Математическая физика, анализ, геометрия
2001, т. 8, № 4, с. 392–418

Римановы многообразия с аксиомой гиперсфер

С.И. Окрут

Механико-математический факультет
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина
E-mail:okrut@univer.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 15 января 2001 г.
Представлена А.А. Борисенко

Предлагается обобщение аксиомы сфер. Показано, что семейство римановых пространств, удовлетворяющих предложенной аксиоме, шире семейства пространств, удовлетворяющих обобщенной аксиоме плоскостей. Найдено строение тензора кривизны многообразий с обобщенной аксиомой сфер. Также найдено строение римановой метрики многообразий, удовлетворяющих обобщенной аксиоме сфер при некоторых естественных дополнительных условиях. Дано описание римановой метрики пространства с аксиомой l-гиперсфер без дополнительных предположений при достаточно большом l.·

Введение

В дифференциальной геометрии представляет особый интерес такой классический вопрос, как выявление взаимосвязи между синтетическими и аналитическими свойствами римановых многообразий. История и современное состояние этой проблематики отражены в [1, 2]. В статье предлагается обобщение аксиомы сфер Леунга–Номидзу [3], которое проводится в духе обобщения аксиомы плоскостей Картана, проведенного ранее автором в работах [4–7]. Известно, что ослабление аксиомы плоскостей до аксиомы сфер не приводит к расширению класса римановых пространств, ей удовлетворяющих. В первом разделе показано, что ослабление обобщенной аксиомы плоскостей до аксиомы (l,s)-сфер, определение 1.1, приводит к расширению класса римановых пространств. В разделе рассматриваются римановы многообразия, тензор кривизны которых имеет строение, схожее с рассматривавшимся

·Mathematics Subject Classification 2000: 53B20.

ранее А. Грейем и другими авторами, ссылки имеются в [9, с. 317]. В теореме 3.1 получено необходимое условие в терминах строения тензора кривизны в точке, где риманово многообразие удовлетворяло аксиоме l-гиперсфер, т.е. аксиоме (l, s)-сфер с максимальной константой s. В теоремах 4.2, 4.3 при некоторых естественных дополнительных условиях найдено строение римановой метрики, удовлетворяющей аксиоме гиперсфер. В теореме 5.3 без дополнительных предположений найдено координатное представление римановой метрики, удовлетворяющей аксиоме l-гиперсфер с достаточно большим значением l.

Произвольно выбираемые многообразия, функции, тензорные поля и распределения предполагаются гладкими (класса C^∞), а основные понятия и обозначения соответствуют принятым, например, в [8–9]. На протяжении всего изложения действует правило Эйнштейна о суммировании по повторяющемуся на разных уровнях индексу.

1. Римановы пространства с обобщенной аксиомой сфер

Определение 1.1. *Риманово многообразие N^n удовлетворяет аксиоме (l, s)-сфер ($1 \le l \le s < n$ и l, s — целые фиксированные числа) в точке x из N, если для любого l-мерного подпространства $Q \subset T_xN$ существует s-мерная внешняя сфера W^s, проходящая через x, такая, что $Q \subset T_xW^s$. Будем говорить, что риманово многообразие удовлетворяет аксиоме (l, s)-сфер, если оно удовлетворяет ей в каждой точке.*

Далее в этом разделе будет построено семейство римановых метрик, удовлетворяющих аксиоме (l, s)-сфер и неудовлетворяющих, вообще говоря, аксиоме (l, s)-плоскостей. Для упрощения записи одинаковыми символами будут обозначаться функция и ее полный прообраз относительно отображения многообразий, а также тензорное поле и его образ относительно (ко)дифференциала отображения. Пусть (M^m, g^M) и (F^{n-m}, g^F) — римановы многообразия. Рассмотрим многообразие $N = F \times M$ и определим на нем риманову метрику $g = \exp(2f)(g^F + g^M)$, где $f = -\ln(\psi - u)$, функция ψ — это полный прообраз относительно проекции функции, определенной на M, а u — это полный прообраз функции, определенной на F. Риманова метрика на N определена с помощью конформной деформации метрики прямого произведения, функция f, определенная на N, будет называться *показателем* конформной деформации. Обозначая через gr символ градиента функции относительно метрики g, введем следующие векторные поля и 1-формы:

$$h := -e^f \operatorname{gr} u = -\frac{\operatorname{gr} u}{\psi - u}, \quad H := e^f \operatorname{gr} \psi = \frac{\operatorname{gr} \psi}{\psi - u}, \quad \omega := e^f du, \quad \theta := e^f d\psi.$$

Очевидно, что векторные поля H и $-h$ находятся в двойственности с 1-формами θ и ω, соответственно. Векторные поля, касательные к слоям $F \times \{*\}$ ($\{*\} \times M$) и проектирующиеся в векторные поля на F (M), будем называть в этом разделе *вертикальными* (*горизонтальными*, соответственно) и обозначать через U, V (X, Y). В дальнейших вычислениях будут также использованы следующие очевидные равенства:

$$\operatorname{gr} f = -h - H, \quad df = \omega - \theta, \quad df(U) = \omega(U), \quad df(X) = -\theta(X).$$

Если h — произвольная функция на N, то ее градиент $\operatorname{gr}^0 h$ относительно метрики $g^0 = g^F + g^M$ выражается таким образом: $\operatorname{gr}^0 h = \exp(2f) \operatorname{gr} h$. А так как g^0 — метрика прямого произведения, то справедливо равенство $\operatorname{gr}^0 \exp(-f) = \operatorname{gr}^M \psi - \operatorname{gr}^F u$, где через gr^M, gr^F обозначены градиенты относительно метрик g^M и g^F. Учитывая указанные формулы, определенное выше векторное поле H можно представить в следующем виде:

$$H = e^{-f} \operatorname{gr}^M \psi = \psi \operatorname{gr}^M \psi - u \operatorname{gr}^M \psi, \tag{1.1}$$

Из вышеприведенной формулы и формул, приведенных в [10, с. 83], получаем равенства

$$\|H\|^2 = \|\operatorname{gr}^M \psi\|_M^2, \qquad \nabla_U H = -\|H\|^2 U, \tag{1.2}$$

где через $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_M$ обозначены нормы относительно метрики g и g^M, соответственно.

Пусть теперь W_M — это вполне геодезическое подмногообразие в M. Его прообраз $\nu^{-1}(W_M) \simeq F \times W_M$ в N относительно проекции ν на M обозначим через W. Как известно (напр., [11, с. 18]), при конформной деформации метрики вполне омбилическое подмногообразие остается вполне омбилическим подмногообразием. И в нашем случае вектор средней кривизны H_W подмногообразия W в многообразии N, g может быть вычислен по формуле

$$H_W = -(\operatorname{gr} f)^{\perp} = H^{\perp}, \tag{1.3}$$

где символами $\perp$ и $\top$ обозначаются нормальная и касательная составляющие вектора относительно подмногообразия W. Эти составляющие одинаковы как в метрике g^0, так и в метрике g, поэтому векторное поле $(\operatorname{gr}^M \psi)^{\top}$ является горизонтальным. Применяя равенства (1.3), (1.1) и двойственность между векторным полем H и 1-формой θ, после очевидных вычислений получим формулу $\nabla_U H^{\top} = -\|H^{\top}\|^2 U$. Последняя формула совместно со второй формулой из (1.2) немедленно влечет равенство $\nabla_U H^{\perp} = -\|H^{\perp}\|^2 U$, т.е. для ковариантной производной нормальной связности выполняется равенство $D_U H^{\perp} = 0$. Аналогичные вычисления с использованием формулы (1.1), второй формулы из (1.2) и формул из [10, с. 83] последовательно приводят к следующим равенствам:

$$\begin{array}{rcl} \nabla_X H &=& e^{-f} \nabla^M_X \operatorname{gr}^M \psi - \|H\|^2 X + \theta(X)(H+h), \\ \nabla_X H^\top &=& e^{-f} (\nabla^M_X \operatorname{gr}^M \psi)^\top - \|H^\top\|^2 X + \theta(X)(H+h), \\ \nabla_X H^\perp &=& e^{-f} (\nabla^M_X \operatorname{gr}^M \psi)^\perp - \|H^\perp\|^2 X. \end{array} \tag{1.4}$$

Определение 1.2. *Функцию ψ, определенную на римановом многообразии M, g^M, назовем лучевой, если для нее выполняется следующее уравнение:* $\operatorname{hes} \psi = \lambda g^M$.

Здесь коэффициент пропорциональности λ между гессианом и римановой метрикой есть некоторая функция на M. Эта функция выражается через лапласиан следующим образом: $m\lambda = \Delta^M \psi$, где $m = \dim M$.

Покажем, что на пространственной форме M_c, где c — значение секционной кривизны, при любом c существуют локально определенные лучевые функции. Через dl_c^2 будем также обозначать метрику постоянной кривизны c. Построим соответствующие примеры лучевых функций. Рассмотрим три случая.

1. Если $c > 0$, то метрика и лучевая функция ψ могут быть локально определены в следующем виде (B — произвольная константа):

$$g^M = ds^2 + \cos^2 s\sqrt{c}\, dl_c^2, \quad \psi = (\sin s\sqrt{c} + B)/\sqrt{c}.$$

Здесь, как нетрудно вычислить, $\lambda = -\sqrt{c}\sin s\sqrt{c}$.

