Математическая физика, анализ, геометрия
2002, т. 9, № 1, с. 18–47

Функциональные модели, унитарные инварианты, мозаики и принципальные функции для операторов с ядерным самокоммутатором

И.В. Воробьев

Механико-математический факультет
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина
E-mail:ivvorobyov@atlasua.net

Статья поступила в редакцию 12 декабря 2000 г.
Представлена В.А. Золотаревым

Построена сингулярная интегральная модель оператора с ядерным самокоммутатором. Получена теорема о разложении оператора в ортогональную сумму нормального и вполне ненормального оператора. Введено понятие гипонормального метрического узла и доказано, что определяющие и характеристические функции являются унитарными инвариантами простых узлов. Описан класс функций, являющихся полуопределяющими. На основе сингулярной интегральной модели построены мозаики и принципальные функции Пинкуса.·

Побудовано сингулярну інтегральну модель оператора із ядерним самокомутатором. Отримано теорему про розкладання оператора в ортогональну суму нормального та цілком ненормального оператора. Введено поняття гіпонормального метричного вузла та доведено, що визначальні та характеристичні функції виявляються унітарними інваріантами простих вузлів. Описано клас функцій, що є напіввизначальними. На підставі сингулярної інтегральної моделі побудовано мозаїки та принципальні функції Пінкуса.

Введение

В данной работе изучаются линейные ограниченные операторы, действующие в комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве, что далее для краткости будем записывать так: "оператор T в пространстве H". Под обратимостью оператора понимаем существование ограниченного обратного.

· Mathematics Subject Classification 2000: 53A04.

Напомним, что оператор T в пространстве H называют гипонормальным, если самокоммутатор $C = [T^*, T] = T^*T - TT^* \geq 0$ (когипонормальным, если $C \leq 0$). В монографиях [1, 2] представлена сингулярная интегральная модель произвольного гипонормального оператора. В [2] также получена такая модель в случае, когда C — ядерный и вещественная часть X оператора T абсолютно непрерывна, однако в этой модели не была выяснена структура ядра сингулярного интегрального оператора. Здесь надлежащим образом обобщим сингулярную интегральную модель оператора T на случай произвольного (ограниченного, самосопряженного) оператора X, несколько ослабим требование ядерности C, а также покажем, что ядро нашей модели отличается от ядра модели гипонормального оператора инволюцией σ, которая в гипонормальном случае равна I. Используя эту модель и введя в рассмотрение понятие гипонормального метрического узла, построим и изучим унитарные инварианты вполне ненормальных операторов — определяющую и характеристические функции. Будут получены задачи Римана–Гильберта, связывающие эти функции, на основе которых мы построим явным образом мозаики и принципальную функцию Пинкуса.

1. Сингулярная интегральная модель

Напомним следующее [3]

Определение 1. *Если X — самосопряженный оператор в пространстве H со спектральным разложением $X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t dE(t)$, то множество H_{ac} (H_s) элементов $g \in H$, для которых функция $\|E(t) g\|_H^2$ абсолютно непрерывна (сингулярна) по t, называется абсолютно непрерывным (сингулярным) подпространством оператора X. Если $H_{ac} = H$ ($H_s = H$), то оператор X называется абсолютно непрерывным (сингулярным).*

Известно, что подпространства H_{ac} и H_s — ортогональные дополнения друг к другу, приводящие X, т.е. $X = X_{ac} \oplus X_s$.

Справедлива следующая теорема для самосопряженных операторов X, а также операторов, коммутирующих с X [4].

Теорема 1. (фон Нейман). *Пусть X — самосопряженный оператор в пространстве H. Тогда существует унитарное отображение U, действующее из H в прямой интеграл гильбертовых пространств*

$$\hat{H} = \int\limits_{\sigma(X)} \oplus \hat{H}(x) \, d\mu(x), \tag{1}$$

такое что оператор $\hat{X} = UXU^*$ является оператором умножения в пространстве $\hat{H}$ (1), т.е.

$$\left(\hat{X}f\right)(x) = xf(x), \quad \forall f \in \hat{H}. \tag{2}$$

Здесь $\sigma(X)$ — спектр оператора X, и мера μ представлена в виде $\mu = m + \nu$, где m — мера Лебега, а ν — сингулярная мера.

Кроме того, если $A : H \to H$ — оператор, коммутирующий с X, то оператор $\hat{A} = UAU^*$ имеет вид

$$\left(\hat{A}f\right)(x) = \beta(x) f(x), \quad \forall f \in \hat{H}, \tag{3}$$

где $\beta(x)$ — некоторая измеримая существенно ограниченная $\hat{H}(x)$-значная функция.

Если X — абсолютно непрерывный, то $d\mu(x) = dx$.

Определение 2. *Пусть $T = X + iY$ $(X = X^*,\ Y = Y^*)$ — разложение оператора в пространстве H. Если существуют следующие сильные пределы:*

$$S_X^{\pm}(T) = s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{itX} T e^{-itX}, \tag{4}$$

то они называются символами оператора T относительно X.

Известно [1], что $S_X^{\pm}(T)$ являются сжимающими гомоморфизмами, коммутирующими с X, и их спектр содержится в спектре T. Кроме того, так как $S_X^{\pm}(T) = X + iS_X^{\pm}(Y)$, то для того, чтобы вычислить символы оператора T, достаточно вычислить символы его мнимой части.

Далее построим сингулярную интегральную модель оператора T с абсолютно непрерывной вещественной частью X и ядерным самокоммутатором, а также получим явные выражения для символов модельного оператора $\hat{T}$, которые для случая гипонормального оператора T получены в [1, 2].

Теорема 2. *Пусть $T = X + iY$ — разложение оператора в пространстве H с абсолютно непрерывной вещественной частью X и ядерным самокоммутатором $C = [T^*, T]$. Тогда T унитарно эквивалентен сингулярному интегральному оператору $\hat{T}$ в пространстве $\hat{H}$ (1) вида*

$$\left(\hat{T}f\right)(x) = xf(x) + i\left[\beta(x) f(x) + \alpha^*(x)\,\sigma P\left(\alpha(\cdot) f(\cdot)\right)\right], \tag{5}$$

$\forall f \in \hat{H}$, где

$$(Pf)(x) = \underset{\varepsilon \to -0}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma(X)} \frac{f(t)\,dt}{(x + i\varepsilon) - t} = \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2\pi i} v.p. \int\limits_{\sigma(X)} \frac{f(t)\,dt}{x - t} \tag{6}$$

