{-1} = I$ на D_-.

Следовательно,

$$f_{n+k} - f_n = \sum_{s=n+1}^{n+k} U^s P_{-1} U_E^{-s} u, \tag{16}$$

где n, $k \in \mathbb{Z}_+$, а $u \in l^2_{\mathbb{Z}}(E)$.

Теорема 2. *Предположим, что оператор T является сжатием, $\|T\| \leq 1$. Тогда волновые операторы $W_\mp$ (11) существуют и являются изометриями из $l^2_{\mathbb{Z}}$ в пространство G, при этом выполняются соотношения (12) и (13).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что последовательность f_n (14) является фундаментальной в пространстве G. Действительно, из (16) в силу унитарности U заключаем, что

$$\|f_{n+k} - f_n\| \leq \sum_{s=n+1}^{n+k} \|P_{-1} U_E^{-s} u\| = \sum_{s=n}^{n+k-1} \|u_s\| \leq \sqrt{k-1} \sqrt{\sum_{s=n}^{n+k-1} \|u_s\|^2}.$$

Поэтому $\|f_{n+k}-f_n\|\to 0$ при $n\to\infty$ для любого $k\in\mathbb{N}$, т.к. $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\|u(s)\|^2<\infty$ потому, что $u\in l^2_{\mathbb{Z}}(E)$. Фундаментальность f_n в G и обеспечивает существование W_- (11). Изометричность W_- (11), с учетом унитарности U, следует из равенства

$$\|f\|^2=\|P_-U_E^{-n}u\|^2=\sum_{-\infty}^{n-1}\|u_s\|^2$$

после предельного перехода при $n\to\infty$. Теорема доказана.

В общей ситуации, когда сжимаемость T не предполагается, из (16) следует, что

$$\|f_{n+k}-f_n\|\le\sum_{n+1}^{n+k}\|U^s\|\cdot\|u(s-1)\|. \tag{17}$$

Введем весовую последовательность

$$\beta_s^+=\beta_s^+(a)=\begin{cases}1, & s\in\mathbb{Z}_-;\\ a^s, & s\in\mathbb{Z}_+,\end{cases} \tag{18_+}$$

где $a\ge 1$. Определим гильбертово пространство

$$l^2_{\mathbb{Z}}(E,\beta^+)=\left\{u(k)\in E:k\in\mathbb{Z};\sum_{-\infty}^{\infty}\|u(s)\|^2\beta_s^+=\|u\|^2_\beta<\infty\right\}. \tag{19}$$

Нетрудно видеть, что

$$l^2_{\mathbb{Z}}(E,\beta^+(a))\subseteq l^2_{\mathbb{Z}}(E,\beta^+(\tilde a)) \tag{20}$$

при $\tilde a\le a$ и, в частности, все $l^2_{\mathbb{Z}}(E,\beta^+(a))$ являются подпространствами $l^2_{\mathbb{Z}}(E)$ при $a\ge 1$. Действительно,

$$\|u\|^2_{\beta^+(\tilde a)}=\sum_{-\infty}^{\infty}\|u(s)\|^2\beta_s^+(a)\frac{\beta_s^+(\tilde a)}{\beta_s^+(a)}\le\|u\|^2_{\beta^+(a)},$$

так как $\dfrac{\beta_s^+(\tilde a)}{\beta_s^+(a)}\le 1$.

Поэтому из (17), в силу неравенства Коши–Буняковского,

$$\|f_{n+k}-f_n\|^2\le(k-1)a\sum_{n}^{n+k-1}a^s\|u(s)\|^2,$$

где $a=\|U\|^2$; и значит, последовательность f_n будет фундаментальной, если только $u\in l^2_{\mathbb{Z}}(E,\beta^+)$ при $a=\|U\|^2$.

Аналогичным образом, вводя весовую последовательность

$$\beta_s^- = \beta_s^-(b) = \begin{cases} b^{|s|}, & s \in \mathbb{Z}_-; \\ 1, & s \in \mathbb{Z}_+, \end{cases} \tag{18_-}$$

где $b \geq 1$, определим гильбертово пространство

$$l^2_{\mathbb{Z}}(F, \beta^-) = \left\{ v(k) \in F : k \in \mathbb{Z}; \sum_{-\infty}^{\infty} \|v(s)\|^2 \beta_s^- = \|v\|^2_{\beta^-} < \infty \right\}. \tag{21}$$

Очевидно, что для пространств $l^2_{\mathbb{Z}}(F, \beta^-)$ имеют место включения, аналогичные (20), при этом все $l^2_{\mathbb{Z}}(F, \beta^-)$ являются подпространствами $l^2_{\mathbb{Z}}(F)$ при $b \geq 1$. Так же, как и для W_-, устанавливается, что W_+ (11) существует как сильный предел на векторах из $l^2_{\mathbb{Z}}(F, \beta^-)$, где $\beta_s^- = \beta_s^-(b)$, $b = \|U^{-1}\|^2$.

