Математическая физика, анализ, геометрия
2002, т. 9, № 1, с. 3–17

Возмущения нормировочных матриц обратной задачи рассеяния

Е.И. Бондаренко

Харьковская государственная академия железнодорожного транспорта
пл. Фейербаха, 7, Харьков, 61050, Украина
E-mail:obondarenko@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 13 августа 2001 г.
Представлена Е.Я. Хрусловым

Работа посвящена вопросу о допустимых возмущениях нормировочных матриц задачи рассеяния на полуоси для системы дифференциальных уравнений, рассмотренной в самосопряженном случае в известной книге З.С. Аграновича и В.А. Марченко. В матричном случае проверка необходимых и достаточных условий на данные рассеяния значительно сложнее, чем в скалярном. В работе как для самосопряженного, так и для несамосопряженного случая устанавливаются теоремы, облегчающие выяснение принадлежности к данным рассеяния заданных наборов величин и обобщающие некоторые из результатов работы Ф.С. Рофе-Бекетова и автора.·

Робота присвячена питанню про припустимі збурення нормувальних матриць задачі розсіяння на півосі для системи диференціальних рівнянь, яку розглянуто в самоспряженому випадку у відомій книзі З.С. Аграновича та В.О. Марченко. В матричному випадку перевірка необхідних і достатніх умов на дані розсіяння значно складніше, ніж у скалярному. В роботі як для самоспряженого, так і для несамоспряженого випадку встановлюються теореми, що полегшують з'ясування належності до даних розсіяння наборів величин й узагальнюють деякі з результатів роботи Ф.С. Рофе-Бекетова та автора.

Введение

Вопрос о допустимых возмущениях нормировочных матриц, не выводящих за пределы данных рассеяния (ДР) для задач представляемых классов, рассмотрен в данной работе. Мы усиливаем и обобщаем некоторые из результатов [2] на эту тему, а также обсуждаем задачу рассеяния на полуоси

· Mathematics Subject Classification 2000: 47A40, 81U40.

с неэрмитовым, вообще говоря, матричным $n \times n$ потенциалом, который имеет первый момент (см. [2]):

$$-Y''(x,k) + V(x)Y(x,k) = k^2 Y(x,k),\ 0 < x < \infty,\ Y(0,k) = 0, \tag{1}$$

$$\int_0^\infty x\,\|V(x)\|\,dx < \infty. \tag{2}$$

Потенциал будем предполагать принадлежащим классу квазиэрмитовых потенциалов, введенному в [2].

Матричные решения $E(x,k)$, $\tilde{E}(x,k)$ уравнений (1) или, соответственно, $-Z''(x,k) + Z(x,k)V(x) = k^2 Z(x,k)$, $0 < x < \infty$, обладающие при $x \to \infty$ асимптотикой вида $e^{ikx}I$ ($\mathrm{Im}k \geq 0$, I — единичная матрица), называем решением или тильда-решением Йоста, $E(k) = E(0,k)$, $\tilde{E}(k) = \tilde{E}(0,k)$ — матрица, соответственно, тильда-матрица-функция Йоста. В матричном случае фазово-эквивалентными (ФЭ) потенциалами и задачами называем такие, которым отвечают одновременно одинаковые матрицы и одинаковые тильда–матрицы Йоста. Потенциал или задачу, ФЭ каким-нибудь эрмитовым потенциалу или задаче, называем *квазиэрмитовыми.* Фазово-полуэквивалентными (ФПЭ) либо фазово-тильда-полуэквивалентными (ФТПЭ) назовем такие потенциалы и задачи, которым отвечают одинаковые матрицы Йоста либо одинаковые тильда-матрицы Йоста. Потенциалы, ФПЭ либо ФТПЭ какимнибудь эрмитовым потенциалам, а также соответствующие им задачи, называем *полуэрмитовыми.* Приведем необходимые для дальнейшего рассмотрения результаты из [2]. Полюса $E^{-1}(k)$, $\tilde{E}^{-1}(k)$ для полуэрмитовых и тем более квазиэрмитовых задач могут быть только простыми, а собственные числа — $k_j^2 < 0$, $j = \overline{1,p}$. В отличие от [1] называем нормировочными матрицами задачи (1), (2) матрицы Z_j, которые в случае эрмитова потенциала равны M_j^2, где M_j — нормировочные матрицы в смысле [1].

Теорема 1 [2]. *Пусть* $\left\{S(k);\ k_j^2,\ Z_j\right\}$, $\left\{S(k);\ k_j^2,\ Z_j'\right\}$, $j = \overline{1,p}$ *— ДР полуэрмитовых задач. Чтобы эти задачи были между собой ФПЭ (либо ФТПЭ), необходимо и достаточно выполнение равенств:* $Ran\ Z_j = Ran\ Z_j'$, $j = \overline{1,p}$ *(соответственно,* $Ker\ Z_j = Ker\ Z_j'$*). Эти же равенства необходимы и достаточны для того, чтобы квазиэрмитовы задачи были ФЭ между собой.*

Теорема 3 [2]. *Для того чтобы величины* $\left\{S(k);\ k_j^2,\ Z_j\right\}$, $j = \overline{1,p}$, *были ДР квазиэрмитовой задачи вида (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы они являлись ДР полуэрмитовой задачи и чтобы ядра и образы нормировочных матриц были взаимно ортогональны* $Ker\ Z_j \perp Ran\ Z_j$.

Характеристические свойства ДР для рассматриваемых классов неэрмитовых задач установлены в теореме 4 [2], которая является модификацией известных пяти условий З.С. Аграновича и В.А. Марченко [1] и переходит в них в эрмитовом случае (см. [1, теоремы 5.6.1 и 5.6.2]).