— предельное значение интеграла типа Коши (символ v.p. означает главное значение сингулярного интеграла). При этом коэффициенты $\beta(x)=\beta^*(x):\hat{H}(x)\to\hat{H}(x)$ и $\alpha(x):\hat{H}(x)\to D$, определенные на $\sigma(X)$, являются измеримыми оператор-функциями, причем $\beta(x)$ — существенно ограничена, $\alpha(x)$ — оператор-функция Гильберта–Шмидта для почти всех $x\in\sigma(X)$, а постоянный оператор σ — диагональная инволюция в D, где D — l^2-пространство, размерность которого равна размерности образа C. Кроме того, существуют $S^{\pm}_{X}(T)$, причем $S^{\pm}_{\hat{X}}\left(\hat{T}\right)$ представлены операторами умножения на существенно ограниченные оператор-функции и имеют вид

$$\left(S^{-}_{\hat{X}}\left(\hat{T}\right)f\right)(x)=\left[x+i\beta(x)\right]f(x),\ \ \forall f\in\hat{H}, \tag{7}$$

$$\left(S^{+}_{\hat{X}}\left(\hat{T}\right)f\right)(x)=\left[x+i\beta(x)+i\alpha^*(x)\,\sigma\alpha(x)\right]f(x),\ \ \forall f\in\hat{H}. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем метод, предложенный в работе [2]. Пусть ряд Шмидта самокоммутатора C имеет вид $C=\sum\limits_{l=1}^{\dim D}\sigma_l\lambda_l^2\varphi_l\left\langle\cdot,\varphi_l\right\rangle_H$, где $\sigma_l=\pm1$, $\lambda_l>0$, а $\{\varphi_l\}$ — полное ортонормированное множество собственных векторов оператора C [5]. Зададим отображение $K:D\to H$ на базисе $\{e_l\}_{l=1}^{\dim D}$ пространства D, полагая $Ke_l=\lambda_l\varphi_l$. Тогда очевидно, что $K^*:H\to D$ определяется следующим образом: $K^*\varphi_l=\lambda_le_l$. Кроме того, определим самосопряженный оператор $\sigma:D\to D$ из соотношений $\sigma e_l=\sigma_le_l$. Несомненно, имеет место факторизация

$$\left[T^*,T\right]=2i\left[X,Y\right]=C=K\sigma K^*, \tag{9}$$

где $K^*:H\to D$ — отображение Гильберта–Шмидта, а σ — диагональная инволюция в D.

Учитывая (9), очевидно, что

$$e^{-irX}Ye^{irX}-Y=\int\limits_0^r\frac{d}{dt}e^{-itX}Ye^{itX}=-\frac{1}{2}\int\limits_0^r e^{-itX}K\sigma K^*e^{itX}dt. \tag{10}$$

Так как X — абсолютно непрерывный и C — ядерный, то по теореме Пирсона [6] существуют сильные пределы левой части (10) при $r\to\pm\infty$. Следовательно, из (4) и (10) имеем

$$Y=S^{-}_{X}(Y)+\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}e^{-itX}K\sigma K^*e^{itX}dt. \tag{11}$$

Определим отображение $J : H \to \tilde{H} = L^2\left(\left(-\infty,+\infty\right),D\right)$, полагая

$$\left(Jg\right)\left(t\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} K^* e^{itX} g, \quad \forall g \in H, \quad \forall t \in \left(-\infty,+\infty\right). \tag{12}$$

Таким образом, равенство (11) принимает вид

$$Y = S_X^-\left(Y\right) + J^* \sigma \chi_{[0,+\infty)} J, \tag{13}$$

где $\chi_{[0,+\infty)}$ — характеристическая функция полуоси $[0,+\infty)$.

Пусть F — векторное преобразование Фурье в $\tilde{H}$:

$$\left(Ff\right)\left(x\right) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-N}^{N} f\left(t\right) e^{itx} dt, \quad \forall f \in \tilde{H}.$$

Поскольку F^* (обратное преобразование Фурье) коммутирует с постоянным оператором σ, то (13) принимает вид

$$Y = S_X^-\left(Y\right) + J^* F \sigma \left(F^* \chi_{[0,+\infty)} F\right) F^* J, \tag{14}$$

где оператор $F^* \chi_{[0,+\infty)} F$ по формуле Племеля [1] имеет вид (6). Пусть $U : H \to \hat{H}$ — унитарное отображение, построенное в теореме 1. Так как

$$\left(J e^{isX} g\right)\left(t\right) = \left(Jg\right)\left(t+s\right), \quad \forall g \in H, \quad \forall s \in \left(-\infty,+\infty\right),$$

то для всех вещественных s имеем

$$\left(F^* J U^* e^{is\hat{X}} f\right)\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \left(JU^* f\right)\left(t+s\right) dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(t-s)x} \left(JU^* f\right)\left(t\right) dt = \left(e^{is\hat{X}} F^* J U^* f\right)\left(x\right), \quad \forall f \in \hat{H}.$$

Поэтому оператор $F^* J U^*$ коммутирует с операторами $e^{is\hat{X}}$, а значит, и с $\hat{X}$, и следовательно, по теореме 1 имеет вид

$$\left(F^* J U^* f\right)\left(x\right) = \alpha\left(x\right) f\left(x\right), \quad \forall f \in \hat{H}, \tag{15}$$

где $\alpha\left(x\right)$ — некоторая измеримая оператор-функция. Так как символ $S_X^-\left(Y\right)$ также коммутирует с X, то

$$\left(S_{\hat{X}}^-\left(\hat{Y}\right) f\right)\left(x\right) = \beta\left(x\right) f\left(x\right), \quad \forall f \in \hat{H}, \tag{16}$$

где $\beta(x)$ — некоторая измеримая существенно ограниченная самосопряженная оператор-функция. Таким образом, оператор $\hat{T} = \hat{X} + i\hat{Y}$ в пространстве $\hat{H}$ из (2), (14)–(16) имеет вид (5).

Если определим отображение $\hat{K} : D \to \hat{H}$, полагая

$$\left(\hat{K}a\right)(x) = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\alpha^*(x)\,a, \quad \forall a \in D, \tag{17}$$

то очевидно, что $\hat{K}^* : \hat{H} \to D$ имеет вид

$$\hat{K}^* f = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\sigma(X)} \alpha(t)\, f(t)\, dt, \quad \forall f \in \hat{H}. \tag{18}$$

Тогда из (5) нетрудно проверить, что самокоммутатор $\hat{C}$ оператора $\hat{T}$ будет иметь вид $\hat{C} = \hat{K}\sigma\hat{K}^*$. Поскольку $\hat{K} = UK$ и K — отображение Гильберта–Шмидта, то $\hat{K}^*$ — также отображение Гильберта–Шмидта, которое (рассмотренное как оператор в L^2) определяет ядро Гильберта–Шмидта $\alpha(x)$ для почти всех $x \in \sigma(X)$ [5].

Вычислим теперь символы оператора $\hat{T}$. Пусть L_s — оператор сдвига в $\tilde{H}$, т.е.

$$(L_s g)(x) = g(x - s), \quad \forall g \in \tilde{H}, \quad \forall s \in (-\infty, +\infty).$$

Тогда очевидно, что $\forall g \in \tilde{H}$, $\forall s \in (-\infty, +\infty)$

$$\left(Fe^{-is\hat{X}} g\right)(x) = (L_s F g)(x), \qquad \left(e^{is\hat{X}} F^* g\right)(x) = (F^* L_{-s} g)(x).$$

Используя соотношение $L_{-s}\chi_{[0,+\infty)}L_s = \chi_{[-s,+\infty)}$, имеем

$$\lim_{s\to-\infty}\left(e^{is\hat{X}} F^* \chi_{[0,+\infty)} F e^{-is\hat{X}} g\right)(x) = 0, \quad \forall g \in \tilde{H},$$

$$\lim_{s\to+\infty}\left(e^{is\hat{X}} F^* \chi_{[0,+\infty)} F e^{-is\hat{X}} g\right)(x) = g(x), \quad \forall g \in \tilde{H}.$$

Таким образом, из определения символов (4) и представлений (14)–(16) получаем, что справедливы (7), (8). Теорема доказана.