Из свойств J-унитарности (6) дилатации U для последовательности f_n (14) получим, что

$$\langle Jf_n, f_n \rangle = \langle JP_- U_E^{-n} u, U_E^{-n} u \rangle = \sum_{-\infty}^{n-1} \langle J_E u(s), u(s) \rangle.$$

Следовательно, имеют место

$$\begin{aligned} \langle JW_+ v, W_+ v' \rangle_G &= \langle J_F v, v' \rangle_{l^2_{\mathbb{Z}}(F)}; \\ \langle JW_- u, W_- u' \rangle_G &= \langle J_E u, u' \rangle_{l^2_{\mathbb{Z}}(E)} \end{aligned} \tag{22}$$

для любых u, $u' \in l^2_{\mathbb{Z}}(E, \beta^+)$ и v, $v' \in l^2_{\mathbb{Z}}(F, \beta^-)$.

Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Волновые операторы W_- и W_+ (11), действующие соответственно из $l^2_{\mathbb{Z}}(E, \beta^+)$ (19) и из $l^2_{\mathbb{Z}}(F, \beta^-)$ (21) в пространство G, существуют и обладают J-изометричностью (22), при этом имеют место соотношения (12) и (13).*

З а м е ч а н и е 1. *Существование пределов $W_\pm$ (11) обеспечивается на векторах из весовых подпространств $l^2_{\mathbb{Z}}(\beta^\mp) \subseteq l^2_{\mathbb{Z}}$, которые в случае сжатия T, $\|T\| \leq 1$, как и следовало ожидать, совпадают с $l^2_{\mathbb{Z}}$. Из доказательства видно, что веса $\beta_s^\pm$ ($18_\pm$) не обязательно имеют степенной характер, в частности, можно положить $\beta_s^+ = = \|U^s\|^2$ при $s \in \mathbb{Z}_+$. Отметим, что J-изометричность (22) волновых операторов $W_\pm$ имеет место в метрике пространства $l^2_{\mathbb{Z}}$, а не в $l^2_{\mathbb{Z}}(\beta^\mp)$.*

З а м е ч а н и е 2. *Операторы U_F (9) и U_E (10) на подпространствах $l^2_{\mathbb{Z}}(F, \beta^-)$ (21) и $l^2_{\mathbb{Z}}(E, \beta^+)$ (19) не являются унитарными. В частности,* *норма сужения U_E на подпространство $l^2_{\mathbb{Z}}(E,\beta^+)$, как легко видеть, равна $\sqrt{a}$ (а сужения U_F на $l^2_{\mathbb{Z}}(F,\beta^-)$ соответственно равна $\sqrt{b}$).*

IV. Следуя традиционной [3–5] схеме, по волновым операторам $W_\pm$ (11) зададим оператор рассеяния

$$S = W_+^{[-1]}W_- \quad (l^2_{\mathbb{Z}}(E,\beta^+) \to l^2_{\mathbb{Z}}(F,\beta^-)), \tag{23}$$

при этом $W_+^{[-1]} = P_{l^2_{\mathbb{Z}}(F,\beta^-)}JW_+^*J$ в силу (22), где $P_{l^2_{\mathbb{Z}}(F,\beta^-)}$ — ортопроектор в $l^2_{\mathbb{Z}}(F)$ на подпространство $l^2_{\mathbb{Z}}(F,\beta^-)$. Существенно, что для $W_+^{[-1]}$ имеет место представление, аналогичное (11).

Теорема 4. *Оператор $W_+^{[-1]}$ является сильным пределом:*

$$W_+^{[-1]} = s - \lim_{n\to\infty} U_F^{-n}P_+U^n. \tag{24}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что в случае сжатия T, когда U и U_F унитарны в G и $l^2_{\mathbb{Z}}(F)$ соответственно, а W_+ является изометрией, и соотношение (24) очевидно, т.к. $W_+^{[-1]}$ в этом случае совпадает с W_+^*. Обозначим через $A_n = U^{-n}P_+U_F^n$ допредельное выражение для W_+, и пусть соответственно $B_n = U_F^{-n}P_+U^n$. Легко видеть, что