2. Если $c < 0$, то метрика и лучевая функция ψ могут быть локально определены в следующем виде:

$$g^M = ds^2 + \operatorname{ch}^2 s\sqrt{-c}\, dl_c^2, \quad \psi = (\operatorname{sh} s\sqrt{-c} + B)/\sqrt{-c}.$$

Здесь $\lambda = \sqrt{-c}\operatorname{sh} s\sqrt{-c}$.

3. Рассмотрим теперь евклидову пространственную форму и прямоугольные декартовы координаты $x^1, \dots, x^m$. В этом случае лучевую функцию можно задать двумя способами: а) функцию ψ можно локально определить как $\psi = Bx^1 + E$, где B, E — произвольные константы; при этом оказывается, что $\lambda \equiv 0$; б) лучевую функцию ψ можно локально определить как $\psi = A\|x\|^2 + E$, при этом $\lambda = 2A$.

Если в рассматриваемом примере риманова многообразия $(N,\ g)$ в качестве функции ψ взять лучевую функцию, то формула (1.4) преобразуется к виду $\nabla_X H^\perp = -\|H^\perp\|^2 X$, т.е. $D_X H^\perp = 0$. Таким образом, вектор средней кривизны $H_W = H^\perp$ вполне омбилического подмногообразия W является параллельным в нормальной связности, а W — это внешняя сфера.

Пусть некоторое произвольное подпространство Q в T_pN имеет размерность l, причем $l+n-m \leq s < n$. Рассмотрим его проекцию $E = \nu_* Q$ в T_yM, где $y = \nu(p)$, при этом выполняется неравенство $\dim E \leq l$. Учитывая неравенство между l и s, подпространство E всегда можно расширить до k-мерного ($k = s-n+m$) подпространства P. Так как M является вещественной пространственной формой, то оно удовлетворяет аксиоме k-плоскостей и существует вполне геодезическое подмногообразие W_M размерности k такое, что $T_xW_M = P$. Прообраз $W = \nu^{-1}(W_M)$ является s-мерным подмногообразием в N, и на основании полученного ранее подмногообразие W — это внешняя сфера. А так как согласно построению подмногообразия W выполняется включение $Q \subset T_pW$, то таким образом в итоге показано, что риманово пространство N удовлетворяет аксиоме (l,s)-сфер. Важно отметить, что в построенном примере внешние сферы, существование которых постулируется аксиомой (l,s)-сфер, как видно из формул (1.1) и (1.3), вообще говоря, не являются вполне геодезическими подмногообразиями.

2. Векторы, замкнутые относительно тензора кривизны

Воспользовавшись понятиями и обозначениями из [7], докажем следующую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть подпространство $S \subset T_xN$ состоит из R-замкнутых векторов, а R-замкнутый вектор X неортогонален подпространству S. Тогда подпространство $P = S + L(X)$ состоит из R-замкнутых векторов и выполняются равенства*

$$\forall Z, W\text{-}\textit{единичных} \in P \ \forall U \in L^{\perp}(Z,W): \quad R(U,Z)Z = R(U,W)W.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $X \in S$, то доказываемая лемма следует из предыдущей леммы. Предположим теперь, что $X \notin S$. Применяя лемму 1 из [7] к вектору X и его ортогональной проекции Y на подпространство S, приходим к заключению, что плоскость $L(X,Y)$, натянутая на векторы X и Y, состоит из R-замкнутых векторов. Для пространства P имеется разложение в прямую ортогональную сумму

$$P = S^{\perp} \overset{\perp}{\oplus} L(Y) \overset{\perp}{\oplus} L^{\perp}(X,Y). \tag{2.1}$$

Пусть Z — произвольный вектор из P, тогда имеется единственное разложение вектора $Z = A + Q + K$ в сумму векторов, соответствующую прямой сумме подпространств (2.1). Рассмотрим два случая.

1-й случай: $Q \neq 0$. Определим следующие векторы: $Y_1 = A + Q/2, \quad Y_2 = Q/2 + K$. Вектор Y_1 является R-замкнутым, т.к. принадлежит плоскости

$L(X,Y)$, состоящей из R-замкнутых векторов по доказанному выше. Вектор же Y_2 является R-замкнутым по условию, т.к. он принадлежит подпространству S. По построению векторы Y_1 и Y_2 — неортогональные. Применяя к паре векторов Y_1 и Y_2 лемму 1 из [7], получаем, что вектор Z, как и все векторы из линейной оболочки $L(Y_1,Y_2)$, является R-замкнутым вектором.

2-й случай: $Q = 0$. В этом случае достаточно определить следующим образом векторы $Y_1 = A + Q'$, $Y_2 = -Q' + K$, где Q' — это некоторый ненулевой вектор из пересечения $L(X,Y) \cap S$, и применить все рассуждения из предыдущего случая.

Равенство леммы следует из леммы 2.2, которая применяется к произвольной плоскости $L(Z,W)$, натянутой на единичные векторы Z, W и состоящей, по доказанному выше, из R- замкнутых векторов. ■

Теорема 2.1. *Пусть Ψ — некоторое подпространство касательного пространства T_xN^n риманова многообразия ($\dim\Psi = n-m > 1$). Следующие условия эквивалентны между собой:*

а) Подпространство Ψ состоит из R-замкнутых векторов.

б) Имеется разложение в прямую ортогональную сумму подпространств ($\dim\Phi_\alpha = 1\ \forall\alpha = 1,\dots,m$):

$$T_xN = \Psi \oplus \Phi, \quad \Phi = \Phi_1 \oplus \cdots \oplus \Phi_m. \tag{2.2}$$

Причем для указанного разложения выполнены такие свойства:

$$k(\Psi\wedge\Psi) = k, \qquad k(\Psi\wedge\Phi_\alpha) = \varkappa_\alpha\,, \tag{2.3}$$

$$R(\Psi,\Psi)\Phi_\alpha = 0,\ R(\Phi_\alpha,\Phi_\beta)\Psi = 0, \quad R(\Phi_\alpha,\Psi)\Psi \subset \Phi_\alpha\,. \tag{2.4}$$

в) Существует разложение касательного пространства в прямую ортогональную сумму подпространств (2.2)*, и если $X \in \Psi$, а A, B — произвольные векторы, то*

$$R(X,A)B = \langle B, JA\rangle X - \langle B, X\rangle JA, \tag{2.5}$$

$$JA := \sum_\alpha \varkappa_\alpha \Pr_\alpha A + k \operatorname{ort} A. \tag{2.6}$$

Причем определенный выше (1,1)-тензор J является симметрическим, а $\Pr_\alpha$ и ort суть операторы проектирования на Φ_α и Ψ, соответственно.

г) Существует разложение касательного пространства в прямую ортогональную сумму подпространств (2.2) и пространство бивекторов разлагается в прямую ортогональную сумму следующих подпространств:

$$\Lambda^2_xN = \Lambda^2\Psi \overset{\perp}{\oplus} \Lambda_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} \Lambda_m \overset{\perp}{\oplus} \Lambda^2\Phi,$$
$$\text{где}\quad \Lambda^2\Psi = \Psi\wedge\Psi, \quad \Lambda_\alpha = \Psi\wedge\Phi_\alpha, \quad \Lambda^2\Phi = \Phi\wedge\Phi$$

(здесь $\Phi = \Phi_1 + \dots + \Phi_m$), среди которых $\Lambda^2\Psi$ и Λ_α — это подпространства, состоящие из собственных векторов для оператора кривизны ϱ и отвечающие собственным значениям k и $\varkappa_\alpha$, соответственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение об эквивалентности пунктов б) и в) можно извлечь из [6] и [7]. Покажем, что пункт в) влечет пункт а). Из пункта в) следует, что

$$\langle R(B,C)X,A\rangle = \langle R(X,A)B,C\rangle = \langle B,JA\rangle\,\langle X,C\rangle - \langle B,X\rangle\,\langle JA,C\rangle = 0,$$

если $X \perp B, C$, т.е. в) $\Rightarrow$ а).

Докажем импликацию а) $\Rightarrow$ б). Покажем сначала, что секционные кривизны вдоль двумерных плоскостей из Ψ не зависят от выбора этих плоскостей. Случай $\dim\Psi = 2$ тривиален. Пусть размерность Ψ больше 2, тогда в любой паре плоскостей из Ψ можно выбрать по векторам X и Z, которые будут взаимно ортогональные и единичные. Пусть дополнительные им орты в соответствующих плоскостях — Y и W, соответственно. Рассмотрим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} k(X\wedge Y) &= \langle R(X,Y)Y,X\rangle = \langle R(X,Z)Z,X\rangle \\ &= \langle R(Z,X)X,Z\rangle = \langle R(Z,W)W,Z\rangle = k(Z\wedge W). \end{aligned}$$

Так как по построению $X \perp Y, Z$, то второе равенство получено на основании равенства леммы 2.1. Третье равенство следует из алгебраических свойств тензора кривизны. Четвертое равенство также сводится к равенству указанной леммы, т.к. по построению $Z \perp X, W$. Обозначим через $k := k(X\wedge Y)$ постоянную секционной кривизны вдоль двумерных плоскостей из Ψ.