Далее предположим только, что C — компактный самокоммутатор. Тогда посредством ряда Шмидта можем факторизовать модельный самокоммутатор $\hat{C}$ в пространстве $\hat{H}$ (1) следующим хорошо известным способом [5, 7]:

$$\left(\hat{C}f\right)(x) = \frac{1}{\pi}\alpha^*(x)\,\sigma \int\limits_{\sigma(X)} \alpha(t)\, f(t)\, d\mu(t), \quad \forall f \in \hat{H}, \tag{19}$$

где $\alpha_{lj}(t) = \sqrt{\pi}\,\lambda_l\,\overline{\varphi_{lj}(t)}$, $\sigma = \operatorname{diag}(\sigma_l)$ (здесь используются те же обозначения, что и в доказательстве теоремы 2, $\varphi_{lj}(x)$ – j-я компонента собственной функции $\varphi_l(x)$ оператора $\hat{C}$).

Пусть $P_{ac}(X)$ — ортопроектор на абсолютно непрерывное подпространство оператора X. В случае, когда ядро $\alpha(x)$ существенно ограничено относительно меры μ, имеет смысл следующий оператор:

$$\left(P_{ac}\left(\hat{X}\right)\hat{A}f\right)(x) = \alpha^*(x)\,\sigma P_-\left(\alpha(\cdot)\,f(\cdot)\right), \quad \forall f \in \hat{H} \tag{20}$$

(в этом случае x принадлежит только $\sigma(X_{ac})$), где

$$(P_- f)(x) = \underset{\varepsilon\to -0}{\text{l.i.m.}}\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma(X)} \frac{f(t)}{(x+i\varepsilon)-t}d\mu(t), \quad \forall x \in \sigma(X_{ac}). \tag{21}$$

Заметим, что в случае, если $\sigma(X_{ac})$ и $\sigma(X_s)$ имеют непустое пересечение, то считаем, что формулы (20) и (21) справедливы на множестве $\sigma(X_{ac}) \setminus \sigma(X_s)$, которое отличается от $\sigma(X_{ac})$ на множество нулевой меры Лебега. Это замечание будет оставаться в силе и при дальнейших рассмотрениях. Поэтому из $2i\left[\hat{X}, P_{ac}\left(\hat{X}\right)\hat{Y}\right] = P_{ac}\left(\hat{X}\right)\hat{C}$ и $2i\left[\hat{X}, P_{ac}\left(\hat{X}\right)\hat{A}\right] = P_{ac}\left(\hat{X}\right)\hat{C}$ следует, что оператор $P_{ac}\left(\hat{X}\right)\hat{Y} - P_{ac}\left(\hat{X}\right)\hat{A}$ коммутирует с $\hat{X}$, а значит, по теореме 1 имеет вид (3). Таким образом, получаем, что оператор $P_{ac}\left(\hat{X}\right)\hat{Y}$ имеет вид

$$\left(P_{ac}\left(\hat{X}\right)\hat{Y}f\right)(x) = \beta(x)\,f(x) + \alpha^*(x)\,\sigma P_-\left(\alpha(\cdot)\,f(\cdot)\right), \tag{22}$$

$\forall f \in \hat{H}$, где оператор P_- имеет вид (21).

Ввиду вышесказанного представим следующее

Определение 3. *Пусть $X = X^*$ — оператор в H. Если соответствующее отображение $\hat{K} : D \to \hat{H}$ (17), которое участвует в факторизации оператора $\hat{C}$ (19), определяет измеримое существенно ограниченное относительно меры μ ядро $\alpha(x)$, то отображение $K : D \to H$ называется X-представимым.*

С учетом этого определения понятие X-гладкости, введенное в [8], может быть определено следующим образом: отображение $K : D \to H$ называется X-гладким, если оно X-представимо и оператор X — абсолютно непрерывный.

Теперь предположим только, что C — ядерный самокоммутатор. Поскольку $S_X^{\pm}(Y)$ коммутируют с X, то они также коммутируют с $P_{ac}(X)$. Поэтому в этом случае применимы рассуждения доказательства теоремы 2 к оператору $P_{ac}(X)\,Y$.

Таким образом, доказано следующее обобщение теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть $T = X + iY$ $(X = X^*,\ Y = Y^*)$ — разложение оператора T в пространстве H. Предположим, что выполнено по крайней мере одно из условий:*

1) Отображение $K : D \to H$ из определения 3 является X-представимым.

2) Оператор T имеет ядерный самокоммутатор C.

Тогда T унитарно эквивалентен оператору $\hat{T} = \hat{X} + i\hat{Y}$ в пространстве $\hat{H}$ (1), где оператор $\hat{X}$ имеет вид (2), а оператор $P_{ac}\left(\hat{X}\right)\hat{Y}$ — вид (22), причем при выполнении условия 2) $\alpha(x)$ — оператор-функция Гильберта–Шмидта для почти всех $x \in \sigma(X)$ относительно меры μ. Кроме того, существуют $P_{ac}(X)\,S_X^{\pm}(T)$, причем $P_{ac}\left(\hat{X}\right)S_{\hat{X}}^{\pm}\left(\hat{T}\right)$ представлены операторами умножения на существенно ограниченные оператор-функции и имеют вид (7), (8).

2. Теоремы о разложении пространства H

Далее для краткости будем обозначать $\mathbf{Z}_+$ — множество всех целых неотрицательных чисел, а $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{N}$ — соответственно множество всех целых чисел и всех натуральных чисел. Следующая теорема уточняет результат [9].

Теорема 4. *Пусть A и B — операторы в H. Тогда наибольшее подпространство $H_0 \subset H$, такое что $AH_0 \subset H_0$, $BH_0 \subset H_0$ и $AB|_{H_0} = BA|_{H_0}$ имеет вид*

$$H_0 = \bigcap_{m,n \in \mathbf{N}} \ker\left(A^m B^n - B^n A^m\right). \tag{23}$$

Ортогональное дополнение к H_0 имеет вид

$$\begin{aligned} H_1 &= \operatorname{span}\left\{(A^*)^m (B^*)^n [A^*, B^*]\, H,\ \ m, n \in \mathbf{Z}_+\right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{(B^*)^n (A^*)^m [A^*, B^*]\, H,\ \ m, n \in \mathbf{Z}_+\right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{\left((A^*)^m (B^*)^n - (B^*)^n (A^*)^m\right) H,\ \ m, n \in \mathbf{N}\right\}. \end{aligned} \tag{24}$$

Доказательство. Обозначим для краткости $A^* = L$, $B^* = Q$. Проверим сначала эквивалентность определений (24). Предположим, что выполнено

$$H_1 = \operatorname{span}\left\{L^m Q^n [L, Q]\, H,\ \ m, n \in \mathbf{Z}_+\right\}.$$

Тогда из тождества

$$LQ = QL + [L, Q] \tag{25}$$

следует, что

$$\begin{aligned} &L^{m-1} LQQ^{n-1} [L, Q] \\ &= L^{m-1} QLQ^{n-1} [L, Q] + L^{m-1} [L, Q] Q^{n-1} [L, Q]. \end{aligned}$$

Очевидно, что образ второго слагаемого лежит в H_1, откуда следует, что образ первого слагаемого лежит в H_1. Применяя последовательно к первому слагаемому формулу (25), имеем

$$QL^m Q^{n-1} [L, Q] H \subset H_1, \quad \forall m \in \mathbf{Z}_+, \ n \in \mathbf{N}.$$

В частности, $QL^m [L, Q] H \subset H_1$, $\forall m \in \mathbf{Z}_+$. Далее применяя аналогично формулу (25), получаем

$$Q^n L^m [L, Q] H \subset H_1, \quad \forall m, n \in \mathbf{Z}_+,$$

а значит, и замкнутая линейная оболочка лежит в H_1. Обратное включение показывается аналогично. Поэтому первые два определения (24) эквивалентны.