$$B_nA_{n+p} = U_F^{-n}P_+U^{-p}P_+U_F^{n+p} = P_{\mathbb{Z}_-^n} \oplus P_+,$$

где $P_{\mathbb{Z}_-^n}$ — оператор сужения на $\mathbb{Z}_-^n = \{s \in \mathbb{Z}_- : -n \le s \le -1 \ (n \in \mathbb{Z}_+)\}$. А так как в силу теоремы (3) $A_n \to W_+$ сильным образом, то из данного соотношения после предельного перехода при $p \to \infty$ получим, что

$$B_nW_+ = P_{\mathbb{Z}_-^n} \oplus P_+. \tag{25}$$

Поэтому для $f \in W_+l^2_{\mathbb{Z}}(F,\beta^-)$ (т.е. $f = W_+v$, $v \in l^2_{\mathbb{Z}}(F,\beta^-)$) будем иметь, что

$$\|(B_{n+p} - B_n)f\| = \|(B_{n+p} - B_n)W_+v\| = \|(P_{\mathbb{Z}_-^{n+p}} - P_{\mathbb{Z}_-^n})v\| \to 0$$

при $n \to \infty$ и $\forall p \in \mathbb{Z}_+$, т.к. $v \in l^2_{\mathbb{Z}}(F,\beta^-)$. Таким образом, для B_n на векторах из $W_+l^2_{\mathbb{Z}}(F,\beta^-)$ существует сильный предел, который, как следует из (25), является левым обратным для W_+. А в силу единственности левых обратных для W_+ следует, что имеет место (24), кроме того, $W_+^{[-1]}$ существует на замыкании $\overline{W_+l^2_{\mathbb{Z}}(F,\beta^-)}$ в силу ограниченности $W_+^{[-1]} = P_{l^2_{\mathbb{Z}}(F,\beta^-)}JW_+^*J$.

Аналогично (13) для $W_+^{[-1]}$ из формулы (24) следует, что

$$W_+^{[-1]}U = U_FW_+^{[-1]}. \tag{26}$$

Поэтому S-оператор (23) сплетает трансляции

$$SU_E = U_F S, \tag{27}$$

так как очевидно, что в силу (13) и (26) будем иметь, что

$$SU_E = W_+^{[-1]} U W_- = U_F S.$$

Кроме того, из (12) следует, что

$$P_+ S P_- = 0, \tag{28}$$

так как для любых $u \in l_{\mathbb{Z}_-^2}(E, \beta^+)$ и $v \in l^2_{\mathbb{Z}_+}(F, \beta^-)$ имеем, что

$$\langle Su, v\rangle = \langle W_- u, JW_+ Jv\rangle = \langle u, v\rangle_G = 0.$$

Таким образом,

$$Sl^2_{\mathbb{Z}_-}(E) \subseteq l^2_{\mathbb{Z}_-}(F, \beta^-).$$

Теорема 5. *Ограниченный (сжимающий в случае $\|T\| \leq 1$) оператор рассеяния S (23) обладает трансляционной инвариантностью (27) и удовлетворяет соотношению (28).*

V. Важным свойством операторов $W_\pm$ (11) является условие полноты.

Напомним [1, 2, 4, 5], что узел Δ называется простым, если

$$H = \operatorname{span}\{T^n \Phi E, T^{*s}\Psi^* F; n, s \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Лемма 1. *Для простых унитарных метрических узлов Δ имеет место условие полноты волновых операторов $W_\pm$ (11):*

$$G = \operatorname{span}\{W_- l^2_{\mathbb{Z}}(E, \beta^+), W_+ l^2_{\mathbb{Z}}(F, \beta^-)\}. \tag{29}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что нашелся такой вектор $f \in G$, что $f \perp W_\mp l^2_{\mathbb{Z}}(\beta^\pm)$. Тогда из (12) следует, что f имеет вид $f = (0; h; 0)$. Далее, из (13) заключаем, что

$$(U^*)^s f \perp W_- l^2_{\mathbb{Z}}(E, \beta^+), \quad (U^*)^{-k} f \perp W_+ l^2(F, \beta^-)$$

для любых k, $s \in \mathbb{Z}_+$, поэтому векторы $(U^*)^s f$ и $(JUJ)^k f$ имеют такую же структуру, как и f, и значит, $\Psi T^k h = \Phi(T^*)^s h = 0$ для любых k, $s \in \mathbb{Z}_+$. А в силу простоты узла Δ мы получим, что $h = 0$, и следовательно, $f = 0$.

