Математическая физика, анализ, геометрия
2001, т. 8, № 2, с. 205–214

О классе нелинейных управляемых систем, отображающихся на линейные

Е.В. Скляр

Institute of Mathematics, Szczecin University,
Wielkopolska str., 15, Szczecin, 70451 Poland
E-mail:sklar@sus.univ.szczecin.pl

Статья поступила в редакцию 30 марта 2001 г.
Представлена Е.Я. Хрусловым

Рассматривается управляемая система вида $\dot{x} = a(x) + b(x)u$, $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}$. В терминах скобок Ли даются необходимые и достаточные условия отображения этой системы (без замены управления) на систему с аддитивно входящим управлением, в частности, на линейную по x и u управляемую систему. Приводятся условия локальной управляемости системы, отображающейся на линейную. ·

Для нелинейной управляемой системы вида

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathrm{Q} \subset \mathbf{R}^n, \ \ n \geq 2, \quad u \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

где $f \in \mathbf{C}^\infty(\mathrm{Q}\times\mathbf{R})$, рассматривается вопрос о возможности ее отображения на линейную систему путем замены переменных

$$z = F(x), \tag{2}$$

где $F: \ \mathrm{Q} \to \mathrm{G} \subset \mathbf{R}^n$ — бесконечно дифференцируемый гомеоморфизм. В работах [1, 2] поставленная задача решена в случае, когда система (1) имеет треугольный вид [3]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \end{cases} \tag{3}$$

·Mathematics Subject Classification 2000: 93C10.

где f_i, $i = 1, \dots, n$, являются $(n-i+1)$ раз непрерывно дифференцируемыми функциями своих аргументов. При этом в основе предложенного подхода лежит предварительное решение задачи отображаемости системы (3) на систему вида

$$\begin{aligned}
&\dot{z}_1 = z_2, \\
&\dot{z}_2 = z_3, \\
&\dots \\
&\dot{z}_{n-1} = z_n, \\
&\dot{z}_n = g(z_1, \dots, z_n) + u, \quad g \in \mathbf{C}^1(\mathrm{G}),
\end{aligned} \tag{4}$$

или, что эквивалентно, задаче отображаемости (3) на каноническую линейную систему

$$\dot{z}_i = z_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1; \quad \dot{z}_n = v,$$

с помощью замены переменных (2), а также аддитивной замены управления

$$v = g(x_1, \dots, x_n) + u, \quad g \in \mathbf{C}^1(\mathrm{Q}).$$

В данной работе получены необходимые и достаточные условия отображаемости системы вида (1) на треугольную систему вида (4) и на произвольную линейную систему, указан способ нахождения таких отображений, даны необходимые и достаточные условия локальной управляемости при геометрических ограничениях на управление. Отметим, что критерий локальной отображаемости в другой форме был получен Р.В. Броккетом [4].

Прежде всего заметим, что поскольку система (4) является линейной относительно управления, то необходимым условием отображаемости на нее системы (1) является принадлежность последней системы этому же классу, т.е. система (1) с необходимостью имеет вид

$$\dot{x} = a(x) + b(x)u = f(x, u), \tag{5}$$

где $a, b \in \mathbf{C}^\infty(\mathrm{Q})$. Пусть $\varphi \in \mathbf{C}^\infty(\mathrm{Q})$ — произвольная скалярная функция. Обозначим через L_a и L_b ее производные Ли относительно $a(x)$ и $b(x)$, т.е.

$$L_a\varphi = \varphi_x(x)a(x), \quad L_b\varphi = \varphi_x(x)b(x).$$

Обозначим также

$$\mathrm{ad}_a^0 b = b, \quad \mathrm{ad}_a^k b = [a, \mathrm{ad}_a^{k-1} b] = a_x \mathrm{ad}_a^{k-1} b - \left(\mathrm{ad}_a^{k-1} b\right)_x a, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Далее мы будем пользоваться следующей леммой, доказательство которой непосредственно следует из введенных определений.

Лемма 1. *Если для некоторого* $i \in \mathbb{N}$ *и некоторого* $k \in \mathbb{N}$ *выполнено* $\left(L_a^{i-1}\varphi\right)_x \mathrm{ad}_a^{k-1} b \equiv 0,\ \ x \in \mathrm{Q},$ *то*

$$\left(L_a^{i}\varphi\right)_x \mathrm{ad}_a^{k-1} b = \left(L_a^{i-1}\varphi\right)_x \mathrm{ad}_a^{k} b. \tag{6}$$

В дальнейшем нам понадобится следующий результат, являющийся одной из модификаций теоремы Фробениуса [5].