Теорема 4 [2]. *Для того чтобы величины* $\left\{S(k);\ k_j^2,\ Z_j\right\}$ *были ДР полуэрмитовой задачи вида (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:* $k_j^2 < 0,\ j = \overline{1,p} < \infty$ *и*

A) $S(k)$, $k \in \mathbf{R}$, *является матрицей рассеяния какой-нибудь эрмитовой задачи вида (1), (2);*

B) *при любом* $x \geq 0$ *однозначно разрешимо уравнение Марченко:*

$$K(x,y) + F(x+y) + \int\limits_x^\infty K(x,t)F(t+y)dt = 0,\ 0 \leq x \leq y < \infty,$$

где $E(x,k) = Ie^{ikx} + \int\limits_x^\infty K(x,t)e^{ikt}dt$, $\mathrm{Im}k \geq 0$, $F(x) = F_S(x) + \sum\limits_{j=1}^p Z_j e^{-|k_j|x}$,

$F_S(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty (I - S(k))e^{ikx}dk$, $F_S(x)$ *— суммируема на оси* $(-\infty, \infty)$*;*

C) *число суммируемых линейно независимых вектор-решений уравнения*

$$x(t) + \int\limits_0^\infty x(\xi)F(t+\xi)d\xi = 0,\ 0 \leq t < \infty$$

равно сумме рангов всех нормировочных матриц Z_j.

Вопросу о допустимых малых возмущениях нормировочных матриц в [2] посвящена следующая

Теорема 6 [2]. *Пусть* $\left\{S(k);\ k_j^2,\ Z_j\right\}$ *— ДР квазиэрмитовой задачи. Тогда:*

6.1. *Если выполнено*

$$\exists\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : \mathrm{Re}\ (e^{i\alpha}Z_j) \geq 0,$$

$$\mathrm{rg}\ \mathrm{Re}\ (e^{i\alpha}Z_j) = \mathrm{rg}\ Z_j,\ j = \overline{1,p}, \tag{3}$$

то для того чтобы при достаточно малом $\varepsilon > 0$ *и всевозможных матрицах* $C_j : \|C_j\| < \varepsilon$, *величины*

$$\left\{S(k),\ k \in \mathbf{R};\ k_j^2,\ Z_j + C_j\ \ j = \overline{1,p}\right\}$$

были ДР квазиэрмитовой задачи, которая ФЭ исходной задаче, необходимы и достаточны включения

$$\mathrm{Ran}\ C_j \subseteq \mathrm{Ran}\ Z_j,\ \mathrm{Ker}\ C_j \supseteq \mathrm{Ker}\ Z_j,\ j=\overline{1,p}.$$

6.2. *Если матрицы Z_j нормальны, спектр (кроме 0) каждой из них принадлежит открытой полуплоскости, которая ограничена в комплексной плоскости* $\mathbf{C}$ *своей при каждом j прямой, проходящей через O, а возмущающие матрицы C_j линейны по $\varepsilon_j \in \mathbf{C}$, то для того чтобы величины*

$$\left\{S(k),\ k\in\mathbf{R};\ k_j^2,\ Z_j+\varepsilon_j A_j,\ j=\overline{1,p}\right\}, \tag{4}$$

где $A_j = A_j^*$, были бы данными рассеяния квазиэрмитовой задачи при всех достаточно малых $|\varepsilon_j|$, необходимы включения

$$\mathrm{Ran}\ \mathrm{A}_j \subseteq \mathrm{Ran}\ Z_j,\ j=\overline{1,p}. \tag{5}$$

Если же спектр (кроме 0) всех матриц Z_j принадлежит одной и той же открытой полуплоскости, не содержащей отрицательной полуоси и ограниченной в комплексной плоскости $\mathbf{C}$ *прямой, которая проходит через O, то включения (5) достаточны[*] для того, чтобы величины (4), где $A_j = A_j^*$, были бы данными рассеяния квазиэрмитовой задачи при всех достаточно малых $|\varepsilon_j|$.*

Если величины (4) являются данными рассеяния квазиэрмитовых задач при достаточно малых $|\varepsilon_j|$, то эти задачи фазово-эквивалентны задаче, отвечающей (4) при $\varepsilon_j = 0$ ($j=\overline{1,p}$).

Таким образом, в теореме 6 [2] рассматривались условия на аддитивные возмущения нормировочных матриц. Эти условия содержали требование на ядра и образы аддитивных возмущений нормировочных матриц как в теореме 6.1, так и в теореме 6.2. Кроме того, в теореме 6.2 требовалась линейность аддитивного возмущения нормировочных матриц по малому параметру ε. В настоящей работе допускается значительно более широкий класс возмущений нормировочных матриц, а именно, рассматриваются возмущения вида $g_j\left(f_j\left(Z_j\right)+C_j\right),\ j=\overline{1,p}$, где f_j, g_j — взаимно обратные функции от матриц, предполагаемые либо кусочно аналитическими на спектре соответствующей матрицы, если матрица — неэрмитова, либо непрерывными в случае эрмитовых матриц, причем условия на аддитивные возмущения нормировочных матриц, которые касаются их ядер и образов, а в случае теоремы 6.2 требуют

[*]Здесь достаточные условия части 6.2 теоремы 6 из [2] уточнены самими авторами.

линейности по малому параметру ε, заменяются аналогичными условиями на слагаемые C_j, стоящие под знаком функций g_j. В частности, отсюда видно, что требование линейности по ε аддитивного возмущения нормировочных матриц заменяется более общим условием, т.к. $g_j\left(f_j\left(Z_j\right)+\varepsilon_j A_j\right),\ j=\overline{1,p}$, уже не будут, вообще говоря, линейными по ε_j.