Рассмотрим теперь отображение B из $l^2_{\mathbb{Z}}(E,\beta^+)+l^2_{\mathbb{Z}}(F,\beta^-)$ в пространство G (4), задаваемое формулой

$$Bg = B\begin{pmatrix} g_+ \\ g_- \end{pmatrix} = W_- g_+ + W_+ g_-, \tag{30}$$

где $g_+ \in l^2_{\mathbb{Z}}(E,\beta^+)$, $g_- \in l^2_{\mathbb{Z}}(F,\beta^-)$. Из леммы 1 следует, что для простых узлов Δ образ оператора B плотен в G. Во-вторых, прообразы подпространств D_- и D_+ (7), в силу (12), имеют вид

$$D_-(E) = \begin{pmatrix} l^2_{\mathbb{Z}_-}(E) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_+(F) = \begin{pmatrix} 0 \\ l^2_{\mathbb{Z}_+}(F) \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Очевидно, что

$$\|Bg\|^2_G = \left\langle \begin{bmatrix} W_-^* W_- & W_-^* W_+ \\ W_+^* W_- & W_+^* W_+ \end{bmatrix} \begin{pmatrix} g_+ \\ g_- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_+ \\ g_- \end{pmatrix} \right\rangle_{l^2}, \tag{32}$$

поэтому естественно определить гильбертово пространство

$$l^2_\beta(W) = \left\{ g = \begin{pmatrix} g_+ \\ g_- \end{pmatrix} : g_+ \in l^2_{\mathbb{Z}}(E,\beta^+), g_- \in l^2_{\mathbb{Z}}(F,\beta^-); \right. \\ \left. \langle Wg, g\rangle_{l^2} < \infty \right\}, \tag{33}$$

где W, в силу (32), имеет вид

$$W = \begin{bmatrix} W_-^* W_- & W_-^* W_+ \\ W_+^* W_- & W_+^* W_+ \end{bmatrix}. \tag{34}$$

Вычислим блоки оператора W (34), воспользовавшись (22) и (23), а также тем обстоятельством, что инволюции J, J_E, J_F представляют собой разности соответствующих ортопроекторов $Q^+ - Q^-$ $(Q^+Q^- = 0)$, где $Q^\pm = \dfrac{1}{2}(I \pm J)$. Очевидно, что

$$W_-^* W_- = W_-^* J W_- + W_-^*(I-J)W_- = J_E + 2W_-^* Q^- W_- \\ = I + 2(W_-^* Q^- W_- - Q_E^-).$$

Аналогичным образом,

$$W_+^* W_- = W_+^* J W_- + 2W_+^* Q^- W_- = J_F S + 2W_+^* Q^- W_- \\ = S + 2(W_+^* Q^- W_- - Q_F^- S).$$

Поэтому оператор W (34) можно записать в виде

$$W = \begin{bmatrix} I & S^* \\ S & I \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} W_-^* Q^- W_- - Q_E^- & W_-^* Q^- W_+ - S^* Q_F^- \\ W_+^* Q^- W_- - Q_F^- S & W_+^* Q^- W_+ - Q_F^- \end{bmatrix}, \tag{35}$$

который в случае сжатия T ($Q^- = Q_F^- = Q_E^- = 0$) имеет традиционный вид [2, 4, 5]:

$$W = \begin{bmatrix} I & S^* \\ S & I \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Из соотношений сплетаемости (13) следует, что дилатация U на векторах Bg (30) и, значит, на всем пространстве $l_\beta^2(W)$ (33) действует трансляционным образом:

$$\widehat{U} g = \begin{pmatrix} U_E g_+ \\ U_F g_- \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Очевидно, что в силу структуры пространства дилатации G (4) и вида $D_-(E)$, $D_+(F)$ (31) в пространстве $l_\beta^2(W)$ (33) исходное пространство H изоморфно:

$$\widehat{H} = l_\beta^2(W) \ominus \begin{pmatrix} l_{\mathbb{Z}_-}^2(E) \\ l_{\mathbb{Z}_+}^2(F) \end{pmatrix}, \tag{38}$$

поэтому оператор T реализуется в $\widehat{H}$ посредством сдвига,

$$\widehat{T} g = P_{\widehat{H}} \begin{bmatrix} U_E & 0 \\ 0 & U_F \end{bmatrix} g \quad \forall g \in \widehat{H}. \tag{39}$$

Теорема 6. *Основной оператор T простого унитарного метрического узла Δ, действующий в гильбертовом пространстве H, и его J-унитарная дилатация U (5) в G (4) унитарно эквивалентны трансляционной модели $\widehat{T}$ (39) в $\widehat{H}$ (38) и $\widehat{U}$ (37) в гильбертовом пространстве $l_\beta^2(W)$ (33) соответственно.*

Отметим, что в случае сжатия T ($\|T\| \leq 1$) мы приходим к известной [2, 4, 5] модельной реализации Б.С. Павлова, т.к.

$$l_\beta^2(W) = l^2 \begin{pmatrix} I & S^* \\ S & I \end{pmatrix}$$

в силу (36) и $\beta \equiv 1$.