Теперь докажем, что третье определение (24) эквивалентно первым двум. Пользуясь (25), преобразуем

$$\begin{aligned} &L^m Q^n - Q^n L^m = L^m Q^n - L^{m-1} QLQ^{n-1} + L^{m-1} QLQ^{n-1} - Q^n L^m \\ &= L^{m-1} [L, Q] Q^{n-1} + L^{m-1} Q [L, Q] Q^{n-2} + L^{m-1} Q^2 LQ^{n-2} - Q^n L^m. \end{aligned}$$

Очевидно, что образы первого и второго слагаемых лежат в H_1. Проделывая далее аналогичные выкладки, имеем

$$L^m Q^n - Q^n L^m = R + L^{m-1} Q^n L - Q^n L^m,$$

где $RH \subset H_1$. Применяя аналогичным образом ко второму слагаемому формулу (25), получаем

$$L^m Q^n - Q^n L^m = R_0 + Q^n L^m - Q^n L^m = R_0,$$

причем $R_0 H \subset H_1$. Таким образом,

$$\tilde{H}_1 = \operatorname{span} \{ (L^m Q^n - Q^n L^m) H, \ m, n \in \mathbf{N} \} \subset H_1.$$

Для проверки эквивалентности определений (24) осталось доказать, что $H_1 \subset \tilde{H}_1$. Очевидно, что $[L, Q] H \subset \tilde{H}_1$. Из тождеств

$$Q [L, Q] = LQ^2 - Q^2 L - [L, Q] Q,$$

$$L\,[L,Q] = L^2 Q - QL^2 - [L,Q]\,L$$

следует, что $Q\,[L,Q]\,H \subset \tilde{H}_1$ и $L\,[L,Q]\,H \subset \tilde{H}_1$. Умножая эти тождества на Q, L и применяя формулу (25), получим

$$Q^n\,[L,Q] = LQ^{n+1} - Q^{n+1}L - R_1,$$

$$L^m\,[L,Q] = L^{m+1}Q - QL^{m+1} - R_2,$$

где R_1 и R_2 — слагаемые, образы которых лежат в $\tilde{H}_1$ из принципа индукции. Следовательно, образы левых частей также лежат в $\tilde{H}_1$ для любых $m, n \in \mathbf{Z}_+$. Проверим, что $Q\tilde{H}_1 \subset \tilde{H}_1$ и $L\tilde{H}_1 \subset \tilde{H}_1$. Так как

$$Q\,(L^m Q^n - Q^n L^m) = QL^m Q^n - Q^{n+1} L^m,$$

то применяя последовательно к первому слагаемому формулу (25) и учитывая, что $L^k\,[L,Q]\,H \subset \tilde{H}_1$, $k \in \mathbf{Z}_+$, получим, что $Q\tilde{H}_1 \subset \tilde{H}_1$. Аналогично, $L\tilde{H}_1 \subset \tilde{H}_1$. Следовательно, $L^m Q^n \tilde{H}_1 \subset \tilde{H}_1$. В частности, $L^m Q^n\,[L,Q]\,H \subset \tilde{H}_1$, т.е. $H_1 \subset \tilde{H}_1$. Поэтому все определения (24) эквивалентны.

Поскольку пространство H разлагается в сумму

$$H = \overline{(L^m Q^n - Q^n L^m)\,H} \oplus \ker\,(B^n A^m - A^m B^n)\,,$$

где черта обозначает замыкание, то беря объединение по m, n с одной стороны и пересечение — с другой, получаем, что $H = H_1 \oplus H_0$, т.е. справедлива формула (23).

Из (24) следует, что $QH_1 \subset H_1$ и $LH_1 \subset H_1$, т.е. $AH_0 \subset H_0$ и $BH_0 \subset H_0$. Поскольку $[L,Q]\,H \subset H_1$, то $H_0 = H_1^{\perp} \subset \ker\,[A,B]$, и поэтому $AB|_{H_0} = BA|_{H_0}$. Предположим, что в H_1 существует подпространство M, такое что $AM \subset M$, $BM \subset M$ и $AB|_M = BA|_M$. Тогда $M \subset \ker\,[A,B]$, и следовательно, $[A,B]\,A^m B^n g = 0$, $\forall g \in M$. Поэтому $\forall h \in H$, $\forall g \in M$ имеем

$$0 = \langle [A,B]\,A^m B^n g, h\rangle_H = -\,\langle g, Q^n L^m\,[L,Q]\,h\rangle_H\,,\ \forall m,n \in \mathbf{Z}_+,$$

т.е. подпространства M и H_1 ортогональны. Таким образом, подпространство M тривиально, а значит, H_0 — наибольшее подпространство, такое что $AH_0 \subset H_0$, $BH_0 \subset H_0$ и $AB|_{H_0} = BA|_{H_0}$. Теорема доказана.

Определение 4. *Оператор T в пространстве H называется вполне ненормальным, если не существует приводящего оператор T подпространства, на котором T индуцирует нормальный оператор.*

Пусть $T = X + iY$, где $X = X^*$, $Y = Y^*$. Как простое следствие теоремы 4 имеем следующую теорему о разложении пространства H в ортогональную сумму приводящих подпространств.

Теорема 5. *Для любого оператора T в пространстве H существует единственное разложение пространства H в ортогональную сумму $H = H_1 \oplus H_0$ приводящих T подпространств, такое что $T|_{H_0}$ нормален, а $T|_{H_1}$ вполне ненормален, причем*

$$\begin{aligned} H_1 &= \operatorname{span}\left\{(T^*)^m T^n [T^*,T] H,\ \ m,n \in \mathbf{Z}_+\right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{T^n (T^*)^m [T^*,T] H,\ \ m,n \in \mathbf{Z}_+\right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{((T^*)^m T^n - T^n (T^*)^m) H,\ \ m,n \in \mathbf{N}\right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{X^m Y^n [X,Y] H,\ \ m,n \in \mathbf{Z}_+\right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{Y^n X^m [X,Y] H,\ \ m,n \in \mathbf{Z}_+\right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{(X^m Y^n - Y^n X^m) H,\ \ m,n \in \mathbf{N}\right\}, \qquad (26) \\ H_0 &= \bigcap_{m,n\in\mathbf{N}} \ker\left((T^*)^m T^n - T^n (T^*)^m\right) \\ &= \bigcap_{m,n\in\mathbf{N}} \ker\left(X^m Y^n - Y^n X^m\right). \qquad (27) \end{aligned}$$

3. Теорема об унитарной эквивалентности

В предыдущей статье [10] мы ввели понятие сингулярного метрического узла, отправляясь от сингулярной интегральной модели (5). Здесь можем ввести соответствующее понятие независимо от модели (5).

Определение 5. *Гипонормальным метрическим узлом называется совокупность $\Delta = (T,H,K,D,\sigma)$, для которой выполнено соотношение (9), где оператор T действует в пространстве H, отображение K действует из вспомогательного пространства D в H, а $\sigma = \sigma^*$ — метрика в D.*

Определение 6. *Гипонормальные метрические узлы*

$$\Delta = (T,H,K,D,\sigma), \qquad \Delta' = \left(T',H',K',D,\sigma'\right)$$

называются унитарно-эквивалентными, если $\sigma = \sigma'$ и существует унитарное отображение $U : H \to H'$, такое что $UT = T'U$ и $UK = K'$.