Здесь, следуя [4], классом K_A функций $\varphi(z)$, кусочно аналитических на спектре матрицы A, называем такой класс, когда $\varphi \in K_A$ обладает следующими свойствами:

1) область определения D_φ функции $\varphi(z)$ состоит из конечного числа открытых связных компонент, объединение которых содержит спектр матрицы A, причем каждая компонента содержит по крайней мере одну точку спектра;

2) функция $\varphi(z)$ кусочно-голоморфна, т.е. голоморфна в каждой компоненте своей области определения D_φ.

Основные результаты и примеры

Теорема 1. *Если*

$$\left\{S(k),\ k\in\mathbf{R};k\ {}_j^2,\ Z_j,\ j=\overline{1,p}\right\} \tag{6}$$

суть данные рассеяния квазиэрмитовой задачи и функции $f_j(z)$ $\left(j=\overline{1,p}\right)$ кусочно аналитические на спектре соответствующей матрицы Z_j $\left(j=\overline{1,p}\right)$ и таковы, что $f_j(0)=0$ $\left(j=\overline{1,p}\right)$, а также для каждой $f_j(z)$ существует однозначная обратная функция $g_j(z):g_j\left(f_j(z)\right)=z$, кусочно аналитическая на спектре $f_j\left(Z_j\right)$, тогда:

1.1. *Если выполнены условия (3), то для того чтобы при достаточно малом $\varepsilon>0$ и всевозможных матрицах $C_j:\|C_j\|<\varepsilon$ величины*

$$\left\{S(k),\ k\in\mathbf{R};\ k_j^2,\ g_j\left(f_j\left(Z_j\right)+C_j\right),\ j=\overline{1,p}\right\} \tag{7}$$

были данными рассеяния квазиэрмитовой задачи, которая фазово-эквивалентна задаче с данными рассеяния (6), необходимы и достаточны включения

$$\operatorname{Ran} C_j\subseteq\operatorname{Ran} Z_j,\ \operatorname{Ker} C_j\supseteq\operatorname{Ker} Z_j,\ j=\overline{1,p}.$$

1.2. *Если матрицы Z_j нормальны, спектр (кроме 0) каждой из матриц $f_j\left(Z_j\right),\ \ j=\overline{1,p},$ принадлежит открытой полуплоскости, которая ограничена в комплексной плоскости $\mathbf{C}$ своей при каждом j прямой,* *проходящей через O, а возмущающие матрицы C_j линейны по $\varepsilon_j \in \mathbf{C}$, то для того чтобы величины*

$$\left\{S(k),\ k \in \mathbf{R};\ k_j^2,\ g_j\left(f_j\left(Z_j\right) + \varepsilon_j A_j\right),\ j = \overline{1,p}\right\}, \tag{8}$$

где $A_j = A_j^*$, были бы данными рассеяния квазиэрмитовой задачи при всех достаточно малых $|\varepsilon_j|$, необходимы включения

$$\mathrm{Ran}\ A_j \subseteq \mathrm{Ran}\ Z_j,\ j = \overline{1,p}. \tag{9}$$

Если же спектр (кроме 0) всех матриц Z_j принадлежит одной и той же открытой полуплоскости, которая не содержит отрицательной полуоси и ограничена в комплексной плоскости $\mathbf{C}$ прямой, проходящей через O, то включения (9) достаточны для того, чтобы величины (8), где $A_j = A_j^*$, были бы данными рассеяния квазиэрмитовой задачи при всех достаточно малых $|\varepsilon_j|$.

Если величины (8) являются данными рассеяния квазиэрмитовых задач при достаточно малых $|\varepsilon_j|$, то эти задачи фазово-эквивалентны задаче, отвечающей (8) при $\varepsilon_j = 0$ $(j = \overline{1,p})$.

Теорема 2. *Если*

$$\left\{S(k),\ k \in \mathbf{R}; k_j^{\,2} < 0,\ M_j^2,\ j = \overline{1,p}\right\} \tag{10}$$

суть данные рассеяния задачи вида (1), (2) с эрмитовым потенциалом и функции $f_j(x)$, $f_j(0) = 0$ непрерывны, вещественнозначны, строго монотонны на полуоси $(0 \le x < \infty)$, $g_j(x)$ — соответствующие им обратные функции: $g_j\left(f_j(x)\right) = x$, $j = \overline{1,p}$, тогда:

2.1. *Для того чтобы при вещественных, достаточно малых ε величины*

$$\left\{S(k),\ k \in \mathbf{R};\ k_j^2,\ g_j\left(f_j\left(M_j^2\right) + C_j\right),\ j = \overline{1,p}\right\},$$

где $C_j = C_j^* : \|C_j\| < \varepsilon$, были данными рассеяния некоторой задачи вида (1), (2) с эрмитовым потенциалом, которая фазово-эквивалентна задаче с данными рассеяния (10), необходимы и достаточны включения

$$\mathrm{Ran}\ C_j \subseteq \mathrm{Ran}\ M_j^2,\ j = \overline{1,p}. \tag{11}$$

2.2. *Для того чтобы величины*

$$\left\{S(k),\ k \in \mathbf{R};\ k_j^2,\ g_j\left(f_j\left(M_j^2\right) + \varepsilon_j A_j\right),\ j = \overline{1,p}\right\}, \tag{12}$$

где $A_j = A_j^*$, были бы данными рассеяния задачи (1), (2) с эрмитовым потенциалом при всех достаточно малых, вещественных ε_j, необходимы включения

$$\mathrm{Ran}\ \mathrm{A}_j \subseteq \mathrm{Ran}\ M_j^2,\ j=\overline{1,p}. \tag{13}$$

Если величины (12) являются при вещественных, достаточно малых ε_j данными рассеяния задачи вида (1), (2) с эрмитовым потенциалом, то эта задача фазово-эквивалентна задаче, отвечающей (12) при $\varepsilon_j = 0$ $(j=\overline{1,p})$, т.е. (10).