VI. Каждой вектор-функции $u(k) \in l_{\mathbb{Z}}^2(E)$ сопоставим при помощи преобразования Фурье $\mathcal{F}$ вектор-функцию $u(\theta) \in \in L_{\mathbf{T}}^2(E)$:

$$u(\theta) = \mathcal{F}(u(k)) = \sum_{-\infty}^{\infty} u(k) e^{ik\theta}. \tag{40}$$

При этом сходимость ряда (40) понимается в топологии пространства $L^2_{\mathbf{T}}(E)$-функций, заданных и измеримых на единичной окружности $\mathbf{T}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$), со значениями в гильбертовом пространстве E, квадрат E-нормы которых суммируем.

Преобразование Фурье $\mathcal{F}$ (40) отображает естественным образом $l^2_{\mathbb{Z}_+}(E)$ в пространстве Харди $H^2_+(E)$, которое образуют E-значные функции из $L^2_{\mathbf{T}}(E)$, имеющие голоморфное продолжение в круг $\mathbf{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Аналогичным образом, $l^2_{\mathbb{Z}_-}(E)$ переходит в пространство Харди $H^2_-(E)$-голоморфных функций, отвечающих внешности круга $\mathbf{D}$ ($|z| > 1$), при этом очевидно, что

$$L^2_{\mathbf{T}}(E) = H^2_+(E) \oplus H^2_-(E).$$

Обратимся теперь к гильбертову пространству $l^2_{\mathbb{Z}}(E, \beta^+)$ (18) и разложим каждую функцию $u(k)$ из этого пространства на две ортогональные компоненты, $u(k) = u_-(k) + u_+(k)$, при этом $\operatorname{supp} u_\pm \subseteq \mathbb{Z}_\pm$. Очевидно, что $u_-(\theta)$ — Фурье-образ $u_-(k)$ голоморфно продолжаем в области $\{z : |z| > 1\}$; что же касается $u_+(\theta) = \mathcal{F}(u_+(k))$, то ряд

$$\sum_0^\infty u(k) r^k e^{ik\theta}$$

будет сходиться в метрике $L^2_{\mathbf{T}}(E)$ при $0 \le r \le \sqrt{a}$. Таким образом, функции $u_+(\theta)$ и $u_-(\theta)$ имеют общую область голоморфности — кольцо вне круга $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{T}_{(1,a)} = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \sqrt{a}\}. \tag{41}$$

Обозначим $H^2_{\mathbf{T}(1,a)}(E)$ гильбертово пространство Харди голоморфных в кольце $\mathbf{T}_{(1,a)}$ (41) E-значных функций, квадраты E-норм которых суммируемы на границе $\mathbf{T}(1, a)$, т.е. на окружностях $|z| = 1$ и $|z| = \sqrt{a}$. Таким образом, $\mathcal{F} l^2_{\mathbb{Z}}(E, \beta^+) = H^2_{\mathbf{T}(1,a)}(E)$.

Аналогичным образом, для пространства $l^2_{\mathbb{Z}}(F, \beta^-)$ (20) Фурье-образы $v_\pm(\theta)$ компонент $P_\pm v(k)$ таковы, что функция $v_+(\theta)$ имеет аналитическое продолжение в круг $\mathbf{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, а $v_-(\theta)$, соответственно, продолжаема в область $\left\{z \in \mathbb{C} : |z| > \dfrac{1}{\sqrt{b}}\right\}$. Следовательно, мы приходим в этом случае к кольцу внутри круга $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{T}\left(\frac{1}{b}, 1\right) = \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{\sqrt{b}} < |z| < 1\right\}, \tag{42}$$

где обладают голоморфностью обе функции $v_\pm(\theta)$. Следовательно, оператор Фурье $\mathcal{F}$ (40) отображает $l^2_{\mathbb{Z}}(F, \beta^-)$ на пространство Харди $H^2_{\mathbf{T}(\frac{1}{b},1)}(F)$.

Естественно, что для пространства Харди $H^2_{\mathbf{T}(1,a)}(E)$ голоморфных в кольце (41) функций (как и для $H^2_{\mathbf{T}(\frac{1}{b},1)}(F)$) справедливо ортогональное разложение

$$H^2_{\mathbf{T}(1,a)}(E) = H^2_{+\,\mathbf{T}(1,a)}(E) \oplus H^2_{-\,\mathbf{T}(1,a)}(E),$$

где $H^2_{\pm\,\mathbf{T}(1,a)}(E)$ представляют классы Харди функций из $H^2_{\mathbf{T}(1,a)}(E)$, голоморфно продолжаемых во внутренность $\mathbf{D}$ кольца $\mathbf{T}(1,a)$ и внешность $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \sqrt{a}\}$.