Пусть $\chi^1(x), \ldots, \chi^{n-1}(x)$ — система линейно-независимых n-мерных вектор-функций из $\mathbf{C}^\infty(\mathrm{Q})$.

Тогда для нетривиальной разрешимости системы уравнений в частных производных вида

$$\varphi_x \chi^i(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \chi_k^i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{7}$$

в классе $\mathbf{C}^\infty(\mathrm{Q})$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие замкнутости системы χ^i, $i = 1, \ldots, n-1:$

$$\left[\chi^i(x), \chi^j(x)\right] = \chi_x^i \chi^j - \chi_x^j \chi^i = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{i,j}(x) \chi^k(x), \tag{8}$$

где $\lambda_k^{i,j}(x)$, $i, j, k = 1, \ldots, n-1,$ — некоторые скалярные функции.

Если условие(8) выполнено и $\varphi = \varphi^0$ — нетривиальное частное решение системы (7), то ее общее решение имеет вид $\varphi = \Phi(\varphi^0(x))$, где Φ — гладкая функция одной переменной.

Далее мы рассматриваем систему вектор-функций

$$\chi^1(x) = b(x), \quad \chi^2(x) = \mathrm{ad}_a b(x), \quad \ldots, \quad \chi^{n-1}(x) = \mathrm{ad}_a^{n-2} b(x). \tag{9}$$

Справедлива следующая лемма об отображаемости системы (5) на систему (4) с аддитивно входящим управлением, техника доказательства которой использует свойство скобок Ли и близка к используемой в [6, 7].

Лемма 2. *i) Для того чтобы система (5) отображалась на (4) с помощью замены (2), необходимо, чтобы система функций (9) была линейно независима в области* Q *и удовлетворяла условию замкнутости (8).*

ii) Если условия пункта i) выполнены и $\varphi(x)$ *— некоторое нетривиальное решение системы (7), (9), то с помощью невырожденной замены*

$$z_i = L_a^{i-1}\varphi, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{10}$$

система (5) отображается на систему

$$\dot z_i = z_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$
$$\dot z_n = L_a^n \varphi + u L_b L_a^{n-1} \varphi, \tag{11}$$

в которой $L_b L_a^{n-1}\varphi \neq 0$.

Для полноты изложения приведем доказательство в нашем варианте.

Д о к а з а т е л ь с т в о. i) Пусть отображение

$$z_i = F_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \ F \in \mathbf{C}^\infty(\mathrm{Q}),$$

переводит (5) в (4). Обозначим $\varphi = F_1(x_1, \dots, x_n)$. Тогда

$$\dot z_1 = \varphi_x(a(x) + ub(x)) = L_a\varphi + uL_b\varphi = z_2 = F_2(x_1, \dots, x_n),$$

откуда получаем, что

$$L_b\varphi = 0, \quad x \in \mathrm{Q}, \qquad F_2(x_1, \dots, x_n) = L_a\varphi.$$

Отсюда

$$\dot z_2 = (L_a\varphi)_x (a(x) + ub(x)) = L_a^2\varphi + uL_bL_a\varphi = z_3 = F_3(x_1, \dots, x_n).$$

Из этого равенства получим

$$L_bL_a\varphi = 0, \ \ x \in \mathrm{Q}, \qquad F_3(x_1, \dots, x_n) = L_a^2\varphi.$$

Повторяя это рассуждение еще $(n-3)$ раза, заключаем, что

$$L_bL_a^{i-2}\varphi = 0, \quad x \in \mathrm{Q}, \quad i = 2, \dots, n, \tag{12}$$

$$F_i(x_1, \dots, x_n) = L_a^{i-1}\varphi, \quad i = 1, \dots, n. \tag{13}$$

Далее имеем

$$\dot z_n = \left(L_a^{n-1}\varphi\right)_x (a(x) + ub(x)) = L_a^n\varphi + uL_bL_a^{n-1}\varphi = \psi^1(F_1(x), \dots, F_n(x)) + u,$$

что после дифференцирования по u дает

$$L_bL_a^{n-1}\varphi = 1. \tag{14}$$

Равенства (12) перепишем в виде

$$\left(L_a^{i-2}\varphi\right)_x b = \left(L_a^{i-2}\varphi\right)_x \mathrm{ad}_a^0 b = 0, \quad i = 2, \dots, n, \quad x \in \mathrm{Q}. \tag{15}$$

Применяя лемму 1 и используя (12), имеем

$$\left(L_a^i\varphi\right)_x \mathrm{ad}_a^k b = \begin{cases} 0 & 0 \le i+k \le n-2, \\ 1 & i+k = n-1, \quad i,k \ge 0. \end{cases} \tag{16}$$

В частности, при $i=0$ из (16) получаем равенства

$$\varphi_x \mathrm{ad}_a^k b = 0, \quad k = 0,\ldots,n-2, \tag{17}$$

которые означают, что система (7) имеет нетривиальное решение, и, следовательно, система (9) замкнута.