З а м е ч а н и е 1. Теорема 2.2 утверждает, что если рассмотреть ДР вида (12) задачи с эрмитовым потенциалом при достаточно малых ε_j, то эта задача ФЭ задаче, отвечающей (12) при $\varepsilon_j = 0$ $(j = \overline{1,p})$, а значит, тогда к этим ДР применима теорема 6.1 [2], в условия которой входит требование ФЭ. Таким образом, применительно к ДР вида (12) в условиях теоремы 6.1 [2] (в сторону необходимости) можно отказаться от требования ФЭ.

П р и м е р 1 показывает применимость нашей теоремы 2.2 в случае, когда теорема 6.2 [2]* не применима.

Величины

$$\left\{ S(k) = \begin{pmatrix} \frac{(k+i)(k+2i)}{(k-i)(k-2i)} & 0 \\ 0 & \frac{(k+i)(k+2i)}{(k-i)(k-2i)} \end{pmatrix},\ k_1^2 = -1, \right.$$

$$\left. g\left(f\left(M_1^2\right) + \varepsilon A_1\right) = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon^2 & 2\varepsilon \\ 2\varepsilon & 1+\varepsilon^2 \end{pmatrix} \right\}, \tag{14}$$

где $M_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$, являются ДР эрмитовой задачи (ср. [1, пример 1, с. 131]) для всех достаточно малых $\varepsilon \in \mathbf{R}$ (в том числе и для $\varepsilon = 0$). Здесь удовлетворены все условия Аграновича–Марченко [1]. Следовательно, применяя теорему 2.2 к ДР (14), имеем $Ran\ A_1 \subseteq Ran\ M_1^2$, что в данном случае и так очевидно, а учитывая нашу теорему 2.1 (или теорему 6.1 [2] для задачи с эрмитовым потенциалом), получим, что (14) ДР задачи ФЭ эрмитовой задаче, которая отвечает ДР $\{S(k), k_1^2, M_1^2\}$.

П р и м е р 2 показывает, что требования линейности по параметру возмущающей матрицы и фазовой эквивалентности в теореме 2 существенны.

*См. Введение к данной работе.

При любых $\varepsilon \in \mathbf{R}$ величины

$$\left\{ S(k) = \begin{pmatrix} \frac{(k+i)(k+2i)}{(k-i)(k-2i)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ k_1^2 = -1, \right.$$

$$\left. g\left(f\left(M_1^2\right) + C_1\right) = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 \end{pmatrix} \right\}, \tag{15}$$

где

$$M_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{\varepsilon^2+1}}{\sqrt{\varepsilon^2+1}} & \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2+1}} \\ \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2+1}} & \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\varepsilon^2+1}} \end{pmatrix},$$

$f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$, удовлетворяют всем условиям Аграновича–Марченко [1], а значит, являются ДР задачи с эрмитовым потенциалом. Но здесь нарушено требование линейности по ε возмущающей под знаком функции g матрицы C_1. Легко видеть, что утверждение теоремы 2.2 о небходимости включения образов (13) возмущающей C_1 и невозмущенной матрицы M_1^2 в (15) тоже нарушено. Кроме того, ДР (15) при $\varepsilon \neq 0$ соответствуют задаче, которая не является ФЭ задаче, отвечающей ДР (15) при $\varepsilon = 0$, в силу теоремы 1 [2] (см. также "Введение" данной работы). И мы видим, что для величин (15) не выполняются включения (11), хотя они и являются данными рассеяния. Таким образом, требование ФЭ является существенным в теореме 2.1.

П р и м е р 3 относится к случаю, где применима теорема 1.2 данной работы и в то же время не применима теорема 6 из [2].

Скалярные величины $\{S(k) = \frac{(k+i)(k+2i)(k+3i)(k+4i)}{(k-i)(k-2i)(k-3i)(k-4i)}$, $k_1^2 = -9$, $k_2^2 = -16$, $z_1 = 420 + 20i$, $z_2 = -280\}$ являются ДР квазиэрмитовой задачи (см. [2, пример 3]), а значит, к величинам

$$\left\{ S(k) = \frac{(k+i)(k+2i)(k+3i)(k+4i)}{(k-i)(k-2i)(k-3i)(k-4i)},\ k_1^2 = -9,\ k_2^2 = -16, \right.$$

$$\left. g(f(z_1) + \varepsilon),\ z_2 = -280 \right\}, \tag{16}$$

где $f(z) = \sqrt{z}(\mathrm{Re}\sqrt{z} \geq 0)$, $g(z) = z^2$, которые, в свою очередь, тоже являются ДР квазиэрмитовой задачи по теореме 4 [2], применима наша теорема 1.2. В то же время условие (3) теоремы 6.1 [2] и нашей теоремы 1.1 для ДР (16) не выполнено. Теорема 6.2 к ДР (16) тоже не применима, поскольку нарушено требование линейности возмущения по ε.

Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 1. Пункт 1.1.