Следующий результат устанавливает, во что переходит оператор рассеяния S (23) после преобразования Фурье $\mathcal{F}$ (40).

Теорема 7. *Для любой функции $u(k) \in l^2_{\mathbb{Z}}(E, \beta^+)$ оператор рассеяния S (23) после преобразования Фурье $\mathcal{F}$ (40) переходит в оператор умножения на характеристическую функцию $S_\Delta(e^{i\theta}) = \dot{K} + \Psi(e^{i\theta}I - T)^{-1}\Phi$ узла Δ–*

$$\mathcal{F}(Su(k)) = S_\Delta(e^{i\theta})u(\theta), \tag{43}$$

где $\mathcal{F}(u(k)) = u(\theta)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из трансляционной инвариантности (27) для S следует, что достаточно знать, как S-оператор действует на $u_{-1}(k)$, где $\operatorname{supp}\{u_{-1}(k)\} = \{-1\}$ и $u_{-1}(-1) = u(-1)$. Учитывая далее (28), имеем, что

$$Su_{-1}(k) = v_-(k),$$

где $\operatorname{supp} v_-(k) \subseteq \mathbb{Z}_-$. Поэтому мы вправе задать отображения $S_p : E \to F$:

$$S_p u(-1) = \delta_{k,-p-1} v_-(k) \quad (p \in \mathbb{Z}_+),$$

где $\delta_{k,-p-1}$ — символ Кронекера. Из допредельных выражений (11) для W_- и (25) для $W_+^{[-1]}$ следует, что S является сильным пределом операторной последовательности $U_F^{-n} P_+ U^{2n} P_- U_E^{-n}$, что и позволяет явным образом найти S_p:

$$S_0 = K, \quad S_p = \Psi T^{p-1}\Phi \quad (p \in \mathbb{N}).$$

Поэтому

$$\mathcal{F}(Su_{-1}(k)) = \sum_{-\infty}^{-1} v_-(k) e^{ik\theta}$$

$$= \left\{ K + \Psi \sum_0^\infty T^k e^{-i(k+1)\theta}\Phi \right\} e^{-i\theta} u(-1) = S_\Delta(e^{i\theta}) u_{-1}(\theta),$$

что и требовалось доказать.

Обратимся теперь к нахождению Фурье-образов блоков ядра W (35). Вычислим $W_{1,1} = W_-^* Q^- W_- - Q_E^-$, для этого, используя допредельное выражение $U^n P_- U_E^{-n}$ для W_-, получим

$$Q^- f_n = (Q_E^- u_-(k); 0; Q_F^- v_n(k)),$$

где f_n задана формулой (14), а $v_n(k)$ имеют вид (15). Поэтому нам необходимо найти Фурье-образ компоненты $Q_F^- v_n(k)$. Воспользовавшись для этого (15), будем иметь

$$\mathcal{F}(Q_F^- v_n(k)) = Q_F^- \sum_0^{n-1} v_n(k) e^{ik\theta}$$

$$= Q_F^- \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta} \left(Ku(k) + \sum_{s=k+1}^{n-1} \Psi T^{s-k-1} \Phi u(s) \right).$$

После перемены порядков суммирования получим

$$\mathcal{F} Q_F^- v_n(k) = Q_F^- \sum_{k=0}^{n} \left(K + \sum_0^{k-1} \Psi T^s \Phi e^{-i(s+1)\theta} \right) e^{ik\theta} u(k).$$

Так как k-е слагаемое в этой сумме представляет собой отрезок ряда Лорана характеристической функции $S_\Delta(e^{i\theta})$, умноженный на $e^{ik\theta}$, то это слагаемое равно $P_+ S_\Delta(e^{i\theta}) u_k e^{ik\theta}$, где P_+ — ортопроектор на класс Харди $H_{+\,\mathbf{T}(\frac{1}{b},1)}(F)$. Следовательно,

$$\mathcal{F}(Q_F^- v_n(k)) = Q_F^- P_+ S_\Delta(e^{i\theta}) \sum_0^{n-1} u(k) e^{ik\theta},$$

поэтому после предельного перехода при $n \to \infty$ получим

$$\mathcal{F}(Q^- W_- u(k)) = Q_E^- u_-(\theta) \oplus Q_F^- P_+ S_\Delta(e^{i\theta}) u_+(\theta).$$