Определение 7. *Гипонормальный метрический узел Δ называется простым, если*

$$H = \operatorname{span}\left\{X^m Y^n K D,\ \ m,n \in \mathbf{Z}_+\right\} = \operatorname{span}\left\{Y^n X^m K D,\ \ m,n \in \mathbf{Z}_+\right\}. \qquad (28)$$

Заметим, что по теореме 5 вполне ненормальный оператор T определяет простой гипонормальный метрический узел.

В случае обратимости метрики в [10] мы ввели определяющую функцию оператора T:

$$E\left(z,w\right)=\sigma^{-1}+\tfrac{1}{2i}K^{*}\left(X-zI_{H}\right)^{-1}\left(Y-wI_{H}\right)^{-1}K, \tag{29}$$

которая при $\sigma=I$ была ранее введена в [1]. Она имеет следующие свойства:

$$K\sigma E\left(z,w\right)=\left\{\left(X-zI_{H}\right),\left(Y-wI_{H}\right)\right\}K, \tag{30}$$

$$E\left(z,w\right)\sigma K^{*}=K^{*}\left\{\left(X-zI_{H}\right)^{-1},\left(Y-wI_{H}\right)^{-1}\right\}, \tag{31}$$

$$E\left(z,w\right)^{-1}=\sigma-\tfrac{1}{2i}\sigma K^{*}\left(Y-wI_{H}\right)^{-1}\left(X-zI_{H}\right)^{-1}K\sigma, \tag{32}$$

$$E^{*}\left(\bar{z},\bar{w}\right)\sigma E\left(z,w\right)=\sigma^{-1}, \tag{33}$$

где $\{A,B\}=ABA^{-1}B^{-1}$ — мультипликативный коммутатор операторов A и B.

Используя тождество

$$\begin{gathered}\left(X-zI_{H}\right)^{-1}\left(Y-w_{1}I_{H}\right)^{-1}-\left(Y-w_{2}I_{H}\right)^{-1}\left(X-zI_{H}\right)^{-1}\\ -\left(Y-w_{2}I_{H}\right)^{-1}\left(X-zI_{H}\right)^{-1}\left[X,Y\right]\left(X-zI_{H}\right)^{-1}\left(Y-w_{1}I_{H}\right)^{-1}\\ =\left(w_{1}-w_{2}\right)\left(Y-w_{2}I_{H}\right)^{-1}\left(X-zI_{H}\right)^{-1}\left(Y-w_{1}I_{H}\right)^{-1},\end{gathered}$$

легко проверить, что

$$\begin{gathered}\tfrac{2i\sigma^{-1}}{w_{1}-w_{2}}\left[E\left(z,w_{2}\right)^{-1}E\left(z,w_{1}\right)-I_{D}\right]\\ =K^{*}\left(Y-w_{2}I_{H}\right)^{-1}\left(X-zI_{H}\right)^{-1}\left(Y-w_{1}I_{H}\right)^{-1}K.\end{gathered} \tag{34}$$

Аналогично, из тождества

$$\begin{gathered}\left(X-z_{1}I_{H}\right)^{-1}\left(Y-wI_{H}\right)^{-1}-\left(Y-wI_{H}\right)^{-1}\left(X-z_{2}I_{H}\right)^{-1}\\ -\left(X-z_{1}I_{H}\right)^{-1}\left(Y-wI_{H}\right)^{-1}\left[X,Y\right]\left(Y-wI_{H}\right)^{-1}\left(X-z_{2}I_{H}\right)^{-1}\\ =\left(z_{1}-z_{2}\right)\left(X-z_{1}I_{H}\right)^{-1}\left(Y-wI_{H}\right)^{-1}\left(X-z_{2}I_{H}\right)^{-1}\end{gathered}$$

имеем

$$\begin{gathered}\left[E\left(z_{1},w\right)E\left(z_{2},w\right)^{-1}-I_{D}\right]\tfrac{2i\sigma^{-1}}{z_{1}-z_{2}}\\ =K^{*}\left(X-z_{1}I_{H}\right)^{-1}\left(Y-wI_{H}\right)^{-1}\left(X-z_{2}I_{H}\right)^{-1}K.\end{gathered} \tag{35}$$

Поскольку из (33) следует, что

$$\sigma^{-1} E\left(z, w_2\right)^{-1} E\left(z, w_1\right)=E^*\left(\bar{z}, \overline{w_2}\right) \sigma E\left(z, w_1\right),$$

то из (34) получаем следующее свойство $E(z, w)$:

$$\begin{gathered}
2 i \frac{E^*\left(\overline{z_2}, \overline{w_2}\right) \sigma E\left(z_2, \overline{w_1}\right)-E^*\left(z_1, \overline{w_2}\right) \sigma E\left(\overline{z_1}, \overline{w_1}\right)}{\left(z_2-\overline{z_1}\right)\left(w_2-\overline{w_1}\right)} \\
=K^*(Y-w_2 I_H)^{-1}(X-z_2 I_H)^{-1}(X-\overline{z_1} I_H)^{-1}(Y-\overline{w_1} I_H)^{-1} K .
\end{gathered} \tag{36}$$

Аналогично, из (35) следует, что

$$\begin{gathered}
2 i \frac{E\left(z_2, w_2\right) \sigma E^*\left(z_1, \overline{w_2}\right)-E\left(z_2, \overline{w_1}\right) \sigma E^*\left(z_1, w_1\right)}{\left(z_2-\overline{z_1}\right)\left(w_2-\overline{w_1}\right)} \\
=K^*(X-z_2 I_H)^{-1}(Y-w_2 I_H)^{-1}(Y-\overline{w_1} I_H)^{-1}(X-\overline{z_1} I_H)^{-1} K .
\end{gathered} \tag{37}$$

Используя непосредственно определение (29), легко проверить, что у унитарно-эквивалентных узлов совпадают определяющие функции. Для простых узлов имеет место и обратный факт. А именно, справедлива

Теорема 6. *Предположим, что заданы простые гипонормальные метрические узлы Δ и Δ', у которых $\dim H=\dim H'$ и в окрестности хотя бы одной пары комплексных точек (z_0, w_0) аналитичности совпадают определяющие функции $E(z, w)=E'(z, w)$. Тогда узлы Δ и Δ' унитарно-эквивалентны.*

Доказательство. Поскольку $\sigma^{-1}=E(\infty, w)$, то у узлов совпадают метрики $\sigma=\sigma'$. Используя разложение резольвенты $(zI-A)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{z^{n+1}}$ для $|z| \geq\|A\|$ и тождество (34), получаем, что у узлов совпадают операторы

$$K^* Y^n X^k Y^l K=K'^* Y'^m X'^k Y'^l K', \quad \forall n, k, l \in \mathbf{Z}_{+}. \tag{38}$$

Определим U на линейной оболочке следующим образом:

$$\begin{aligned}
U X^n Y^k K h & =X'^n Y'^k K' h, \quad \forall h \in D, \quad \forall n, k \in \mathbf{Z}_{+}, \\
U Y^m X^s K \tilde{h} & =Y'^m X'^s K' \tilde{h}, \quad \forall \tilde{h} \in D, \quad \forall m, s \in \mathbf{Z}_{+}.
\end{aligned} \tag{39}$$

В силу простоты узлов Δ и Δ' отображение U действует из всего пространства H на все пространство H', и поэтому для того, чтобы проверить его унитарность, достаточно проверить его изометричность. Проверим сохранение скалярного произведения. Из (38) и (39) имеем

$$\begin{gathered}
\left\langle U X^s Y^m K h, U X^n Y^k K \tilde{h}\right\rangle_{H'}=\left\langle X'^s Y'^m K h, X'^m Y'^k K' \tilde{h}\right\rangle_{H'} \\
=\left\langle K'^* Y'^k X'^{n+s} Y'^m K' h, \tilde{h}\right\rangle_D=\left\langle K^* Y^k X^{n+s} Y^m K h, \tilde{h}\right\rangle_D \\
=\left\langle X^s Y^m K h, X^n Y^k K \tilde{h}\right\rangle_H, \quad \forall h, \tilde{h} \in D, \quad \forall s, m, n, k \in \mathbf{Z}_{+}.
\end{gathered}$$

Таким образом, U — унитарное отображение.