Лемма 1. *Для произвольных матриц T и C и функции $\varphi(z)$, кусочно аналитической на спектре матрицы T, справедливо*

$$\|\varphi(T+C)-\varphi(T)\| \to 0 \text{ при } \|\mathrm{C}\| \to 0.$$

Доказательство. Пусть Γ_j — окружность с центром в собственном числе $\lambda_j(T)$, охватывающая собственные числа $\lambda_j(T+C)$ возмущенной матрицы $T+C$ при достаточно малых $\|C\|$, которые образуют λ_j группу по Като, т.е. совокупность собственных чисел матрицы $T+C$, возникающих при расщеплении собственного числа $\lambda_j(T)$ невозмущенной матрицы T. И пусть Γ_j не содержит других собственных чисел возмущенной матрицы (см. определение [5, с. 98] и теорему о непрерывности полного набора собственных чисел матрицы как функции от возмущения [5, гл. II, теорема 5.14]). По определению

$$\varphi(T)=-\frac{1}{2\pi i}\sum_j \int\limits_{\Gamma_j} \varphi(\lambda)(T-\lambda I)^{-1}d\lambda,$$

$$\varphi(T+C)=-\frac{1}{2\pi i}\sum_j \int\limits_{\Gamma_j} \varphi(\lambda)(T+C-\lambda I)^{-1}d\lambda.$$

Из ограниченности кусочно аналитической функции $\varphi(z)$ на Γ_j и в силу непрерывной зависимости резольвенты от возмущения ([4, с. 28, теорема 2.1])

$$\|\varphi(T+C)-\varphi(T)\| \le \frac{1}{2\pi}\sum_j \int\limits_{\Gamma_j} |\varphi(\lambda)|\cdot\|(T+C-\lambda I)^{-1}-(T-\lambda I)^{-1}\|\cdot|d\lambda| \to 0$$

при $\|C\| \to 0$.

Лемма 1 доказана.

Утверждение теоремы 1.1 вытекает из теоремы 6.1 [2]. Действительно, при всех достаточно малых $\varepsilon>0$, в силу леммы 1, $g_j(f_j(Z_j)+C_j)=Z_j+D_j$, где $\|D_j\|\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. А значит, если показать, что

$$\mathrm{Ran}\ D_j \subseteq \mathrm{Ran}\ Z_j \Leftrightarrow \mathrm{Ran}\ C_j \subseteq \mathrm{Ran}\ Z_j,$$

$$\mathrm{Ker}\ D_j \supseteq \mathrm{Ker}\ Z_j \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\ C_j \supseteq \mathrm{Ker}\ Z_j,\ j=\overline{1,p}, \tag{17}$$

то, в силу теоремы 6.1 [2], получим требуемое утверждение.

Итак, остается показать (17).

Лемма 2. *Для произвольной матрицы T и кусочно аналитической на её спектре функции $\varphi(z)$ такой, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(0) \neq 0$, $\varphi(z) \neq 0$ при $z \neq 0$, справедливо совпадение образов и ядер*

$$\mathrm{Ran}\ \varphi(T) = \mathrm{Ran}\ T,\ \mathrm{Ker}\ \varphi(T) = \mathrm{Ker}\ T.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как известно [5], если $B = U^{-1}AU$ ($\det U \neq 0$), то $\varphi(B) = U^{-1}\varphi(A)U$, поэтому ($\mathrm{Ran}\ \varphi(A) = \mathrm{Ran}\ A$) $\Leftrightarrow$ ($\mathrm{Ran}\ \varphi(B) = \mathrm{Ran}\ B$), ($\mathrm{Ker}\ \varphi(A) = \mathrm{Ker}\ A$) $\Leftrightarrow$ ($\mathrm{Ker}\ \varphi(B) = \mathrm{Ker}\ B$).

Значит, т.к. произвольная матрица T подобна своей жордановой форме J, то достаточно показать, что

$$\mathrm{Ran}\ \varphi(J) = \mathrm{Ran}\ J,\ \mathrm{Ker}\ \varphi(J) = \mathrm{Ker}\ J. \tag{18}$$

Докажем первое из равенств (18). Обозначим через $(\lambda - \lambda_1)^{r_1}, \dots, (\lambda - \lambda_m)^{r_m}$ элементарные делители матрицы T, тогда, в силу свойства функции жордановой матрицы (см. [3, пример 2, с. 100]), $JP_j = \lambda_j P_j + D_j$; $\varphi(J)P_j = \varphi(\lambda_j)P_j + \varphi'(\lambda_j)D_j + D_j'$, где P_j — матрицы, у которых на диагонали на местах с номерами от $\sum\limits_{s=1}^{j-1} r_s + 1$ до $\sum\limits_{s=1}^{j-1} r_s + r_j$ стоят единицы, а все остальные элементы — нули; матрицы D_j — нильпотентны:

$$D_j = (J - \lambda_j I)P_j\,; \quad D_j' = \frac{\varphi''(\lambda_j)}{2!}D_j^2 + \dots + \frac{\varphi^{r_j-1}(\lambda_j)}{(r_j-1)!}D_j^{r_j-1}\,.$$

Из определения D_j и D_j' следует, что

$$\mathrm{Ran}\ D_j' \subset \mathrm{Ran}\ D_j \subset \mathrm{Ran}\ P_j,\ j = \overline{1, m}. \tag{19}$$

Ясно, что в силу (19)

$$\mathrm{Ran}\ P_j \supseteq \mathrm{Ran}\ (\varphi(\lambda_j)P_j + \varphi'(\lambda_j)D_j). \tag{20}$$