В дальнейшем, чтобы не загромождать индексацию, через P_+ и P_- будем обозначать ортопроекторы в пространстве H^2 голоморфных в кольце ((41) либо (42)) функций на подпространства Харди функций, аналитически продолжаемых внутрь кольца и вне кольца соответственно. Таким образом, получаем

$$\mathcal{F}(W_{1,1} u(k))$$
$$= S_\Delta^*(e^{i\theta}) Q_F^- P_+ S_\Delta(e^{i\theta}) u_+(\theta) \oplus Q_E^- u_-(\theta) - Q_E^- u(\theta)$$
$$= \{S_\Delta^*(e^{i\theta}) Q_F^- P_+ S_\Delta(e^{i\theta}) - Q_E^-\} u_+(\theta),$$

и значит, в результате преобразования Фурье $\mathcal{F}$ (40) блок $W_{1,1}$ переходит в оператор умножения на оператор-функцию

$$\mathcal{F}(W_{1,1}u(k)) = \{S_\Delta^*(e^{i\theta})Q_F^- P_+ S_\Delta(e^{i\theta}) - Q_E^-\}P_+u(\theta). \tag{44}$$

Аналогичные рассуждения для блока $W_{2,2} = W_+^* Q_E^- W_+ - Q_F^-$ оператора W (35) показывают, что

$$\mathcal{F}(W_{2,2}v(k)) = \{J_F S_\Delta(e^{i\theta})Q_E^- P_- S_\Delta^*(e^{i\theta})J_F - Q_F^-\}P_-v(\theta). \tag{45}$$

Вычислим, наконец, Фурье-образ для блока $W_{2,1} = W_+^* Q_F^- W_- - Q_F^- S$. Действительно, т.к.

$$\mathcal{F}(Q^- W_- u(k)) = Q_E^- u_-(\theta) \oplus Q_F^- P_+ S_\Delta(e^{i\theta})u_+(\theta)$$

и, соответственно,

$$\mathcal{F}(Q^- W_+ v(k)) = Q_E^- P_- J S_\Delta^*(e^{i\theta})Jv_-(\theta) + Q_F^- v_+(\theta),$$

то будем иметь

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(W_{2,1}u(k)) &= J_F S_\Delta(e^{i\theta})J_E Q_E^- u_-(\theta) \oplus Q_F^- P_+ S_\Delta(e^{i\theta})u_+(\theta) \\ &\qquad -Q_F^- S_\Delta(e^{i\theta})u(\theta) \\ &= \{-J_F S_\Delta(e^{i\theta})Q_E^- P_- + Q_F^- P_+ S_\Delta(e^{i\theta})P_+ - Q_F^- S_\Delta(e^{i\theta})\}u(\theta).\end{aligned}$$

А если учесть (6.26), то после несложных преобразований получим, что

$$\mathcal{F}(W_{2,1}u(k)) = J_F\{Q_F^- P_- S_\Delta(e^{i\theta}) - S_\Delta(e^{i\theta})P_- Q_E^-\}u(\theta). \tag{46}$$

Суммируя формулы (44)–(46), приходим к следующему утверждению.

Теорема 8. *Преобразование Фурье $\mathcal{F}$ (40) переводит действие оператора W (35) в оператор умножения на оператор-функцию $W(e^{i\theta})$:*

$$\mathcal{F}(Wg(k)) = W(e^{i\theta})g(\theta), \tag{47}$$

где $g \in l_\beta^2(W)$, $g(\theta) \in H_{\mathbf{T}(1,a)}(E) + H_{\mathbf{T}(\frac{1}{b},1)}(F)$. Оператор-функция $W(e^{i\theta})$ при этом имеет вид

$$W(e^{i\theta}) = \begin{bmatrix} I & S_\Delta^*(e^{i\theta}) \\ S_\Delta(e^{i\theta}) & I \end{bmatrix}$$

$$+2\begin{bmatrix} \{S_\Delta^*(e^{i\theta})Q_F^- P_+ S_\Delta(e^{i\theta}) - & \{S_\Delta^*(e^{i\theta})P_- Q_F^- - \\ -Q_E^-\}P_+ & -Q_E^- P_- S_\Delta^*(e^{i\theta})\}J_F \\ J_F\{Q_F^- P_- S_\Delta(e^{i\theta}) - & J_F\{S_\Delta(e^{i\theta})Q_E^- P_- S_\Delta^*(e^{i\theta}) - \\ -S_\Delta(e^{i\theta})P_- Q_E^-\} & -Q_F^-\}J_F P_- \end{bmatrix}, \tag{48}$$

где $S_\Delta(e^{i\theta})$ — характеристическая функция узла Δ, P_+ и P_- — ортопроекторы на подпространства Харди, отвечающие внутренности и внешности соответствующего кольца, и наконец, $Q_E^- = \dfrac{1}{2}(I - J_E)$, $Q_F^- = \dfrac{1}{2}(I - J_F)$ — ортопроекторы.