Проверим, что U удовлетворяет определению унитарной эквивалентности. В силу (39) $UK = K'$ (при $n = k = 0$). Из (39) также имеем

$$\begin{aligned} 0 &= UXX^{n-1}Y^kKh - X'X'^{n-1}Y'^kK'h \\ &= (UX - X'U)\,X^{n-1}Y^kKh, \quad \forall h \in D, \quad \forall n \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{Z}_+; \\ 0 &= UYY^{m-1}X^sK\tilde{h} - Y'Y'^{m-1}X'^sK'\tilde{h} \\ &= (UY - Y'U)\,Y^{m-1}X^sK\tilde{h}, \quad \forall \tilde{h} \in D, \quad \forall m \in \mathbf{N}, s \in \mathbf{Z}_+. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу простоты узла Δ, равенства $UX = X'U$ и $UY = Y'U$ выполнены во всем пространстве H, а значит, $UT = T'U$ и узлы Δ и Δ' унитарно-эквивалентны. Теорема доказана.

4. Задачи Римана–Гильберта

Пусть теперь оператор $P_{ac}\,(X)\,Y$ представлен моделью (22).

Определение 8. *D-значная оператор-функция*

$$S_X(x,z) = \begin{cases} I_D + \alpha(x)\Big(\beta(x) - zI_{\hat{H}(x)}\Big)^{-1}\alpha^*(x)\,\sigma, \ \forall x \in \sigma(X_{ac}), \\ I_D, \quad \forall x \notin \sigma\,(X_{ac})\,, \end{cases} \tag{40}$$

определенная для всех невещественных z, называется вещественной характеристической функцией оператора T.

Заметим, что это понятие обобщает понятие характеристической функции сингулярного метрического узла, введенное в [10], на случай существования сингулярного спектра оператора X. Свойства вещественной характеристической функции аналогичны свойствам характеристической функции сингулярного метрического узла [10], и мы их опускаем.

Теперь диагонализуем оператор Y в прямом интеграле гильбертовых пространств

$$\tilde{H} = \int\limits_{\sigma(Y)} \oplus \tilde{H}\,(y)\,d\tilde{\mu}\,(y)\,, \tag{41}$$

где мера $\tilde{\mu}$ представлена в виде суммы меры Лебега и сингулярной меры. Поэтому, аналогично теореме 3 (при выполнении надлежащих условий), соответствующие операторы $\tilde{Y}$ и $P_{ac}\left(\tilde{Y}\right)\tilde{X}$ будут иметь вид

$$\left(\tilde{Y}g\right)(y) = yg\,(y)\,, \tag{42}$$

$$\left(P_{ac}\left(\tilde{Y}\right)\tilde{X}g\right)(y)=\tilde{\beta}(y)\,g(y)-\tilde{\alpha}^{*}(y)\,\sigma\tilde{P}_{-}\left(\tilde{\alpha}(\cdot)\,g(\cdot)\right), \tag{43}$$

$\forall g\in\tilde{H}$, где $\tilde{P}_{-}$ — сингулярный интегральный оператор (21) относительно меры $\tilde{\mu}$.

Определение 9. *D-значная оператор-функция*

$$S_Y(z,y)=\begin{cases} I_D+\sigma\tilde{\alpha}(y)\left(\tilde{\beta}(y)-\tilde{\alpha}^{*}(y)\,\sigma\tilde{\alpha}(y)\right.\\ \qquad\left.-zI_{\tilde{H}(y)}\right)^{-1}\tilde{\alpha}^{*}(y), \quad \forall y\in\sigma(Y_{ac}),\\ I_D, \quad \forall y\notin\sigma(Y_{ac}), \end{cases} \tag{44}$$

определенная для всех невещественных z, называется мнимой характеристической функцией оператора T.

Эта функция имеет свойства, аналогичные свойствам вещественной характеристической функции. В частности, для всех $y\in\sigma(Y_{ac})$ справедливо

$$S_Y(z,y)^{-1}=I_D-\sigma\tilde{\alpha}(y)\left(\tilde{\beta}(y)-zI_{\tilde{H}(y)}\right)^{-1}\tilde{\alpha}^{*}(y). \tag{45}$$

Далее получим задачи Римана–Гильберта, связывающие граничные значения определяющей функции с характеристическими функциями. Для случая гипонормального оператора T такие задачи были получены в [1, 7].

Теорема 7. *Предположим, что оператор $T=X+iY$ ($X=X^{*}$, $Y=Y^{*}$) в пространстве H имеет ядерный самокоммутатор $C=K\sigma K^{*}$ или что отображение $K:D\to H$ является X-представимым и Y-представимым. Тогда для почти всех вещественных x и y относительно меры Лебега определяющая функция оператора T удовлетворяет следующим задачам Римана–Гильберта:*

$$E(x+i0,w)=S_X(x,w)\,E(x-i0,w), \tag{46}$$

$$E(z,y+i0)=E(z,y-i0)\,S_Y(z,y), \tag{47}$$

причем $S_X(x,w)$ — вещественная характеристическая функция (40) и $S_Y(z,y)$ — мнимая характеристическая функция (44).

Кроме того, характеристические функции унитарно-эквивалентных гипонормальных метрических узлов совпадают. Обратно, оператор-функции $S_X(x,w)$ и $S_Y(z,y)$ определяют простые гипонормальные метрические узлы с абсолютно непрерывными операторами X и Y соответственно единственным образом с точностью до унитарной эквивалентности.

Доказательство. Вывод формулы (46) дословно повторяет вывод соответствующего результата в [10]. Поэтому доказательство задач Римана–Гильберта в случае существования сингулярного спектра операторов X и Y проиллюстрируем на выводе соотношения (47).

Приведем оператор T к виду, в котором оператор Y имеет вид (42) в пространстве (41). Для всех $y \in \sigma(Y)$, $a \in D$ и невещественных z обозначим $f(y,z;a) = \left[\left(\tilde{X} - zI_{\tilde{H}}\right)^{-1} \tilde{\alpha}^*(\cdot)\, a\right](y)$. Так как $\left[\left(\tilde{X} - zI_{\tilde{H}}\right) f(\cdot,z;a)\right](y) = \tilde{\alpha}^*(y)\, a$, то из (43) получаем, что для всех $y \in \sigma(Y_{ac})$

$$\left(\tilde{\beta}(y) - zI_{\tilde{H}(y)}\right) f(y,z;a) - \tilde{\alpha}^*(y)\, \sigma \tilde{P}_-\left[\tilde{\alpha}(\cdot)\, f(\cdot,z;a)\right] = \tilde{\alpha}^*(y)\, a.$$