Оператор $R(\cdot,X)X$, как следует из алгебраических свойств тензора кривизны, является самосопряженным в касательном пространстве риманова многообразия. Возьмем произвольные единичные векторы X и Z из построенного подпространства Ψ. По равенству леммы 2.1 операторы $R(\cdot,X)X$ и $R(\cdot,Z)Z$, суженные на $\Psi^\perp$, совпадают. В частности, они имеют общие собственные векторы U_α, отвечающие общим собственным значениям $\varkappa_\alpha$. Определим прямые в касательном пространстве $\Phi_\alpha := L(U_\alpha)$. Покажем, что секционная кривизна $k(U_\alpha \wedge X)$ не зависит от выбора вектора X из подпространства Ψ. Пусть X и Z — произвольные единичные векторы из Ψ.

$$k(U_\alpha\wedge Y) = \langle R(U_\alpha,Y)Y,U_\alpha\rangle = \langle R(U_\alpha,Z)Z,U_\alpha\rangle = \varkappa_\alpha = k(U_\alpha\wedge Z).$$

Таким образом, равенства (2.3) доказаны.

По условию пункта а) все векторы из подпространства Ψ являются R-замкнутыми. Отсюда сразу следует справедливость второго равенства из

(2.4). Первое равенство из (2.4) следует из I-го тождества Бьянки и R-замкнутости ортогональных векторов X и Y из Ψ. Действительно,

$$R(X,Y)U = R(U,Y)X + R(X,U)Y = 0.$$

Последнее включение в (2.4) следует из того, что для любых единичных векторов X и Y из Ψ справедливо равенство

$$R(U,X)Y = R(U,X)(Y - \langle Y,X\rangle X) + \langle Y,X\rangle R(U,X)X.$$

Воспользовавшись снова R-замкнутостью векторов из Ψ, можно заключить, что первое слагаемое в последнем равенстве равно нулю, и его можно представить в следующем виде:

$$R(U,X)Y = \langle X,Y\rangle R(U,X)X.$$

Согласно построению подпространства Φ_α являются собственными подпространствами одновременно для всех операторов вида $R(\cdot,X)X$, где X — любой орт из Ψ. Этим доказывается и последнее включение из (2.4). Таким образом, импликация а) $\Rightarrow$ б) полностью доказана и тем самым установлена эквивалентность пунктов а)–в).

Пусть выполнены условия пункта в) и X, Y — произвольные векторы из подпространства Ψ. Так как оператор кривизны является самосопряженным оператором в пространстве бивекторов, то для доказательства импликации в) $\Rightarrow$ г) достаточно убедиться в том, что бивекторы $X\wedge Y$ и $X\wedge U_\alpha$ являются собственными для оператора кривизны и отвечают собственным значениям k и $\varkappa_\alpha$, соответственно. А это следует из формулы (2.5) и того, что векторы X, Y и U_α, как видно из вышеприведенных формул, являются собственными векторами симметрического тензора J и отвечают собственным значениям k и $\varkappa_\alpha$, соответственно. Импликация г) $\Rightarrow$ б) очевидна из спектральных свойств самосопряженного оператора ϱ, поэтому, учитывая предыдущие эквивалентности пунктов, лемма полностью доказана. ■

Эквивалентность пунктов а) и б) доказанной теоремы делает естественной следующую терминологию. Всякое подпространство Ψ, состоящее из R-замкнутых векторов, будет называться *направлением параллели*. Ортогональное дополнение Φ к направлению параллели будет называться *направлением меридиана*, а подпространства Φ_α из разложения (2.2) — *главными осями* направления меридиана. Величина k будет называться *кривизной направления параллели*, а числа $\varkappa_\alpha$ — *характеристическими кривизнами* в смешанных направлениях. Пусть в касательном пространстве T_xN риманова многообразия содержится направление параллели Ψ_x. Будем говорить, что направление параллели находится в *общем положении*, если в (2.3) все характеристические кривизны в смешанных направлениях отличны от кривизны направления параллели.

Теорема 2.2. *Всякое гладкое распределение Ψ, $\dim\Psi = m > 2$, составленное из направлений параллелей общего положения является касательным распределением ко вполне омбилическому слоению, каждый слой которого в индуцированной метрике — пространство постоянной кривизны. При этом вектор средней кривизны h каждого слоя в произвольной точке x можно вычислить по формуле*

$$h = -\sum_{\alpha=1}^{n-m} f_\alpha U_\alpha, \quad \text{где} \quad f_\alpha = \frac{U_\alpha k}{2(\varkappa_\alpha - k)}.$$

Здесь k — это функция кривизны направлений параллелей, U_α — единичные взаимно ортогональные векторы, принадлежащие главным осям направления меридиана в точке x, а $\varkappa_\alpha$ — характеристические кривизны в смешанных направлениях.

Доказательство. Воспользуемся доказательством теоремы 2 из [6]. Из первой части этого доказательства, которая не использует дополнительное условие (3) теоремы 2, следует, что распределение Ψ является вполне интегрируемым и его интегральные многобразия — вполне омбилические подмногообразия постоянной кривизны. Обозначим через h вектор средней кривизны для подмногообразия M. Поле векторв h является гладким векторным полем на многообразии N и формула для его вычисления в каждой точке следует из равенства (10) в [6]. ■

Слоение, касательное распределение которого состоит из направлений параллелей, будет называться *слоением параллелей*. Пусть h — поле векторов средней кривизны h для всех слоев слоения параллелей $\mathcal{M}$. Тогда h является гладким векторным полем на многообразии N и определена гладкая 1-форма $\omega(Q) = -\langle Q, h\rangle$, двойственная полю $-h$. Форма ω будет называться в дальнейшем формой *средней кривизны* для слоения параллелей.

3. Кривизна пространств с аксиомой гиперсфер

Внешнюю сферу будем называть *гиперсферой*, если она является гиперподмногообразием. Ограничимся рассмотрением аксиом (l,s)-сфер с максимальным s, т.е. когда в римановом пространстве N через всякое l-мерное подпространство касательного пространства проходит гиперсфера. Для краткости такую аксиому будем называть аксиомой *l-гиперсфер*. Аналогично тому, как в предложении 2 из [4], можно показать, что аксиомы гиперсфер являются с логической точки зрения наиболее сильными.

Лемма 3.1. *Нормаль к гиперсфере является R-замкнутым вектором.*

Доказательство. Пусть X, Y, Z — произвольные касательные к гиперсфере векторы, а ξ — нормальный вектор. Воспользуемся уравнением Кодацци

$$R(X,Y;Z,\xi) = \langle D_Y H, \xi \rangle \langle X, Z \rangle - \langle D_X H, \xi \rangle \langle Y, Z \rangle$$

для вполне омбилического подмногообразия с вектором средней кривизны H. Из приведенного уравнения и алгебраических свойств тензора кривизны следует, что $R(X,Y)\xi = 0$. ■

Лемма 3.2. *Подмногообразие, полученное пересечением вполне омбилических подмногообразий, является вполне омбилическим подмногообразием.*

Доказательство. Пусть W_t $(t = 1, 2)$ — это вполне омбилические подмногообразия, а $W = W_1 \cap W_2$ — их пересечение. Через ∇, ∇^t обозначим ковариантные производные для объемлющего риманова пространства и подмногообразий W_t, соответственно. Для произвольных касательных взаимно ортогональных векторов $X, Y \in TW$ из первой формулы Гаусса–Вейнгартена для каждого из подмногообразий W_t получаем следующие условия принадлежности:

$$\nabla_X Y = \nabla^1_X Y \in TW_1, \qquad \nabla_X Y = \nabla^2_X Y \in TW_2.$$

Рассматривая их совместно, приходим к заключению, что $\nabla_X Y \in TW$. Последнее означает, что вторая основная форма для W на взаимно ортогональных векторах обращается в нуль. Поэтому заключаем, что W является вполне омбилическим подмногообразием. ■

Лемма 3.3. *Пусть подпространство Ψ касательного пространства $T_x N$ риманова многообразия N^n является направлением параллели, и пусть существует такой набор вполне омбилических гиперподмногообразий $W_1, \dots,$ W_{n-m}, что нормали к ним образуют базис в подпространстве Ψ. Тогда справедливы равенства*

$$\nabla_{\Phi_\alpha} R(\Psi, \Psi)\Phi_\beta = 0 \ \ \forall \alpha, \beta : \alpha \neq \beta, \quad (3.1)$$

$$\nabla_{U_\alpha} R(X,Y)U_\alpha = 2(\varkappa_\alpha - k) X \wedge Y(H) \ \ \forall X, Y \in \Psi \forall U_\alpha \in \Phi_\alpha : \|U_\alpha\| = 1, \quad (3.2)$$

где Φ_α — главные оси направления меридиана, а H — некоторый вектор из подпространства Ψ.