Установим теперь линейную независимость вектор-функций $\mathrm{ad}_a^{i-1}b$, $i = 1,\ldots,n$. Из (13) следует, что равенства (16) можно записать в матричном виде

$$F_x(b, \mathrm{ad}_a b, \ldots, \mathrm{ad}_a^{n-1}b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & * & \ldots & * & * \end{pmatrix},$$

где символ $*$ заменяет некоторые функции. Отсюда немедленно следует невырожденность матрицы $(b, \mathrm{ad}_a b, \ldots, \mathrm{ad}_a^{n-1}b)$, а следовательно, линейная независимость функций b, $\mathrm{ad}_a b$, $\ldots$, $\mathrm{ad}_a^{n-1}b$.

ii) По условию

$$\varphi_x \mathrm{ad}_a^i b = \left(L_a^0\varphi\right)_x \mathrm{ad}_a^i b = 0, \quad i = 0,\ldots,n-2. \tag{18}$$

Применяя лемму 1, получаем

$$\left(L_a^k\varphi\right)_x \mathrm{ad}_a^i b = 0, \quad 0 \le i+k \le n-2, \tag{19}$$

$$L_b L_a^{n-1}\varphi = \left(L_a^{n-1}\varphi\right)_x b = \left(L_a^{n-2}\varphi\right)_x \mathrm{ad}_a b = \ldots = \varphi_x \mathrm{ad}_a^{n-1} b. \tag{20}$$

Из равенств (19), в частности, следует

$$\left(L_a^{i-1}\varphi\right)_x \mathrm{ad}_a^0 b = L_b L_a^{i-1}\varphi = 0, \quad i = 1,\ldots,n-1.$$

Дифференцируя последовательно переменные (10) в силу системы (5), с учетом (19) получаем

$$\dot z_1 = \varphi_x(a(x) + ub(x)) = L_a\varphi + uL_b\varphi = L_a\varphi = z_2,$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\dot z_{n-1} = L_a^{n-1}\varphi + uL_bL_a^{n-2}\varphi = L_a^{n-1}\varphi = z_n,$$

$$\dot z_n = \left(L_a^{n-1}\varphi\right)_x (a(x) + ub(x)) = L_a^n\varphi + uL_bL_a^{n-1}\varphi,$$

т.е. z_i удовлетворяют уравнениям (11).

Установим невырожденность отображения (10). Действительно, из (19) и (20) следует

$$\begin{pmatrix} \varphi_x \\ (L_a\varphi)_x \\ \dots \\ \left(L_a^{n-1}\varphi\right)_x \end{pmatrix} (b, \mathrm{ad}_a b, \dots, \mathrm{ad}_a^{n-1} b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & r(x) \\ 0 & 0 & \dots & r(x) & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r(x) & * & \dots & * & * \end{pmatrix},$$

где $r(x) = \varphi_x \mathrm{ad}_a^{n-1} b \neq 0,\ x \in \mathrm{Q},$ поскольку система функций (9) является линейно независимой. Поэтому матрица Якоби отображения (10) невырождена в области Q.

Доказанная лемма 2 позволяет рассматривать вместо отображаемости произвольной управляемой системы (1) на систему (4) вопрос об отображаемости треугольной системы на систему (4). Следующий шаг состоит в применении теорем 2, 3 [1].

Теорема 1. *Для того чтобы система (1) отображалась на систему (4) путем замены (2), необходимо и достаточно чтобы:*

i) система была линейной относительно управления, т.е. имела вид (5);

ii) вектор-функции (9) были линейно независимы в Q *и обладали свойством замкнутости (8) в этой области;*

iii) для некоторого нетривиального решения $\varphi(x)$ *системы (7), (9) выполнялось соотношение*

$$L_b L_a^{n-1} \varphi = \varphi_x \mathrm{ad}_a^{n-1} b = c(\varphi), \tag{21}$$