Умножим обе части слева на $\tilde{\alpha}(y)\left(\tilde{\beta}(y) - zI_{\tilde{H}(y)}\right)^{-1}$ и обозначим $\tilde{P}_+ = P_{ac}(Y) - \tilde{P}_-$. Тогда

$$\begin{gathered}\left(\tilde{P}_+ + \tilde{P}_-\right)\left[\tilde{\alpha}(\cdot)\, f(\cdot,z;a)\right] - \tilde{\alpha}(y)\left(\tilde{\beta}(y) - zI_{\tilde{H}(y)}\right)^{-1} \tilde{\alpha}^*(y)\, \sigma \\ \times \tilde{P}_-\left[\tilde{\alpha}(\cdot)\, f(\cdot,z;a)\right] = \tilde{\alpha}(y)\left(\tilde{\beta}(y) - zI_{\tilde{H}(y)}\right)^{-1} \tilde{\alpha}^*(y)\, \sigma\sigma^{-1} a.\end{gathered}$$

Вычитая из обеих частей $\sigma^{-1}a$, вышеуказанное тождество можно переписать в виде

$$\begin{gathered}\sigma^{-1}a - \tilde{P}_+\left[\tilde{\alpha}(\cdot)\, f(\cdot,z;a)\right] \\ = \sigma^{-1} S_Y(z,y)^{-1}\, \sigma\left[\sigma^{-1}a + \tilde{P}_-\left[\tilde{\alpha}(\cdot)\, f(\cdot,z;a)\right]\right],\end{gathered} \tag{48}$$

где $S_Y(z,y)^{-1}$ имеет вид (45).

Используя определение $\tilde{K}$ в терминах сингулярной интегральной модели (42), (43) (см. (17), (18)), обратную к определяющей функции (32) можно записать как интеграл

$$\sigma^{-1} E(z,w)^{-1}\, \sigma^{-1} a = \sigma^{-1} a - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma(Y)} \frac{\tilde{\alpha}(y)\, f(y,z;a)}{y - w}\, d\tilde{\mu}(y), \tag{49}$$

откуда, очевидно, получаем

$$\sigma^{-1} E(z, y \pm i0)^{-1}\, \sigma^{-1} a = \sigma^{-1} a \mp \tilde{P}_\pm\left[\tilde{\alpha}(\cdot)\, f(\cdot,z;a)\right] \tag{50}$$

для почти всех вещественных y относительно меры Лебега. Таким образом, из (44), (48) и (50) (после обращения) окончательно получаем, что определяющая функция $E(z,w)$ удовлетворяет задаче Римана–Гильберта (47).

Так как определяющие функции унитарно-эквивалентных гипонормальных метрических узлов совпадают, то из (46) и (47) следует, что характеристические функции унитарно-эквивалентных узлов также совпадают. Обратно, в силу существования $E(z,w)^{-1}$, данные задачи Римана–Гильберта с заданной нормировкой $E(\infty,w)=\sigma^{-1}$ $\left(E(z,\infty)=\sigma^{-1}\right)$ имеют единственное решение для любых функций (40) и (44) [11], а значит, из теоремы 6 следует последнее утверждение теоремы. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Из (46), (47) и вида характеристических функций (40) и (44) следует, что определяющая функция оператора T является непрерывной на спектрах операторов X и Y для тех $z=x$ и $w=y$, для которых $\alpha(x)=0$ и $\tilde{\alpha}(y)=0$, т.е. там, где оператор T нормален.

5. Теорема существования

Очевидно, что из (29) следует оценка

$$\left\|E(z,w)-\sigma^{-1}\right\|_D \leq \eta\,|\mathrm{Im}\,z|^{-1}\,|\mathrm{Im}\,w|^{-1} \tag{51}$$

для некоторой константы $\eta>0$.

Образуем следующую операторнозначную функцию в D:

$$K(z_1,w_1;z_2,w_2)=2i\frac{E(z_2,w_2)\sigma E^*(z_1,\overline{w_2})-E(z_2,\overline{w_1})\sigma E^*(z_1,w_1)}{(z_2-\overline{z_1})(w_2-\overline{w_1})}, \tag{52}$$

которую будем называть ядром гипонормального метрического узла Δ. Эта функция эрмитово-неотрицательна, т.к. из (37)

$$K(z_1,w_1;z_2,w_2)=\Pi(z_2,w_2)\,\Pi^*(z_1,w_1)\,, \tag{53}$$

где

$$\Pi(z,w)=K^*(X-zI_H)^{-1}(Y-wI_H)^{-1}\,. \tag{54}$$

Определение 10. *Оператор-функция $E(z,w):D\to D$ вида (29) называется полуопределяющей функцией пары операторов X и Y, действующих в пространстве H, если выполнено соотношение $2i[X,Y]=K\sigma K^*$, где $Y=Y^*$ и оператор X подобен самосопряженному, т.е. $X=A^{-1}X_0A$ для некоторого обратимого оператора A и самосопряженного оператора X_0.*

Отметим, что в этом случае спектры операторов X и X_0 совпадают и $[X-X^*,Y]=0$.

Используя технику, разработанную в [12, 13], где не указано подобие самосопряженному оператору, можно доказать теорему, которая дает ответ на вопрос, какими свойствами должна обладать оператор-функция $E(z,w)$ в D, чтобы она являлась полуопределяющей функцией.

Теорема 8. *Предположим, что оператор-функция $E(z,w)$ в пространстве D обладает следующими свойствами:*

1) $E(z,w)$ является D-значной аналитической обратимой функцией по невещественным переменным z и w, а также непрерывной функцией для вещественных z и w вне некоторых компактных множеств на вещественной оси.

2) Справедлива оценка (51) для некоторого самосопряженного обратимого оператора σ и константы $\eta > 0$.

3) Выполнено соотношение (33).

4) Ядро $K(z_1,w_1;z_2,w_2)$ (52) является аналитической эрмитово-неотрицательной оператор-функцией для невещественных z_j и w_j $(j = 1,2)$, таких что $z_1 \neq \overline{z_2}$, $w_1 \neq \overline{w_2}$.

Тогда существует надлежащая пара операторов X и Y в некотором пространстве H, для которых $E(z,w)$ является полуопределяющей функцией.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Образуем гильбертово пространство $\hat{H}$ как пространство D-значных аналитических вектор-функций $F(z_1,z_2)$, определенных для невещественных $z_{1,2}$ и представимых в виде линейных комбинаций $K(w_1,w_2;z_1,z_2)\,a$ по невещественным $w_{1,2}$ и векторам $a \in D$, со скалярным произведением

$$\langle F_1(z_1,z_2), F_2(z_1,z_2)\rangle_{\hat{H}} = \langle K(w_1,w_2;w_3,w_4)\,a_1, a_2\rangle_D, \tag{55}$$

где

$$\begin{aligned} F_1(z_1,z_2) &= K(w_1,w_2;z_1,z_2)\,a_1, \quad \forall a_1 \in D, \\ F_2(z_1,z_2) &= K(w_3,w_4;z_1,z_2)\,a_2, \quad \forall a_2 \in D. \end{aligned} \tag{56}$$

После замыкания данной линейной оболочки относительно скалярного произведения (55) и факторизации по ядру данной метрики, получим гильбертово пространство $\hat{H}$. Мы отождествим D с подпространством $\hat{H}$ постоянных вектор-функций. Заметим, что из (55) следует, что

$$\langle F(w_1,w_2), a\rangle_D = \langle F(z_1,z_2), K(w_1,w_2;z_1,z_2)\,a\rangle_{\hat{H}} \tag{57}$$

$\forall a \in D$, $\forall F \in \hat{H}$ (представляя $F(z_1,z_2)$ как линейные комбинации $K(w_3,w_4;z_1,z_2)\,a_0$).