Доказательство. Обозначим нормаль к гиперподмногообразию W_i через X_i. Если вектор средней кривизны H_i для гиперподмногообразия W_i отличен от нуля, то в качестве такой нормали всегда будет выбираться орт вектора средней кривизны $X_i = H_i/\|H_i\|$. Произвольный вектор $U_\alpha|_x \in \Phi_\alpha$ гладко продолжим до некоторого произвольного векторного поля U_α, касательного к пересечению гиперподмногообразий $W = W_1 \cap \cdots \cap W_m$. Так же построим и векторное поле U_β из произвольного вектора $U_\beta|_x$. Из вполне омбиличности каждого гиперподмногообразия W_i следует, что формула Гаусса–Вейнгартена принимает вид

$$(\nabla_{U_\alpha} X_i) = -\|H_i\| U_\alpha. \tag{3.3}$$

Поэтому, применяя эквивалентность пп. а) и в) теоремы 2.1 и лемму 3.2, проделаем следующие вычисления:

$$\begin{aligned}(\nabla_{U_\alpha} R)(X_i, X_j)U_\beta = \nabla_{U_\alpha}(R(X_i, X_j)U_\beta) - R(\nabla_{U_\alpha} X_i, X_j)U_\beta \\ -R(X_i, \nabla_{U_\alpha} X_j)U_\beta - R(X_i, X_j)\nabla_{U_\alpha} U_\beta = \|H_i\| R(U_\alpha, X_j)U_\beta \\ +\|H_j\| R(X_i, U_\alpha)U_\beta - \langle U_\alpha, U_\beta\rangle R(X_i, X_j)H.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь через H обозначен вектор средней кривизны вполне омбилического подмногообразия, полученного пересечением всех подмногообразий W_j ($j = 1, \ldots, n-m$). Вначале докажем равенство (3.1). Если $\beta \neq \alpha$, каждое слагаемое полученного в 3.4 выражения по теореме 2.1, п. в) равно нулю. И так как векторы X_i по условию образуют базис в пространстве Ψ, то теперь из алгебраических свойств тензора кривизны следует равенство (3.1) леммы.

Теперь докажем равенство (3.2). Снова воспользуемся полученным выше выражением 3.4 для ковариантной производной тензора кривизны. Если $\alpha = \beta$, то согласно теореме 2.1, п. в) $R(X_i, U_\alpha)U_\alpha = \varkappa_\alpha X_i$ и $R(X_i, X_j)H = 2kX_i \wedge X_j(H)$. Бивекторы вида $X_i \wedge X_j$ образуют базис в подпространстве $\Psi \wedge \Psi$. А так как согласно п. г) теоремы 2.1 подпространство $\Psi \wedge \Psi$ является собственным подпространством, принадлежащим собственному значению k, получаем и второе равенство леммы. ■

Пусть дано некоторое направление параллели. Будем говорить, что направление параллели *согласовано* с направлением меридиана, если для тензора кривизны выполняются равенство (3.1) и равенство (3.2), с некоторым вектором H из направления параллели. Следующая теорема характеризует кривизну римановых пространств с аксиомой гиперсфер почти так же, как теорема 1 из [6]. Отличие содержится в формуле (3.1). В [6] допускалось, чтобы $\alpha = \beta$. Вместо этого в формуле (3.2) имеется более слабое условие, которое при $H = 0$ совпадает с условием из [6].

Теорема 3.1. *Если риманово многообразие N удовлетворяет аксиоме l-гиперсфер, то в каждой точке x из N имеется направление параллели Ψ, согласованное с направлением меридиана, причем $\dim \Psi > l$.*

Доказательство. Подпространство Ψ, состоящее из R-замкнутых векторов, можно построить тем же методом, что и в доказательстве теоремы 1 из [6]. Из построения подпространства Ψ следует, что в подпространстве Ψ можно выбрать базис из нормалей к гиперсферам. Действительно, в качестве такого базиса можно выбрать максимальную линейно независимую подсистему в системе векторов $X_1, \ldots, X_{l+1},\ Z$ из [6]. И теперь согласованность направления параллели с направлением меридиана следует из леммы 3.3. ■

4. Распределения направлений параллелей

Целью этого раздела является характеризация метрики римановых многообразий, тензор кривизны которых удовлетворяет заключению теоремы 3.1 при некоторых естественных дополнительных предположениях.

Теорема 4.1. *Пусть на римановом многообразии N^n задано гладкое распределение Ψ ($\dim \Psi = m > 2$), которое составлено из направлений параллелей общего положения, согласованных с направлением меридиана. Тогда распределение меридианов является касательным распределением ко вполне омбилическому слоению.*

Доказательство. Пусть x — произвольная фиксированная точка из N. В T_xN выберем по единичному вектору U_α на каждой главной оси Φ_α ($\alpha = 1, \ldots, m$) направления меридиана Φ. В окрестности точки x гладко продолжим эти векторы до векторных полей распределения Φ. Полученные векторные поля будем обозначать также через U_α. В окрестности точки x выберем локально определенные произвольные единичные взаимно ортогональные векторные поля X и Y, принадлежащие распределению Ψ. Используя теорему 2.1, п. в), после вычислений в точке x получим такое выражение для ковариантной производной тензора кривизны:

$$\begin{aligned}
(\nabla_{U_\alpha} R)\,(X,Y)U_\beta &= -R(\nabla_{U_\alpha} X, Y)U_\beta - R(X, \nabla_{U_\alpha} Y)U_\beta \\
-R(X,Y)\nabla_{U_\alpha} U_\beta &= \varkappa_\beta \langle U_\beta, \nabla_{U_\alpha} X\rangle\, Y - \varkappa_\beta \langle U_\beta, \nabla_{U_\alpha} Y\rangle\, X \\
&\quad - k\,\langle \nabla_{U_\alpha} U_\beta, Y\rangle\, X + k\,\langle \nabla_{U_\alpha} U_\beta, X\rangle\, Y \\
&= (k - \varkappa_\beta)\left(\langle \nabla_{U_\alpha} U_\beta, X\rangle\, Y - \langle \nabla_{U_\alpha} U_\beta, Y\rangle\, X\right). \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

На основании равенства (3.1) выражение, полученное в (4.1), равно нулю в случае, когда $\alpha \neq \beta$. В силу линейной независимости векторов X и Y, а также в силу того, что по условию $k \neq \varkappa_\beta$, последнее равенство означает, что $\nabla_{U_\alpha} U_\beta \in \Phi$. А так как построенная система векторных полей U_α ($\alpha = 1, \ldots, n-m$) локально является системой образующих для модуля гладких векторных полей распределения Φ, то инволютивность распределения Φ

доказана. В силу теоремы Фробениуса это означает, что распределение направлений меридиана вполне интегрируемо.

Когда $\alpha = \beta$, из выражения (4.1) на основании равенства (3.2) следует, что в точке x выполняется равенство $\nabla_{U_\alpha} U_\alpha = H$ независимо от индекса α. С учетом полученного ранее это означает вполне омбиличность интегральных многообразий распределения Φ. ■

Если распределение направлений меридианов вполне интегрируемо, то соответствующее слоение будет называться слоением *меридианов*.

Следствие 4.1. *Поле векторов H является гладким векторным полем на многообразии N и служит полем векторов средней кривизны вдоль каждого слоя слоения меридианов.*

Будем называть вектор *горизонтальным (вертикальным)*, если он принадлежит направлению параллели (направлению меридиана, соответственно). Внешняя дифференциальная форма будет называться горизонтальной (вертикальной), если на вертикальных (соответственно, горизонтальных) векторах она обращается в нуль. Определим внешнюю дифференциальную 1-форму $\theta(Q) = \langle Q, H\rangle$ как двойственную векторному полю H. Форма θ будет называться формой *средней кривизны* для слоения меридианов. Очевидно, что форма θ является горизонтальной, а форма средней кривизны слоения параллелей ω, определенная в конце разд. 2, является вертикальной. Функция ψ будет называться *горизонтальной (вертикальной)*, если ее дифференциал $d\psi$ является горизонтальной (соответственно, вертикальной) 1-формой.

Пусть имеется пара взаимно дополнительных ортогональных слоений: слоение параллелей $\mathcal{M}$ ($\dim \mathcal{M} = m$) и слоение меридианов $\mathcal{F}$ ($\dim \mathcal{F} = n - m$). В этом случае в некоторой окрестности каждой точки существует система слоенных координат $(u^1, \ldots, u^{n-m}; x^1, \ldots x^m)$ таких, что фиксирование первых $n - m$ координат задает горизонтальный слой, а фиксирование последних m координат — вертикальный слой. Гладкое векторное поле X является слоенным горизонтальным, а гладкое векторное поле W — слоенным вертикальным, если они локально представлены следующими выражениями:

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad W = \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \tag{4.2}$$

Причем ξ^i зависят лишь от горизонтальных координат x^j, а η^α — лишь от вертикальных координат u^β.