Пусть $\lambda_j \neq 0$, тогда по условию $\varphi(\lambda_j) \neq 0$. Из определения P_j и D_j следует, что $\mathrm{rg}\ (\varphi(\lambda_j)P_j + \varphi'(\lambda_j)D_j) = \mathrm{rg}\ P_j$, поэтому, в силу (20), имеет место равенство $\mathrm{Ran}\ P_j = \mathrm{Ran}\ (\varphi(\lambda_j)P_j + \varphi'(\lambda_j)D_j)$, откуда, в силу (19), $\mathrm{Ran}\ D_j' \subseteq \mathrm{Ran}\ (\varphi(\lambda_j)P_j + \varphi'(\lambda_j)D_j)$ и

$$\mathrm{Ran}\ \varphi(J)P_j = \mathrm{Ran}\ (\varphi(\lambda_j)P_j + \varphi'(\lambda_j)D_j + D_j')$$

$$\subseteq \mathrm{Ran}\ (\varphi(\lambda_j)P_j + \varphi'(\lambda_j)D_j). \tag{21}$$

Пусть теперь $\lambda_j = 0$, тогда $\varphi(\lambda_j) = 0$, $\varphi'(\lambda_j) \neq 0$ по условию и из (19) следует

$$\mathrm{Ran}\ \varphi(J)P_j = \mathrm{Ran}\ (\varphi(\lambda_j)P_j + \varphi'(\lambda_j)D_j + D_j') = \mathrm{Ran}\ (\varphi'(\lambda_j)D_j + D_j')$$

$$\subseteq \mathrm{Ran}\ (\varphi'(\lambda_j)D_j) = \mathrm{Ran}(\varphi(\lambda_j)P_j + \varphi'(\lambda_j)D_j). \tag{22}$$

Но

$$\mathrm{rg}\ \varphi(J)P_j = \mathrm{rg}\ (\varphi(\lambda_j)P_j + \varphi'(\lambda_j)D_j) = \begin{cases} r_j, & \lambda_j \neq 0, \\ r_j - 1, & \lambda_j = 0, \end{cases}$$

в силу свойства $\varphi(z)$ и теоремы 8 [3, гл. VI, § 7]) о дефекте функции от матрицы, которая утверждает, что $d_{\varphi(T)} = \sum\limits_{j=1}^{m} \min(l_j, r_j)$, где d_A — дефект матрицы A, l_j — кратность λ_j как корня $\varphi(\lambda)$. Итак, учитывая (21) и соответственно (22), получим равенство $\mathrm{Ran}\ \varphi(J)P_j = \mathrm{Ran}\ (\varphi(\lambda_j)P_j + \varphi'(\lambda_j)D_j)$, $j = \overline{1,m}$.

Но по условию $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(0) \neq 0$, $\varphi(z) \neq 0$ при $z \neq 0$, поэтому $\mathrm{Ran}\ (\lambda_j P_j + D_j) = \mathrm{Ran}\ (\varphi(\lambda_j)P_j + \varphi'(\lambda_j)D_j)$, $j = \overline{1,m}$. Таким образом, имеем $\mathrm{Ran}\ \varphi(J)P_j = \mathrm{Ran}\ JP_j$ и окончательно, в силу свойств P_j: $\sum\limits_{j=1}^{m} P_j = I$, $P_j P_k = \delta_{jk} P_j$: $\mathrm{Ran}\ \varphi(J) = \oplus \sum\limits_{j=1}^{m} \mathrm{Ran}\varphi(J)P_j = \oplus \sum\limits_{j=1}^{m} \mathrm{Ran}\ JP_j = \mathrm{Ran}J$.

Второе равенство (18) доказывается аналогично, а именно, с помощью вышеизложенного метода показываем, что $\mathrm{Ran}\ (\varphi(J))^* = \mathrm{Ran}J^*$, и воспользуемся совпадением $(\mathrm{Ran}\ (\varphi(J))^*)^{\perp} = \mathrm{Ker}\ \varphi(J)$ и $(\mathrm{Ran}\ J^*)^{\perp} = \mathrm{Ker}\ J$. Лемма 2 доказана.

Докажем (17). Из леммы 2 вытекает, что

$$\mathrm{Ran}\ f_j(Z_j) = \mathrm{Ran}\ Z_j;\ \mathrm{Ker}\ f_j(Z_j) = \mathrm{Ker}\ Z_j,\ j = \overline{1,p}, \tag{23}$$

и

$$\mathrm{Ran}\ g_j(f_j(Z_j) + C_j) = \mathrm{Ran}\ (f_j(Z_j) + C_j);$$

$$\mathrm{Ker}\ g_j(f_j(Z_j) + C_j) = \mathrm{Ker}\ (f_j(Z_j) + C_j),\ j = \overline{1,p}. \tag{24}$$

Значит, в силу (23) и (24),

$$\mathrm{Ran}\ D_j \subseteq \mathrm{Ran}\ Z_j \Leftrightarrow \mathrm{Ran}\ (D_j + C_j) \subseteq \mathrm{Ran}\ Z_j \Leftrightarrow \mathrm{Ran}\ g_j(f_j(Z_j) + C_j)$$

$$\subseteq \mathrm{Ran}\ Z_j \Leftrightarrow \mathrm{Ran}\ (f_j(Z_j) + C_j) \subseteq \mathrm{Ran}\ Z_j \Leftrightarrow \mathrm{Ran}\ C_j \subseteq \mathrm{Ran}\ Z_j,$$

аналогично,

$$\mathrm{Ker}\ D_j \supseteq \mathrm{Ker}\ Z_j \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\ (D_j + C_j) \supseteq \mathrm{Ker}\ Z_j \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\ g_j(f_j(Z_j) + C_j)$$

$$\supseteq \text{Ker } Z_j \Leftrightarrow \text{Ker } (f_j(Z_j) + C_j) \supseteq \text{Ker } Z_j \Leftrightarrow \text{Ker } C_j \supseteq \text{Ker } Z_j, \ j = \overline{1,p}.$$

Пункт 1.1 теоремы 1 доказан.