где $c(\tau)$ *некоторая функция одной переменной из класса* $\mathbf{C}^\infty$, *не обращающаяся в нуль на образе функции* $\varphi(x)$, $x \in \mathrm{Q}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. С учетом утверждения i) леммы 2 необходимо установить условия iii) в предположении, что условия i) и ii) уже имеют место. Применяя тогда утверждение ii) леммы 2, заключаем, что система (1) отображается на (11) с помощью замены (10). Поскольку последняя система имеет треугольный вид, условие ее отображаемости на (4) дает теорема 2 из работы [1], применяя которую, имеем

$$L_b L_a^{n-1} \varphi(F^{-1}(z)) = c(z_1),$$

где $z{=}F(x)$ — отображение (10) и $c(z_1)$ — некоторая функция. Поскольку $z_1{=}\varphi(x)$, то отсюда немедленно следует (21).

Достаточность. Из условий i) и ii) и на основании леммы 2 заключаем, что невырожденная замена (10) отображает систему (1) на систему (11). При этом в силу (20) последнее уравнение в (11) можно переписать в виде

$$\dot z_n = L_a^n \varphi + \varphi_x \mathrm{ad}_a^{n-1} b \cdot u.$$

Заменим в отображении (10) функцию φ функцией $\widetilde{\varphi} = \Phi(\varphi)$. Поскольку эта функция также удовлетворяет системе (7), то в силу леммы 2 такое отображение переводит систему (1) в систему

$$\begin{aligned} &\dot z_i = z_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ &\dot z_n = L_a^n \widetilde{\varphi} + u L_b L_a^{n-1} \widetilde{\varphi} = L_a^n \widetilde{\varphi} + u \widetilde{\varphi}_x \mathrm{ad}_a^{n-1} b \\ &\quad = L_a^n \widetilde{\varphi} + u \Phi'(\varphi) \varphi_x \mathrm{ad}_a^{n-1} b. \end{aligned} \tag{22}$$

В силу (20) и (21) имеем $\varphi_x \mathrm{ad}_a^{n-1} b = c(\varphi)$. Выбирая тогда $\Phi(\tau) = \displaystyle\int 1/c(\tau) d\tau$, заключаем, что $\dot z_n = L_a^n \widetilde{\varphi} + u$, т.е. система (22) имеет вид (4).

Наконец, рассмотрим вопрос о возможности отображения системы (1) на линейную вполне управляемую систему

$$\dot y = Ay + bu. \tag{23}$$

Известно, что система (23) линейным невырожденным преобразованием приводится к виду

$$\dot z = A_1 z + b_1 u, \tag{24}$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_{n-1} & p_n \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и $p_1, \dots, p_n$ — коэффициенты характеристического полинома $\lambda^n - p_n \lambda^{n-1} - \dots - p_1$ матрицы A. Следовательно, отображаемость на систему (23) сводится к отображаемости на систему (24), которая, в свою очередь, является системой вида (4).

Теорема 2. *Для того чтобы система (1) отображалась на линейную систему (23), необходимо и достаточно, чтобы в дополнение к предположениям i)–iii) теоремы 1 выполнялось следующее условие:*

iv) для некоторой функции $\Phi(\tau) = \int 1/c(\tau)d\tau$, где функция $c(\tau)$ определена равенством (21), имело место равенство

$$L_a^n\Phi(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} p_i L_a^{i-1}\Phi(\varphi). \tag{25}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство немедленно следует из доказательства достаточности в теореме 1, поскольку при условии (25) после замены $z_i = L_a^{i-1}\Phi(\varphi)$ имеем

$$\dot{z}_i = z_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\dot{z}_n = L_a^n\Phi(\varphi) + uL_bL_a^{n-1}\Phi(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} p_i L_a^{i-1}\Phi(\varphi) + u = \sum_{i=1}^{n} p_i z_i + u.$$

Доказательство необходимости проводим по аналогии с доказательством пункта ii) леммы 2. Пусть отображение $z_i = F_i(x_1, \dots, x_n)$ переводит систему (5) в (24). Тогда последовательно устанавливается, что

$$F_i = L_a^{i-1}F_1, \quad i = 1, \dots, n, \qquad L_bL_a^{i-1}F_1 = 0, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

С использованием леммы 1 получаем, что $(F_1)_x\,\mathrm{ad}_a^{i-1}b = 0$, т.е. функция $F_1(x)$ является решением системы (7), (9) и, следовательно, $F_1(x) = \Phi(\varphi(x))$, где $\Phi(\tau)$ — некоторая функция. Далее имеем

$$\dot{z}_n = \left(L_a^{n-1}F_1\right)_x(a(x) + ub(x)) = L_a^n\Phi(\varphi) + uL_bL_a^{n-1}\Phi(\varphi)$$

$$= L_a^n\Phi(\varphi) + u\Phi'(\varphi)\varphi_x\mathrm{ad}_a^{n-1}b = L_a^n\Phi(\varphi) + u\Phi'(\varphi)c(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} p_i z_i + u.$$

Отсюда $\Phi(\tau) = \int 1/c(\tau)d\tau$ и $L_a^n\Phi(\varphi) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i L_a^{i-1}\Phi(\varphi)$.