Лемма 4.1. *В условиях теоремы 4.1 для любого горизонтального слоенного векторного поля X и любого вертикального слоенного поля W справедливы равенства*

$$\nabla_X W = \nabla_W X = \omega(W)X - \theta(X)W.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольные горизонтальные векторные поля X и Y и произвольные вертикальные векторные поля U и W. Применим теорему 2.2 и определение формы ω, введенной в конце разд. 2.

$$\langle \nabla_X W, Y\rangle = \omega(W)\langle X, Y\rangle.$$

Теперь воспользуемся результатом теоремы 4.1 и определением 1-формы θ. Подобно предыдущему получим равенство

$$\langle \nabla_W X, U\rangle = -\theta(X)\langle W, U\rangle.$$

Заключение леммы следует из равенства $[X,W]=0$ и взаимной ортогональности вертикального и горизонтального распределений. ■

Лемма 4.2. *В условиях теоремы 4.1 для форм средней кривизны ω и θ, слоения параллелей и слоения меридианов, выполняются следующие равенства:*

$$d\omega = \omega\wedge\theta, \qquad d\theta = \omega\wedge\theta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В некоторой точке x выберем произвольные вертикальные векторы U, W и произвольные горизонтальные векторы X, Y. Продолжим векторы U, W до слоенных вертикальных векторных полей, а векторы X, Y — до слоенных горизонтальных векторных полей. Используя лемму 4.1, вертикальность формы ω и горизонтальность формы θ, вычислим значение тензора кривизны в точке x:

$$\begin{aligned} R(U,W)X &= (U\omega(W) - W\omega(U) - \omega([U,W]))X + \omega(U)\theta(X)W \\ &\quad -\omega(W)\theta(X)U - U\theta(X)\cdot W + W\theta(X)\cdot U = 2d\omega(U,W)X \\ &\quad +2(\omega\wedge\theta(U,X) - d\theta(U,X))W - 2(\omega\wedge\theta(W,X) - d\theta(W,X))U. \end{aligned}$$

Полученное выражение согласно п. б) теоремы 2.1 равно нулю. Поэтому из вертикальности формы средней кривизны слоения параллелей ω получаем равенства

$$d\omega(U,W) = d\omega(X,Y) = 0, \quad d\theta(W,X) = \omega\wedge\theta(W,X). \tag{4.3}$$

Аналогичными вычислениями можно получить следующее равенство:

$$R(X,Y)U = -2d\theta(X,Y)U + 2(d\omega - \omega\wedge\theta)(X,U)Y - 2(d\omega - \omega\wedge\theta)(Y,U)X,$$

откуда на основании п. б) теоремы 2.1 и горизонтальности формы средней кривизны меридионального слоения θ получаем такие равенства:

$$d\theta(X,Y) = d\theta(U,W) = 0, \quad d\omega(X,U) = \omega\wedge\theta(X,U). \tag{4.4}$$

Теперь равенства леммы следуют из равенств (4.3) и равенств (4.4). ■

Лемма 4.3. *Пусть в условиях теоремы 4.1 функция кривизны направления параллелей является невырожденной. Тогда в некоторой окрестности каждой точки многообразия N существует невырожденная вертикальная функция u,а также горизонтальная функция ψ такие, что $\psi - u > 0$ и для 1-форм средней кривизны слоения параллелей и слоения меридианов выполняются следующие равенства*

$$\omega = \frac{du}{\psi - u}, \qquad \theta = \frac{d\psi}{\psi - u}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как по условию леммы функция кривизны невырожденна, то из теоремы 2.2 следует, что форма ω — невырожденная. Воспользуемся результатами леммы 4.2. Из теоремы Фробениуса для дифференциальных форм, применяемой к первому уравнению из условия леммы 4.2, следует, что в окрестности каждой точки многообразия существует невырожденная функция v такая, что справедливо представление: $\omega = pdv$, где p — некоторая функция в окрестности рассматриваемой точки.

Так как форма ω является вертикальной, то и функция v — также вертикальная функция. Невырожденную функцию v можно включить в качестве координатной функции $v = v^0$ в некоторую слоенную систему координат: $(v^0, v^1, \ldots, v^{n-m-1}; x^1, \ldots, x^m)$. Согласно лемме 4.2 внешний дифференциал от 1-формы ω является 2-формой смешанного типа, т.е. внешним произведением вертикальной и горизонтальной 1-форм. Поэтому в выражении

$$d\omega = dp \wedge dv = (\frac{\partial p}{\partial v^\beta} dv^\beta + \frac{\partial p}{\partial x^i} dx^i) \wedge dv^0$$

все частные производные функции p по v^β для β от 1 и до $n - m - 1$ равны нулю, т.е. функция р может зависеть лишь от координат v^0 и x^i $(i = 1, \ldots, m)$.

Ввиду невырожденности функции v и невырожденности формы ω, функция p не обращается в нуль. Используя лемму 4.2 и обозначая частные производные функции p по v и x^i через p_v и p_i, соответственно, составим следующие равенства:

$$\begin{aligned} d\omega = dp \wedge dv = p^{-1}(p_v dv + p_i dx^i) \wedge \omega &= p^{-1} p_i dx^i \wedge \omega, \\ (\theta + p^{-1} p_i dx^i) \wedge \omega &= 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

В последнем равенстве внешне перемножаются две 1-формы, одна из которых — горизонтальная, а вторая — вертикальная. Чтобы результатом была нулевая форма при условии невырожденности формы ω, необходимо равенство нулю горизонтальной формы. Таким образом, получено выражение для формы средней кривизны слоения меридианов $\theta = -p^{-1} p_i dx^i$. Используя полученное выражение, проделаем такие вычисления:

$$\begin{aligned} d\theta &= p^{-2}(p_v dv + p_j dx^j) \wedge p_i dx^i - p^{-1}(p_{iv} dv + p_{ij} dx^j) \wedge dx^i \\ &= p^{-1}(p^{-1} p_i p_v - p_{iv}) dv \wedge dx^i. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Здесь $p_{ij} = \partial^2 p/\partial x^i \partial x^j$ и $p_{vi} = \partial^2 p/\partial v \partial x^i$. Согласно лемме 4.2 имеет место равенство $d\omega = d\theta$. Приравнивая полученные в (4.5) и в (4.6) выражения, приходим к дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 p}{\partial v \partial x^i} = p \frac{\partial p}{\partial x^i} + p^{-1} \frac{\partial p}{\partial x^i} \frac{\partial p}{\partial v}.$$

Это уравнение можно преобразовать к виду $p\partial(1 - p^{-2}p_v)/\partial x^i + p_i(1 - p^{-2}p_v) = 0$. Полученное уравнение означает, что существует функция $\mu(v) \neq 0$, зависящая лишь от v, такая, что $(1 - p^{-2}p_v)p = -\mu_v/\mu$. Последнее уравнение преобразуем к виду: $\partial((v + p^{-1})\mu)/\partial v = v\partial\mu/\partial v$. Или

$$\frac{\partial p^{-1}\mu}{\partial v} = -\mu. \tag{4.7}$$

Обозначим первообразную функции $\mu(v)$ через $u(v)$. А так как по доказанному ранее функция p не зависит от координат $v^1, \dots, v^{n-m-1}$, то из уравнения (4.7) следует, что существует функция $\psi(x^1, \dots, x^m)$, зависящая лишь от горизонтальных координат, такая, что $p = u'_v/(\psi - u)$. Учитывая представление для формы средней кривизны слоения параллелей $\omega = pdv$, получаем первое равенство леммы. Из полученного ранее выражения для формы средней кривизны слоения меридианов $\theta = -p^{-1}p_i dx^i$ и выражения для p следует второе равенство леммы.

Меняя при необходимости знак функций ψ и u на противоположный, эти функции можно выбрать так, чтобы их разность $\psi - u$ была положительной функцией. Формы ω и θ при этом не изменятся. ■

Теорема 4.2. *Пусть на римановом многообразии* (N^n, g) *задано гладкое распределение* Ψ *(*$\dim\Psi = m > 2$*), составленное из направлений параллелей общего положения согласованных с направлениями меридианов, причем функция кривизны направлений параллелей является невырожденной. Тогда в некоторой окрестности каждой точки многообразия* N *существует невырожденная вертикальная функция* u*, а также горизонтальная функция* ψ*, такие что* $\psi - u > 0$*, и риманова метрика допускает следующее локально координатное представление:*

$$g = e^{2f}(g^F + g^M), \quad f = -\ln(\psi - u).$$

Здесь риманова метрика g^F *зависит лишь от вертикальных координат, риманова метрика* g^M *— лишь от горизонтальных координат и является* *метрикой постоянной кривизны, причем функция ψ, определенная на M, является лучевой.*

Доказательство. Условия доказываемой теоремы включают условия теорем 2.2 и 4.1, поэтому на многообразии N имеется пара взаимно ортогональных слоений: слоение параллелей $\mathcal{M} = \{M\}$ и слоение меридианов $\mathcal{F} = \{F\}$ ($\dim \mathcal{F} = n - m$). Воспользуемся результатами леммы 4.3. Функцию u из заключения леммы 4.3 в некоторой окрестности произвольной точки дополним до системы слоенных координат $(v^1, \ldots, v^{n-m}; x^1, \ldots, x^m)$: v^α — вертикальные координаты, изменяющиеся вдоль меридианов ($u = v^1$), а x^i — горизонтальные координаты, изменяющиеся вдоль параллелей. Риманова метрика многообразия N в указанных локальных координатах может быть представлена в виде

$$g = g_{\alpha\beta} dv^\alpha dv^\beta + g_{ij} dx^i dx^j. \tag{4.8}$$

Из леммы 4.1 следует, что для всех $\beta = 2, \ldots, n - m$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^\beta} = 2\omega(\frac{\partial}{\partial v^\beta}) g_{ij} = 0.$$

Следовательно, компоненты g_{ij} зависят лишь от $v^1 = u, x^1, \ldots x^m$. Применяя лемму 4.1 и лемму 4.3, вычислим следующее выражение:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u} = \frac{2 g_{ij}}{\psi - u}\,.$$

Рассматривая в последнем уравнении горизонтальные координаты как параметры, получим обыкновенное однородное линейное дифференциальное уравнение. В его решении $g_{ij} = (\psi - u)^{-2} g^M_{ij}(x^1, \ldots, x^m)$ функции g^M_{ij} от u не зависят. Аналогичные вычисления с использованием лемм 4.1 и 4.3 приводят к следующему:

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} = -2\theta(\frac{\partial}{\partial x^i}) g_{\alpha\beta} = -\frac{g_{\alpha\beta}}{\psi - u}\frac{\partial \psi}{\partial x^i}\,.$$

Сравнивая крайние части равенства, получим, что

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \ln(|g_{\alpha\beta}|(\psi - u)^2) = 0,$$

т.е. функции $g_{\alpha\beta}(\psi - u)^2$ зависят лишь от вертикальных координат. Обозначим функцию $f = -\ln(\psi - u)$, тогда риманова метрика g имеет следующее локально координатное представление:

$$g = e^{2f} g^0, \quad \text{где} \qquad g^0 = g^F_{\alpha\beta} dv^\alpha dv^\beta + g^M_{ij} dx^i dx^j.$$

Причем величины $g^F_{\alpha\beta}$ зависят лишь от координат $v^1, \dots, v^{n-m}$, а величины g^M_{ij} — лишь от координат $x^1, \dots x^m$. Таким образом, риманова метрика g многообразия N локально получена конформной деформацией прямого произведения некоторых римановых многообразий F, g^F и M, g^M.