Пункт 1.2. Докажем необходимость (9). Так как (6) и (8) — ДР квазиэрмитовых задач, то по условию C теоремы 4 [2], аналога условия V[1], имеем $\sum\limits_j \text{rg } g_j(f_j(Z_j) + \varepsilon_j A_j) = \sum\limits_j \text{rg } Z_j$, поскольку матрицы рассеяния для обеих задач одинаковы.

Но легко видеть, в силу леммы 1, что при всех достаточно малых $|\varepsilon_j|$, $\varepsilon_j \in \mathbf{C}$, $\text{rg } g_j(f_j(Z_j) + \varepsilon_j A_j) = \text{rg } (Z_j + D_j) \geq \text{rg } Z_j$, $j = \overline{1,p}$, где $\|D_j\| \to 0$ (при $|\varepsilon_j| \to 0$), а значит,

$$\text{rg } g_j(f_j(Z_j) + \varepsilon_j A_j) = \text{rg } Z_j, \ j = \overline{1,p}. \tag{25}$$

В силу леммы 2 и свойств функций $g(z)$ и $f(z)$, получим

$$\text{rg } g_j(f_j(Z_j) + \varepsilon_j A_j) = \text{rg } (f_j(Z_j) + \varepsilon_j A_j),$$

$$\text{rg } f_j(Z_j) = \text{rg } Z_j, \ j = \overline{1,p}. \tag{26}$$

Так как по условию теоремы Z_j — нормальны, то $f(Z_j)$ — тоже нормальны. Допустим теперь, что условие (9) нарушено, т.е. при некотором $j = j_0$ $\text{Ran } A_{j_0} \not\subset \text{Ran } Z_{j_0}$. Обозначим $M := f(Z_{j_0})$ и воспользуемся следующим фактом, который получен при доказательстве утверждения теоремы 6.2 [2]: для матриц $A = A^*$ и $MM^* = M^*M$, если спектр (кроме 0) матрицы M принадлежит открытой полуплоскости, ограниченной в комплексной плоскости $\mathbf{C}$ прямой, которая проходит через точку O, а $\text{Ran } A \not\subset \text{Ran } M$, то при достаточно малом $|\varepsilon|$, $\varepsilon \in \mathbf{C}$, верно неравенство $\text{rg } (M + \varepsilon A) > \text{rg } M$, т.е., в силу (26), $\text{rg } g_{j_0}(f_{j_0}(Z_{j_0}) + \varepsilon_{j_0} A_{j_0}) > \text{rg } Z_{j_0}$, что противоречит (25) и завершает доказательство необходимости (9).

Докажем достаточность (9). Так как спектр всех Z_j (кроме 0) принадлежит одной и той же открытой полуплоскости, которая не содержит отрицательной полуоси и ограничена в комплексной плоскости прямой, проходящей через точку O, то справедливо (3). А значит, из теоремы 1.1 имеем, поскольку $\text{Ker } Z_j \perp \text{Ran } Z_j$ и $\text{Ker } A_j \perp \text{Ran } A_j$, $j = \overline{1,p}$, что (8) — ДР квазиэрмитовой задачи, которая ФЭ задаче с ДР (6).

Наконец, задачи, для которых (8) и (6) суть ДР, ФЭ между собой при всех достаточно малых $|\varepsilon_j|$, $\varepsilon_j \in \mathbf{C}$, $j = \overline{1,p}$, при рассматриваемых условиях, в силу теоремы 1 [2] (см. также Введение данной работы). Действительно, из леммы 2 и (9) получаем $\text{Ran } g_j(f_j(Z_j) + \varepsilon_j A_j) = \text{Ran } (f_j(Z_j) + \varepsilon_j A_j) \subseteq \text{Ran } Z_j$, $j = \overline{1,p}$, отсюда, в силу (25) и того, что $\text{Ker } Z_j \perp \text{Ran } Z_j$ и $\text{Ker } g_j(f_j(Z_j) +$

$\varepsilon_j A_j)\perp\text{Ran}\ g_j(f_j(Z_j)+\varepsilon_j A_j)$, $j=\overline{1,p}$, имеем совпадение образов и ядер по теореме 3 [2] (см. Введение данной работы):

$$\text{Ran}\ g_j(f_j(Z_j)+\varepsilon_j A_j)=\text{Ran}\ Z_j,$$

$$\text{Ker}\ g_j(f_j(Z_j)+\varepsilon_j A_j)=\text{Ker}\ Z_j,\ j=\overline{1,p}\,.$$

Так как эти условия по теореме 1 [2] являются необходимыми и достаточными, чтобы ДР соответствующих задач были ФЭ между собой, то доказательство завершено. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Так как условие (3) выполнено в нашем случае автоматически (при $\alpha=0$), то пп. 2.1 и 2.2 теоремы 2 доказываются аналогично соответствующим пунктам теоремы 1, если рассмотреть вместо лемм 1 и 2 следующие:

Лемма 3. *Заданная на оси* $\mathbf{R}$ *непрерывная функция* $\varphi(z)$ *является также непрерывной матричнозначной функцией, если рассматривать её как функцию эрмитова матричного аргумента, т.е.* $\|\varphi(T+C)-\varphi(T)\|\to 0$ *при* $\|\text{C}\|\to 0$, *где* $T=T^*$, $C=C^*$.

Замечание 2. Лемма 3 есть частный случай теоремы VIII.20 из [6, с. 313]. Приводимое ниже доказательство леммы 3 проще доказательства, представленного в книге [6].