Теорема доказана.

На основании теоремы 2 можно сформулировать необходимые и достаточные условия управляемости, стабилизируемости. Рассмотрим, например, управляемость системы (1), отображающуюся на линейную. Будем рассматривать управляемость системы (1) при ограничениях на управление вида 1) $|u| \le d$, 2) $0 \le u \le d$.

Система (1) называется локально 0-управляемой, если существует окрестность Q начала координат такая, что для любой точки $x_0 \in$ Q существует управление $u(t)$, удовлетворяющее заданному ограничению на управление и такое, что траектория $x(t)$ системы $\dot{x} = f(x(t), u(t))$, которая начинается в момент времени $t = 0$ в точке $x(0) = x_0$, оканчивается в точке $x_1 = 0$ в некоторый момент времени $T < \infty$, т.е. $x(T) = 0$.

Из теоремы 2 и критерия локальной управляемости [8] вытекаетет следующая теорема.

Теорема 3. *Для того чтобы система (1), для которой выполняются условия теоремы 2, была локально 0-управляемой, необходимо и достаточно, чтобы в случае ограничений на управление вида 1) не существовало собственного вектора v матрицы A_1^*, ортогонального вектору b_1 (в случае, если вектор v отвечает комплексному собственному значению и $v = w_1 + iw_2$, то считаем, что вектор v ортогонален b_1, если выполнено $(w_1, b_1) = 0$ и $(w_2, b_1) = 0$),) а в случае ограничений 2) не существовало вещественных собственных значений матрицы A_1 и не существовало собственного вектора матрицы A_1^*, ортогонального вектору b_1.*

Список литературы

[1] *К.В. Скляр*, Необхідні та достатні умови відображення трикутних керованих систем на лінійні. — *Доп. НАН України* (2001). (До друку)

[2] *К.В. Скляр*, Отображение треугольных управляемых ситем на линейные без замены управления. — *Диф. ур.* (2001). (В печати)

[3] *В.И. Коробов*, Управляемость, устойчивость некоторых нелинейных систем. — *Диф. ур.* (1973), т. 9, № 4, с. 614–619.

[4] *R.W. Brockett*, Feedback invariants for nonlinear systems, Proc.VII IFAC Congress, Helsinki (1978), p. 1115–1120.

[5] *Н.М. Гюнтер*, Интегрирование уравнений второго порядка в частных производных. — Гостехиздат, Москва, Ленинград (1934).

[6] *А.А. Жевнин, К.С. Колесников, А.П. Крищенко, В.И. Толокнов*, Синтез алгоритмов терминального управления на основе концепций обратных задач динамики (Обзор). — *Техн. кибернетика* (1985), № 4, с. 180–187.

[7] *Г.В. Горр, А.А. Илюхин, А.М. Ковалев, А.Я. Савченко*, Нелинейный анализ поведения механических систем. Наукова думка, Киев (1984). 285 с.

[8] *В.И. Коробов, А.П. Маринич, Е.Н. Подольский*, Управляемость линейных автономных систем при наличии ограничений на управление. — *Диф. ур.* (1975), т. 11, № 11, с. 1967–1979.

On the class of non-linear control systems mapping onto linear systems

E.V. Sklyar

The control system in the form $\dot{x} = a(x) + b(x)u$, $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}$, is considered. In the term of Lee brackets necessary and sufficient conditions of possibility to map of this control system (without change of a control) onto the system with additive control, in particular, onto the linear control system with respect to x and u are given. The conditions of local controllability of systems mapping onto linear system are formulated.

Про клас нелінійних керованих систем, які відображаються на лінійні

К.В. Скляр

Розглядається керована система вигляду $\dot{x} = a(x) + b(x)u$, $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}$. У термінах скобок Лі даються необхідні і достатні умови відображення цієї системи (без заміни керування) на систему з керуванням, що входить адитивно, зокрема, на лінійну по x та u керовану систему. Наводяться умови локальної керованості системи, що відображується на лінійну.