Далее будет показано, что g^M — это риманова метрика постоянной кривизны. Из леммы 4.3 и определения форм средней кривизны для слоения параллелей и меридианов следует справедливость следующих формул для показателя конформной деформации f:

$$df = \omega - \theta, \quad \mathrm{gr}\, f = -h - H. \tag{4.9}$$

Здесь векторные поля h и H — это, как и прежде, поля векторов средней кривизны слоения параллелей и слоения меридианов, соответственно. Следует отметить, что векторные поля, ортогональные относительно метрики g, будут ортогональными и относительно метрики g^0, и наоборот. Пусть X и Y — произвольные горизонтальные взаимно ортогональные и слоенные векторные поля, а U — произвольное вертикальное слоенное векторное поле. Будем обозначать ковариантную производную относительно метрики g^0 через ∇^0. Воспользуемся формулой (a), п. 1.159 из [10] для конформной деформации метрики, которая с учетом первой формулы в (4.9) примет следующий вид:

$$\nabla_X Y = \nabla^0_X Y - \theta(X)Y - \theta(Y)X. \tag{4.10}$$

Так как метрика g^0 является метрикой прямого произведения, то векторное поле $\nabla^0_X Y$ также является горизонтальным и слоенным. Используя формулу (4.10) и лемму 4.1, произведем следующие вычисления:

$$\begin{aligned}
\nabla_U \nabla_X Y &= \omega(U)\nabla^0_X Y - (U\theta(Y) + \theta(Y)\omega(U))X - (U\theta(X) \\
&\quad + \theta(X)\omega(U))Y - (\theta(\nabla^0_X Y) - 2\theta(X)\theta(Y))U, \\
\nabla_X \nabla_U Y &= \omega(U)\nabla^0_X Y + (X\omega(U) - \omega(U)\theta(X))Y - 2\omega(U)\theta(Y)X \\
&\quad - (X\theta(Y) - \theta(X)\theta(Y))U.
\end{aligned}$$

Вектор Y, как всякий вектор, принадлежащий направлению параллели, является замкнутым относительно тензора кривизны, поэтому $R(U,X)Y = 0$. В частности, и вертикальная составляющая $R(U,X)Y = \nabla_U \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_U Y$ также равна нулю, т.е.

$$\theta(\nabla^0_X Y) - X\theta(Y) - \theta(X)\theta(Y) = 0.$$

Применяя формулу (4.10), последнее равенство можно преобразовать к виду $\theta(\nabla_X Y) - X\theta(Y) + \theta(X)\theta(Y) = 0$, а используя метричность связности

Леви–Чивита и определение формы средней кривизны слоения меридианов, полученную формулу можно преобразовать к такому виду:

$$g(\nabla_X H, Y) = \theta(X)\theta(Y). \tag{4.11}$$

Так как локально определенная риманова метрика $g^0 = \exp(-2f)g$ получена из метрики g обратной конформной деформацией, то для любых слоенных взаимно ортогональных векторных полей X, Y и Z формула (b), п. 1.159 из [10] примет следующий вид:

$$R^0(X, Y; Z, Y) = e^{-2f}(R(X, Y; Z, Y) - g(Y, Y)(\operatorname{hes} f(X, Z) + \theta(X)\theta(Z)).$$

Тензор римановой кривизны метрики g^0 обозначим через $R^0(X, Y; Z, Y) = g^0(R(X, Y)Y, Z)$. Над гессианом $\operatorname{hes} f(X, Z)$ функции f относительно римановой метрики g проделаем следующие преобразования: $\operatorname{hes} f(X, Z) = g(\nabla_X \operatorname{gr} f, Z) = -g(\nabla_X h, Z) - g(\nabla_X H, Z) = -\theta(X)\theta(Z)$. Последнее равенство получено на основании формулы (4.11) и того, что по теореме 2.2 слоение параллелей является вполне омбилическим слоением. Следовательно, справедливо равенство $R^0(X, Y; Z, Y) = e^{-2f}(R(X, Y; Z, Y)$. Метрика g^0 является прямым произведением метрик g^F и g^M, поэтому $R^0(X, Y; Z, Y) = R^M(X, Y; Z, Y)$, где через R^M обозначен тензор римановой кривизны метрики g^M. А так как согласно теореме 2.2 каждая параллель является пространством постоянной кривизны, то правая часть последнего равенства есть нуль. Равенство $R^M(X, Y; Z, Y) = 0$ справедливо для любых взаимно ортогональных векторов X, Y и Z, поэтому, например, из леммы, приведенной в [3], следует, что метрика g^M является метрикой постоянной кривизны.

Осталось показать, что гессиан функции ψ относительно метрики g^M пропорционален метрическому тензору g^M. Из определения векторного поля H и леммы 4.3 следует, что $H = \operatorname{gr}\psi/(\psi - u) = \exp(-f)\operatorname{gr}^M \psi$. Для произвольных горизонтальных слоенных векторных полей X и Y воспользуемся следующими формулами:

$$\begin{aligned}
\nabla_X H &= -df(X)H + e^{-f}\nabla_X \operatorname{gr}^M \psi,\\
\nabla_X \operatorname{gr}^M \psi &= \nabla_X^M \operatorname{gr}^M \psi - \theta(X)\operatorname{gr}^M \psi - e^f\|\operatorname{gr}^M \psi\|X - d\psi(X)\operatorname{gr}^M f,\\
g(\nabla_X H, Y) &= \theta(X)\theta(Y) + e^f \operatorname{hes}^M \psi(X, Y) - e^{2f} g^M(X, Y)\|\operatorname{gr}^M \psi\|.
\end{aligned}$$

Если теперь рассмотреть произвольную пару взаимно ортогональных горизонтальных векторов X и Y, выбранных в одной точке, и продолжить их до горизонтальных слоенных ортогональных векторных полей, то из последнего равенства и формулы (4.11) следует, что $\operatorname{hes}^M \psi(X, Y) = 0$. Ввиду симметричности гессиана последнее равенство означает, что существует такая функция λ на M, что $\operatorname{hes}^M \psi(X, Y) = \lambda g^M(X, Y)$. ■

Как показано в разд. 1, всякая метрика из заключения теоремы 4.2 действительно удовлетворяет аксиоме l-гиперсфер с $l < m$.

Теорема 4.3. *Пусть на римановом многообразии $(N^n,\ g)$ задано m-мерное распределение, $m > 2$, направлений параллелей общего положения, согласованных с направлениями меридианов, причем функция кривизны направлений параллелей является постоянной и равной c. Тогда локально N является скрещенным произведением $g = r^2 g^F + g^M$ m-мерной пространственной формы $(M,\ g^M)$ кривизны, равной c, на некоторое риманово многообразие $(F,\ g^F)$, при этом скрещивающая функция r является лучевой функцией на пространственной форме M.*

Доказательство. Из теоремы 2.2 и теоремы 4.1 следует что распределения направлений параллелей и меридианов вполне интегрируемы. Поэтому в окрестности произвольной точки p риманова метрика многообразия N допускает такое же локально координатное представление, как и в формуле (4.8) при доказательстве теоремы 4.2. Однако теперь вертикальные координаты $v^1, \ldots, v^{n-m}$ — это произвольные слоенные координаты. Так как по условию теоремы кривизна распределения направлений параллелей — постоянная, то форма средней кривизны ω слоения параллелей тождественно равна нулю. Поэтому из леммы 4.2 следует, что форма средней кривизны θ слоения меридианов является замкнутой, и по лемме Пуанкаре локально определена такая функция σ, что $\theta = -d\sigma$. Так как форма θ по определению является горизонтальной формой, то функция $\sigma = \sigma(x^1, \ldots, x^m)$ зависит лишь от горизонтальных координат. Кроме того, из равенства $\omega = 0$ на основании леммы 4.1 для любой пары векторных полей: слоенного горизонтального поля X и слоенного вертикального поля U, справедлива формула

$$\nabla_X U = \nabla_U X = d\sigma(X)U. \tag{4.12}$$

Из формулы (4.12) следует, что $\partial g_{ij}/\partial v^\beta = 0$ для всех $\beta = 1, \ldots, n-m$, т.е. метрические коэффициенты g_{ij} зависят лишь от горизонтальных координат. Снова применяя формулу (4.12), получим такие равенства:

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} = -2\theta(\frac{\partial}{\partial x^i})g_{\alpha\beta} = 2\frac{\partial\sigma}{\partial x^i}g_{\alpha\beta}.$$

Отсюда следует, что $g_{\alpha\beta} = e^{2\sigma}g^F_{\alpha\beta}$, где функции $g^F_{\alpha\beta}$ уже зависят лишь от вертикальных координат $v^1, \ldots, v^{n-m}$. Обозначая через F след меридиана в рассматриваемой окрестности, проходящего через точку p, можно рассматривать F как риманово многообразие с метрикой $g^F = g_{\alpha\beta}dv^\alpha dv^\beta$. Через M обозначим след параллели в рассматриваемой окрестности, тоже проходящей через точку p. Будем рассматривать M как риманово многообразие относительно индуцированной метрики g^M. Запишем выражение $g = e^{2\sigma}g^F + g^M$ для римановой метрики многообразия N в окрестности точки p. Таким образом, показано, что N локально является скрещенным произведением [10, п. 9.11].