Доказательство. По определению функции от матрицы $\varphi(T)=\sum\limits_{j=1}^{m}\varphi(\lambda_j(T))P_j(T)=-\frac{1}{2\pi i}\sum\limits_{j}\varphi(\lambda_j(T))\int\limits_{\Gamma_j}(T-\lambda I)^{-1}d\lambda$, где Γ_j — окружность с центром в точке $\lambda_j(T)$, не содержащая никаких других собственных чисел T, $P_j(T)$ — проектор на соответствующее собственное подпространство. Аналогично, $\varphi(T+C)=\sum\limits_{j=1}^{r}\varphi(\lambda_j(T+C))P_j(T+C)$, $r\geq m$, где $||C||\to 0$.

Рассмотрим

$$\varphi(T+C)-\varphi(T)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k}(\varphi(\lambda_k(T+C))-\varphi(\lambda_j(T)))P_k(T+C)$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\varphi(\lambda_j(T))\{\sum_{k}P_k(T+C)-P_j(T)\},$$

где сумма по k — сумма по тем значениям $\{\lambda_k(T+C)\}$, которые образуют $\lambda_j(T)$ — группу ($j=\overline{1,m}$), т.е. совокупность собственных чисел матрицы $T+C$, возникающих при возможном расщеплении собственного числа $\lambda_j(T)$ ([5, с. 98]).

Имеем

$$||\varphi(T+C)-\varphi(T)|| \le \sum_{j=1}^{m}\sum_{k}|\varphi(\lambda_k(T+C))-\varphi(\lambda_j(T))|\cdot||P_k(T+C)||$$

$$+\sum_{j=1}^{m}|\varphi(\lambda_j(T))|\cdot||\sum_{k}P_k(T+C)-P_j(T)||. \qquad (27)$$

В силу непрерывности $\varphi(x)$, непрерывности собственных чисел как функции матрицы ([5, теорема 5.14, гл. II, § 5, п. 8]) и того, что $||P_k(T+C)||=1$ $(k=\overline{1,r})$, имеем $\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k}|\varphi(\lambda_k(T+C))-\varphi(\lambda_j(T))|\cdot||P_k(T+C)||\to 0$ $(||C||\to 0)$. Вторая сумма из (27), в силу теоремы о непрерывной зависимости спектрального проектора от возмущения (см., напр., [4, теорема 2.2, с. 35]), стремится к нулю при $||C||\to 0$, а значит, $||\varphi(T+C)-\varphi(T)||\to 0$ (при $||C||\to 0$).

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для произвольной эрмитовой матрицы T и определенной на спектре матрицы T функции $\varphi(x)$ (т.е. существуют значения $\varphi(\lambda_j)$, где λ_j – собственные числа T) такой, что $\varphi(0)=0$, $\varphi(x)\ne 0$ при $x\ne 0$, справедливо равенство Ran $\varphi(T)=$ Ran T.*

Доказательство. По определению спектрального представления функции эрмитовой матрицы имеем $T=\sum\limits_{j}\lambda_j P_j$; $\varphi(T)=\sum\limits_{j}\varphi(\lambda_j)P_j$, где λ_j — собственные числа T, P_j — собственные проекторы на соответствующие собственные подпространства. В силу свойства функции $\varphi(x)$: $\varphi(0)=0$, $\varphi(x)\ne 0$ при $x\ne 0$, имеем Ran $\varphi(T)P_j=$ Ran TP_j.

Отсюда, т.к. P_j: $\sum\limits_{j=1}^{m}P_j=I$, $P_jP_k=\delta_{jk}P_j$, то

$$\text{Ran }\varphi(T)=\oplus\sum_{j=1}^{m}\text{Ran }\varphi(T)P_j=\oplus\sum_{j=1}^{m}\text{Ran }TP_j=\text{Ran }T.$$

Лемма 4 доказана.

Замечание 3. Справедливость равенства Ker $\varphi(T)=$ Ker T следует из равенств Ker $T=(Ran\,T)^{\perp}$ и Ker $\varphi(T)=(Ran\,\varphi(T))^{\perp}$, поскольку $\varphi(x)\in\mathbf{R}$ при $x\in\mathbf{R}$.

Теорема 2 доказана.

В заключение выражаю благодарность своему научному руководителю Ф.С. Рофе-Бекетову за помощь и постоянное внимание к настоящей работе.

Список литературы

[1] *З.С. Агранович, В.А Марченко*, Обратная задача теории рассеяния. ХГУ, Харьков (1960).

[2] *Е.И. Бондаренко, Ф.С. Рофе-Бекетов*, Фазово-эквивалентные матричные потенциалы. — *Электромагн. волны и электрон. системы* (2000), т. 5, № 3, с. 6–24.

[3] *Ф.Р. Гантмахер*, Теория матриц. Наука, Москва (1988).

[4] *Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн*, Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Наука, Москва (1970).

[5] *Т. Като*, Теория возмущений линейных операторов. Мир, Москва (1972).

[6] *М. Рид, Б. Саймон*, Методы современной математической физики. Т. 1, Функциональный анализ. Мир, Москва (1977).

Perturbations of the normalization matrices of the inverse scattering problem

E.I. Bondarenko

The paper is devoted to the question about admissible perturbations of the normalization matrices of the scattering problem on the semi-axis for the system of differential equations, which is considering in known book by Z.S. Agranovich and V.A. Marchenko [1] in Hermitian case. In matrix case the test of the necessary and sufficient conditions for the scattering data is considerably complicated than in scalar case. Both for the Hermitian case and the non-Hermitian case the theorems of the paper are established. These theorems facilitate the clearing up of the belonging of the given set of the values to the scattering data, and they generalize some of results of the paper by F.S. Rofe-Beketov and the author [2].