Очевидно, что преобразование Фурье $\mathcal{F}$ отображает гильбертово пространство $l^2_\beta(W)$ (33) в пространство

$$L_{\mathbf{T}(\frac{1}{b},a)}(W) = \left\{ g(\theta) = \begin{pmatrix} g_+(\theta) \\ g_-(\theta) \end{pmatrix} : g_+(\theta) \in L^2_{\mathbf{T}(1,a)}(E), \right.$$
$$\left. g_-(\theta) \in L^2_{\mathbf{T}(\frac{1}{b},1)}(F); \int\limits_0^{2\pi} \langle W(e^{i\theta}) g(\theta), g(\theta) \rangle d\theta < \infty \right\}, \tag{49}$$

где $W(e^{i\theta})$ имеет вид (48). Далее, в силу (37), очевидно, что дилатация U в пространстве $L_{T(\frac{1}{b},a)}(W)$ будет реализовываться оператором умножения на независимую переменную

$$(\widetilde{U}g)(\theta) = e^{i\theta} g(\theta). \tag{50}$$

Пространство $\widehat{H}$ (38) в этом случае будет иметь вид

$$\widetilde{H} = L^2_{\mathbf{T}(\frac{1}{b},a)}(W) \ominus \begin{bmatrix} H^2_-(E) \\ H^2_+(F) \end{bmatrix}, \tag{51}$$

а оператор T в $\tilde{H}$ примет вид

$$(\widetilde{T}g)(\theta) = P_{\widetilde{H}} e^{i\theta} g(\theta) \quad \forall g(\theta) \in \widetilde{H}. \tag{52}$$

Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 9. *Основной оператор T простого унитарного метрического узла Δ, действующий в гильбертовом пространстве H, и его J-унитарная дилатация U (5) в G (4) унитарно эквивалентны функциональной модели $\widetilde{T}$ (52) в $\widetilde{H}$ (51) и $\widetilde{U}$ (50) в гильбертовом пространстве $L_{\mathbf{T}(\frac{1}{b},a)}(W)$ (49) соответственно.*

В случае сжатия T ($Q_E^- = Q_F^- = 0$) отсутствует второе слагаемое у $W(e^{i\theta})$ (48), что и приводит к хорошо известной функциональной модели Б.С. Павлова [2, 4, 5].

Список литературы

[1] *Б. Секефальви–Надь, Ч. Фояш*, Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. Мир, Москва (1970).

[2] *Н.К. Никольский, С.В. Хрущев*, Функциональная модель и некоторые задачи спектральной теории функций.— *Труды Мат. ин-та АН СССР им. В.А. Стеклова* (1987), т. 176, с. 97–210.

[3] *П.Д. Лакс, Р.С. Филлипс*, Теория рассеяния. Мир, Москва (1971).

[4] *Б.С. Павлов*, Спектральный анализ диссипативного оператора Шредингера в терминах функциональной модели. — *Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. фунд. направления* ВИНИТИ (1991), т. 65, с. 95–163.

[5] *В.А. Золотарев*, Временные конусы и функциональная модель на римановой поверхности. — *Мат. сб.* (1990), т. 181, № 7, с. 965–995.

Functional model of bounded operator

V.A. Zolotarev

The constructing of functional model for any bounded operator T (contracting or not) in Hilbert space H is done. It is shown that existence conditions for wave operarators $W_{\pm}$ within P. Lax–R. Phillips scattering scheme lead in this case to spaces l^2_β with the weight β. These facts lead to Hardy spaces in the ring with the weight $W(e^{i\theta})$ which is defined by the characteristic function $S_\Delta(e^{i\theta})$ of operator T.

Функціональна модель обмеженого оператора

В.О. Золотарьов

Здійснюється побудова функціональної моделі для довільного обмеженого оператора T (стискаючість якого не обов'язково має місце), що діє у гільбертовому просторі H. З'ясовано, що умови існування хвильових операторів $W_{\pm}$ в рамках схеми розсіювання П. Лакса – Р. Філліпса приводять в цьому випадку до просторів l^2_β з вагою β. Ці обставини приводять до просторів Харді у кільці з вагою $W(e^{i\theta})$, яка визначається характеристичною функцією $S_\Delta(e^{i\theta})$ оператора T.