Как известно из теоремы 2.2, параллель M в индуцированной метрике является пространственной формой. Так как вектор средней кривизны параллели h является двойственным к форме ω, то из формулы $k_M = k + \|h\|^2$ следует, что кривизна k_M риманова многообразия M совпадает с кривизной направления параллели, которая по условию постоянна на N. Остается показать, что функция $r = \exp(\sigma)$ является лучевой. Из формул О'Нейла–Грея для тензора кривизны, приведенных, например, в [10, п. 9.28], в случае рассматриваемого скрещенного произведения следует, что для любых горизонтальных векторов X, Y и любого вертикального вектора U справедливо равенство $R(X,U)Y = \operatorname{hes} r(X,Y)\cdot U/r$, где $\operatorname{hes} r$ — это гессиан функции r на римановом многообразии $(M,\ g^M)$. Но каждый горизонтальный вектор является R-замкнутым, и поэтому в случае произвольных взаимно ортогональных векторов X и Y выполняется равенство $\operatorname{hes} r(X,Y) = 0$. Следовательно, гессиан функции r пропорционален римановой метрике g^M. ■

Следствие 4.2. *В условиях теоремы 4.3 слоение параллелей является вполне геодезическим слоением.*

5. Метрика многообразия с аксиомой гиперсфер

В этом разделе представлено описание римановой метрики, удовлетворяющей аксиоме гиперсфер без дополнительного предположения о гладкости распределения направлений параллелей. Имея в виду цель полного описания метрики, удовлетворяющей аксиоме гиперсфер, исследуем строение лучевой функции, которая задана на пространственной форме.

Лемма 5.1. *Если ψ — это невырожденная лучевая функция на римановом многообразии M, то слоение, порожденное поверхностями уровня $\psi = \mathrm{const}$, является римановым и каждый слой является внешней сферой.*

Доказательство. Риманову метрику многообразия M будем обозначать через $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Из определения 1.2 лучевой функции следует, что $\langle\nabla_{\operatorname{gr}\psi}\operatorname{gr}\psi, A\rangle = 0$ для любых векторов A, ортогональных градиентному векторному полю $\operatorname{gr}\psi$. Следовательно, поток $\mathcal{F}$, порожденный полем $\operatorname{gr}\psi$, является геодезическим. Слоение $\mathcal{P}$, составленное из поверхностей уровня $\psi = \mathrm{const}$, является ортогональным слоением к потоку $\mathcal{F}$. Поэтому из двойственности между вполне геодезическими и римановыми слоениями следует, что $\mathcal{P}$ — это риманово слоение. Пусть α — вторая основная форма некоторого слоя $\psi = \mathrm{const}$, и пусть A, B — произвольные векторы, касательные к этому слою. Из определения лучевой функции следует, что $\langle \alpha(A,B), \mathrm{gr}\,\psi \rangle = -\lambda \langle A, B\rangle$, а также, что риманово слоение $\mathcal{P}$ является вполне омбилическим и вектор средней кривизны слоев $\widetilde{H}$ может быть представлен следующим образом:

$$\widetilde{H} = -\lambda \frac{\mathrm{gr}\,\psi}{\|\mathrm{gr}\,\psi\|^2}. \tag{5.1}$$

Теперь покажем, что каждый слой $\psi = \mathrm{const}$ является внешней сферой. Через m будем обозначать размерность многообразия M. Так как слоение $\mathcal{P}$ является римановым, то локально его слои — эквидистантные между собой подмногообразия. В окрестности произвольной точки $p \in M$ можно выбрать слоенную систему координат $(s; y^1, \ldots, y^{m-1})$ так, чтобы слоение $\mathcal{P}$ локально определялось поверхностями уровня $s = \mathrm{const}$, а геодезический поток $\mathcal{F}$ определялся системой $y^1 = \mathrm{const}, \ldots, y^{m-1} = \mathrm{const}$; причем в качестве координаты s выберем функцию расстояния до слоя $\psi = \mathrm{const}$, проходящего через точку p. Длину дуги s геодезической всегда можно выбрать отсчитываемой таким образом, чтобы направление ее увеличения соответствовало направлению вектора градиента $\mathrm{gr}\,\psi$. Рассматриваемая система координат — это полугеодезическая система координат, где в качестве опорного гиперподмногообразия используется некоторый слой слоения $\mathcal{P}$. Так как функция ψ зависит лишь от s, то $\mathrm{gr}\,\psi = \dot\psi \partial/\partial s$ (точкой обозначена обыкновенная производная по s) и

$$\lambda = \langle \nabla_S \,\mathrm{gr}\,\psi, S\rangle = \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}, \text{ где } \quad S = \frac{\partial}{\partial s}.$$

Функция λ тоже зависит лишь от s. Учитывая полученную формулу (5.1), для любого вектора Z, касательного к слою $\psi = \mathrm{const}$, можно вычислить, что $\langle \nabla_Z \widetilde{H}, \mathrm{gr}\,\psi\rangle = -Z\lambda = 0$. Таким образом, поле векторов средней кривизны каждого слоя слоения $\mathcal{P}$ является параллельным в нормальной связности. ■

Следствие 5.1. *В полугеодезической системе координат из доказательства леммы 5.1 коэффициент лучевой функции ψ может быть вычислен так: $\lambda = \partial^2\psi/\partial s^2$.*

Теорема 5.1. *Если на римановом многообразии $(M^m,\ g)$ задана невырожденная лучевая функция ψ, то в окрестности любой своей точки M локально является скрещенным произведением прямой на некоторое риманово многообразие $(P^{m-1},\ g^P)$ и $g = ds^2 + \dot\psi^2 g^P$, причем лучевая функция зависит лишь от s.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В окрестности произвольной точки p многообразия M рассмотрим полугеодезическую систему координат из доказательства леммы 5.1. Так как для любой функции, не обязательно лучевой, на произвольном римановом многообразии выполняется формула

$$L_{\operatorname{gr}\psi}g = 2\operatorname{hes}\psi, \tag{5.2}$$

то на основании следствия 5.1 можно заключить, что имеет место равенство

$$\dot{\psi}\frac{\partial g_{ij}}{\partial s} = 2\ddot{\psi}g_{ij}. \tag{5.3}$$

В формуле (5.3) точкой обозначается обыкновенная производная по s, а $g_{ij} = g(\partial/\partial y^i, \partial/\partial y^j)$. Из формулы (5.3) следует, что $g_{ij} = \dot{\psi}^2\gamma_{ij}$, где величины γ_{ij} уже зависят лишь от координат $y^1, \dots, y^{m-1}$. Величины γ_{ij} можно рассматривать как метрические коэффициенты в системе координат y^i некоторой римановой метрики g^P слоя P слоения $\mathcal{P}$, проходящего через точку p, а метрика g оказывается локально эквивалентной скрещенному произведению прямой на многообразие P, g^P. ■

Теорема 5.2. *Если на пространственной форме* $(M^m,\ g)$ *кривизны* $k_M = c$ *задана невырожденная лучевая функция* ψ *с коэффициентом* λ*, то в окрестности произвольной точки* p *риманов метрический тензор допускает следующее локально координатное представление:*

$$g = \frac{d\psi^2}{\varphi^2} + \varphi^2 dl_a^2(y^1, \dots, y^{m-1}),$$

где dl_a^2 *— риманова метрика постоянной кривизны, равной* $a = \lambda_0^2 + cG_0^2$, $\lambda_0 = \lambda|_p$ *и* $G_0 = \|\operatorname{gr}\psi|_p\|$*. А функция* φ *допускает следующее представление:* $\varphi^2 = G_0^2 + 2\lambda_0(\psi - \psi_0) - c(\psi - \psi_0)^2$*, где* $\psi_0 = \psi|_p$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 5.1 метрика g локально является скрещенным произведением. Как известно (напр., [10, пп. 9.29 и 9.104–9.105]), в случае рассматриваемого скрещенного произведения формулы О'Нейла–Грея для секционной кривизны принимают следующий вид:

$$k(S,Y) = -\frac{1}{\varphi}g(\nabla_S \operatorname{gr}\varphi, S), \quad k(X,Y) = \frac{1}{\varphi^2}(k^P(X,Y) - \|\operatorname{gr}\varphi\|^2).$$

Здесь $\varphi = \dot{\psi}$, через X и Y обозначены базисные векторные поля относительно локальной субмерсии на слой P, а $S = \partial/\partial s$, как и прежде. Так как по условию $k(S,Y) = c$, то первая из приведенных формул О'Нейла–Грея может быть записана в виде $\ddot{\varphi} = c\varphi$. Далее в зависимости от знака c надо рассмотреть три случая.

1-й случай: $c > 0$. Так как на основании следствия 5.1 $\dot{\varphi} = \lambda$, то в этом случае решение дифференциального уравнения будет иметь следующий вид: $\varphi = G_0 \cos(s\sqrt{c}) + \lambda_0 \sin(s\sqrt{c})/\sqrt{c}$. Интегрируя полученное выражение для φ, получим $\psi = (\sqrt{c}G_0 \sin(s\sqrt{c}) - \lambda_0 \cos(s\sqrt{c}))/c + \lambda_0/c + \psi_0$. Используя последние два выражения, можно вычислить $\varphi^2 = G_0^2 + \lambda_0^2/c - c(\psi - \psi_0 - \lambda_0/c)^2$. Так как слой P согласно лемме 5.1 является внешней сферой, то индуцированная на нем риманова метрика g^P из теоремы 5.1 — это метрика постоянной кривизны. Обозначим эту постоянную секционной кривизны через a. Из второй формулы О'Нейла–Грея для секционной кривизны можно вычислить $a = c\varphi^2 + \dot{\varphi}^2 = cG_0^2 + \lambda_0^2$. Так как $ds = d\psi/\varphi$, то в случае $c > 0$ теорема полностью доказана.

2-й случай: $c < 0$. В этом случае решение дифференциального уравнения для функции φ будет иметь следующий вид: $\varphi = G_0 \operatorname{ch}(s\sqrt{-c}) + \lambda_0 \operatorname{sh}(s\sqrt{-c})/\sqrt{-c}$. После вычислений, аналогичных вычислениям в случае 1, получим выражение для φ^2 и кривизны a такого же вида. Таким образом, и в случае $c < 0$ теорема доказана.

3-й случай: $c = 0$. В данном случае решение дифференциального уравнения для φ дает $\varphi = G_0 + \lambda_0 s$, откуда $\psi = \psi_0 + G_0 s + \lambda_0 s^2/2$, и после очевидных преобразований можно получить выражение $\varphi^2 = G_0^2 + 2\lambda_0(\psi - \psi_0)$. Выражение же для вычисления кривизны слоя P принимает вид $a = \dot{\varphi}^2 = \lambda_0^2$. Полученные выражения для φ^2 и a совпадают с приведенными в формулировке теоремы, если учесть, что $c = 0$. ■

Замечание. Непосредственным вычислением легко проверить, что величина a равняется четверти дискриминанта квадратного трехчлена φ^2, если, конечно, $c \neq 0$.

Подобно определению 2 из [5] можно рассмотреть следующее понятие.

Определение 5.1. *Будем говорить, что риманово многообразие M, удовлетворяющее аксиоме l-гиперсфер, имеет общую структуру кривизны, если в каждой точке направление параллели находится в общем положении.*

Лемма 5.2. *Пусть многообразие N^n $(n \geq 4)$, удовлетворяющее аксиоме l-гиперсфер с $l \geq n/2$, имеет общую структуру кривизны, тогда направления параллелей Ψ образуют гладкое распределение на N.*

Доказательство. По теореме 3.1 в каждой точке многообразия N имеется направление параллели достаточно большой размерности, $\dim \Psi > l$. Доказательство леммы 2, приведенной в [5, с. 364], использует лишь выполнение этого условия и поэтому может быть полностью перенесено для рассматриваемого случая. ■

Теорема 5.3. *Если риманово многообразие $(N^n,\ g)$, $n > 3$, удовлетворяющее аксиоме l-гиперсфер с $l \geq n/2$, имеет общую структуру кривизны, то найдется открытое всюду плотное подмножество в N, на котором риманова метрика g имеет локальное представление по крайней мере одного из следующих видов:*

$$\text{а)}\quad g = (\psi - u)^{-2}\Big(ds^2 + \frac{d\psi^2}{\varphi^2} + \varphi^2 dl_a^2(y^2, \dots, y^m\Big),$$

$$\text{б)}\quad g = \psi^2 ds^2 + \frac{d\psi^2}{\varphi^2} + \varphi^2 dl_a^2(y^2, \dots, y^m),$$

$$\text{в)}\quad g = ds^2 + u^2 dl_a^2(y^1, \dots, y^m).$$

Здесь $m > l$, $ds^2(v^1, \dots, v^{n-m})$ — некоторый метрический тензор, а $u(v^1, \dots, v^{n-m})$ — некоторая функция, невырожденная в пункте а). Функция φ^2 — это некоторый квадратный трехчлен от координаты ψ, а через dl_a^2 обозначена риманова метрика постоянной кривизны a.

Доказательство. На основании леммы направления параллели Ψ образуют гладкое распределение. Пусть $m = \dim \Psi$. Из теоремы 3.1 следует, что $m > l$. Пусть O_1 — это открытое множество многообразия N, на котором форма ω средней кривизны направления параллелей отлична от нуля. Отличие от нуля формы ω эквивалентно невырожденности функции кривизны направления параллели. Рассмотрим открытое множество O_{11}, на котором помимо формы ω также и форма θ средней кривизны направления меридиана не обращается в нуль. Применяя теоремы 4.2 и 5.2, приходим к заключению, что на множестве O риманова метрика g имеет локально координатное представление п. а).

Рассмотрим множество $O_{10} = \mathrm{Int}(O_1 \setminus O_{11})$. На открытом множестве O_{10} применима теорема 4.2, причем из равенства нулю формы θ следует, что в выражении для локального представления метрики g многообразия N из заключения теоремы 4.2 $\psi = \mathrm{const}$. Поэтому на множестве O_{10} метрика g локально представлена в виде п. в).

Рассмотрим теперь $O_0 = \mathrm{Int}\,\complement O_1$, внутренность дополнения к множеству O_1. На этом открытом многообразии применима теорема 4.3. Рассмотрим подмножество O_{01} множества O_0, состоящее из точек, где форма θ невырожденна. На этом множестве лучевая функция r из заключения теоремы 4.3 невырожденна. Поэтому на основании теоремы 5.2 метрика на O_{01} допускает локальное представление, как в п. б). На множестве $O_{00} = \mathrm{Int}(O_0 \setminus O_{01})$ лучевая функция — функция r из заключения теоремы 4.3, локально постоянная. Поэтому риманова метрика g, являясь локально прямым произведением метрики $ds^2(v^1, \dots, v^{n-m})$ на метрику постоянной кривизны $dl_a^2(y^1, \dots, y^m)$, допускает представление из пункта в) с $u \equiv 1$. ■

Список литературы

[1] *D. Van Lindt and L. Verstraelen*, A survey on axioms of submanifolds in Riemannian and Kaehlerian geometry. — *Colloq. math.* (1987), v. 54, No. 2, p. 193–213.

[2] *B.Y. Chen*, Riemannian Submanifolds. (Handbook of Differential Geometry. Vol. I, Ch. 3). Elsevier Science B.V. (2000).

[3] *D.S. Leung and K. Nomizu*, The axiom of spheres in Riemannian geometry. — *J. Diff. Geometry* (1971), v. 5, p. 487–489.

[4] *С.И. Окрут*, Обобщенная аксиома плоскостей. — Докл. РАН (1998), v. 360, № 4, с. 454–456.

[5] *С.И. Окрут*, Эйлерова характеристика многообразий с аксиомой гиперплоскостей. — *Мат. физика, анализ, геометрия* (1996), т. 3, № 3/4, с. 356–369.

[6] *С.И. Окрут*, Структура кривизны риманова многообразия с аксиомой гиперплоскостей. — *Мат. физика, анализ, геометрия* (1994), т. 1, № 2, с. 227–231.

[7] *С.И. Окрут*, Римановы многообразия с обобщенной аксиомой плоскостей. — *Укр. геометр. сб.* (1992), вып. 35, с. 103–110.

[8] *Ш. Кобаяси, К. Номидзу*, Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. Наука, Москва (1981).

[9] *Ш. Кобаяси, К. Номидзу*, Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. Наука, Москва (1981).

[10] *А. Бессе*, Многообразия Эйнштейна. Мир, Москва (1990).

[11] *B.Y. Chen*, Geometry of submanifolds and its applications. Sci. Univ. Tokio, Tokio (1981).

The Riemannian manifolds with an axiom of hyperspheres

S.I. Okrut

The generalization of an axiom of spheres is proposed. It is shown, that the set of the Riemannian spaces satisfying to a proposed axiom, is wider set of spaces satisfying to a generalized axiom of planes. It is found structure of a tensor of a curvature of manifolds with a generalized axiom of spheres. It is found also structure of the Riemannian metric of manifolds, satisfying to generalized axiom of spheres at some natural additional conditions. It is given expression of the Riemannian metric of space with an axiom of l-hyperspheres without the additional conditions at rather large l.

Рiмановi многовиди з аксiомою гiперсфер

С.I. Окрут

Пропонується узагальнення аксiоми сфер. Показано, що сiм'я рiманових просторiв, якi задовольняють запропонованiй аксiомi, ширше сiм'ї просторiв, що задовольняють узагальненiй аксiомi площин. Знайдено будову тензора кривини многовиду iз узагальненою аксiомою сфер. Також знайдено будову рiманової метрики многовидiв, якi задовольняють узагальненiй аксiомi сфер при деяких природних додаткових умовах. Дано опис рiманової метрики простору з аксiомою l-гiперсфер без додаткових припущень при достатньо великому l.