Используя (52), легко проверить, что

$$\tfrac{K(w_1,w_2;z_1,z_2)-K(w_1,w_2;z_1,w)}{z_2-w} = \tfrac{K(w_1,w_2;z_1,z_2)-K(w_1,\bar{w};z_1,z_2)}{\overline{w_2}-w}. \tag{58}$$

Докажем, что для всех $F(z_1,z_2)\in\hat{H}$ и невещественных w оператор $V(w)$ вида

$$V(w)F(z_1,z_2)=F(z_1,z_2)+(w-\bar{w})\,\tfrac{F(z_1,z_2)-F(z_1,w)}{z_2-w} \tag{59}$$

является унитарным в $\hat{H}$. Проверим, что $V(w)$ сохраняет скалярное произведение на элементах (56), линейные комбинации которых плотны в $\hat{H}$.

$$\begin{gathered}\langle V(w)F_1(z_1,z_2),V(w)F_2(z_1,z_2)\rangle_{\hat{H}}=\langle F_1(z_1,z_2),F_2(z_1,z_2)\rangle_{\hat{H}}\\ +(w-\bar{w})\left\langle \tfrac{F_1(z_1,z_2)-F_1(z_1,w)}{z_2-w},F_2(z_1,z_2)\right\rangle_{\hat{H}}\\ +(\bar{w}-w)\left\langle F_1(z_1,z_2),\tfrac{F_2(z_1,z_2)-F_2(z_1,w)}{z_2-w}\right\rangle_{\hat{H}}\\ +(w-\bar{w})(\bar{w}-w)\left\langle \tfrac{F_1(z_1,z_2)-F_1(z_1,w)}{z_2-w},\tfrac{F_2(z_1,z_2)-F_2(z_1,w)}{z_2-w}\right\rangle_{\hat{H}}\\ =\langle F_1(z_1,z_2),F_2(z_1,z_2)\rangle_{\hat{H}}+A_1+A_2+A_3.\end{gathered}$$

Покажем, что $A_1+A_2+A_3=0$. Используя (56), определение скалярного произведения (57) и свойство ядра (58), имеем

$$\begin{gathered}A_1=(w-\bar{w})\left\langle \tfrac{F_1(w_3,w_4)-F_1(w_3,w)}{w_4-w},a_2\right\rangle_D\\ =\tfrac{w-\bar{w}}{\overline{w_2}-w}\left\langle [K(w_1,w_2;w_3,w_4)-K(w_1,\bar{w};w_3,w_4)]\,a_1,a_2\right\rangle_D,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}A_2=(\bar{w}-w)\left\langle F_1(z_1,z_2),\tfrac{K(w_3,w_4;z_1,z_2)-K(w_3,\bar{w};z_1,z_2)}{\overline{w_4}-w}a_2\right\rangle_{\hat{H}}\\ =\tfrac{\bar{w}-w}{w_4-\bar{w}}\left\langle [K(w_1,w_2;w_3,w_4)-K(w_1,w_2;w_3,\bar{w})]\,a_1,a_2\right\rangle_D,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}A_3=\tfrac{(w-\bar{w})(\bar{w}-w)}{(\overline{w_2}-w)(w_4-\bar{w})}\langle [K(w_1,w_2;z_1,z_2)-K(w_1,\bar{w};z_1,z_2)]\,a_1,\\ [K(w_3,w_4;z_1,z_2)-K(w_3,\bar{w};z_1,z_2)]\,a_2\rangle_{\hat{H}}\\ =\tfrac{(w-\bar{w})(\bar{w}-w)}{(\overline{w_2}-w)(w_4-\bar{w})}\langle [K(w_1,w_2;w_3,w_4)-K(w_1,\bar{w};w_3,w_4)\\ -K(w_1,w_2;w_3,\bar{w})+K(w_1,\bar{w};w_3,\bar{w})]\,a_1,a_2\rangle_D.\end{gathered}$$

Сложим эти соотношения и соберем коэффициенты при одинаковых ядрах:

$$\tfrac{(w_4-\overline{w_2})(w-\bar{w})}{(\overline{w_2}-w)(w_4-\bar{w})}K(w_1,w_2;w_3,w_4), \tag{60}$$

$$\tfrac{(w_4-w)(\bar{w}-w)}{(\overline{w_2}-w)(w_4-\bar{w})}K(w_1,\bar{w};w_3,w_4), \tag{61}$$

$$\tfrac{(\overline{w_2}-\bar{w})(w-\bar{w})}{(\overline{w_2}-w)(w_4-\bar{w})}K(w_1,w_2;w_3,\bar{w}), \tag{62}$$

$$\tfrac{(w-\bar{w})(\bar{w}-w)}{(\overline{w_2}-w)(w_4-\bar{w})}K(w_1,\bar{w};w_3,\bar{w}). \tag{63}$$

Из свойства (58) следует, что

$$\begin{aligned}K\left(w_1,w_2;w_3,\bar{w}\right)=\tfrac{\overline{w_2}-w_4}{\overline{w_2}-\bar{w}}&K\left(w_1,w_2;w_3,w_4\right)\\+\tfrac{w_4-\bar{w}}{\overline{w_2}-\bar{w}}&K\left(w_1,w;w_3,w_4\right),\end{aligned}\tag{64}$$

$$\begin{aligned}K\left(w_1,\bar{w};w_3,\bar{w}\right)=\tfrac{w_4-w}{\bar{w}-w}&K\left(w_1,\bar{w};w_3,w_4\right)\\+\tfrac{w_4-\bar{w}}{w-\bar{w}}&K\left(w_1,w;w_3,w_4\right).\end{aligned}\tag{65}$$

Подставляя (64) в (62), имеем

$$\tfrac{(\overline{w_2}-w_4)(w-\bar{w})}{(\overline{w_2}-w)(w_4-\bar{w})}K\left(w_1,w_2;w_3,w_4\right)+\tfrac{w-\bar{w}}{\overline{w_2}-w}K\left(w_1,w;w_3,w_4\right).\tag{66}$$

Аналогично подставляя (65) в (63), получаем

$$\tfrac{(w_4-w)(w-\bar{w})}{(\overline{w_2}-w)(w_4-\bar{w})}K\left(w_1,\bar{w};w_3,w_4\right)+\tfrac{\bar{w}-w}{\overline{w_2}-w}K\left(w_1,w;w_3,w_4\right).\tag{67}$$

Складывая (60), (61), (66) и (67), получаем, что $A_1+A_2+A_3=0$, т.е. оператор $V(w)$ — унитарный.

Предположим, что единица является собственным значением $V(w)$. Тогда для невещественных $z_{1,2}$, $V(w)\,F(z_1,z_2)=F(z_1,z_2)$ для некоторой функции $F(z_1,z_2)\not\equiv 0$ в $\hat{H}$. Поэтому из (59), имеем $\frac{F(z_1,z_2)-F(z_1,w)}{z_2-w}\equiv 0$, $\forall w\neq\bar{w}$, следовательно, $F(z_1,z_2)\equiv F(z_1,w)$, $\forall w\neq\bar{w}$. Возьмем произвольно вещественное y_2. Тогда для любого вектора $a\in D$, используя определение (57), оценку (51) и (52), имеем

$$\begin{aligned}\left|\left\langle F\left(w_1,iy_2\right),a\right\rangle_D\right|^2&=\left|\left\langle F\left(z_1,z_2\right),K\left(w_1,iy_2;z_1,z_2\right)a\right\rangle_{\hat{H}}\right|^2\\&\leq\|F\|^2_{\hat{H}}\left\|K\left(w_1,iy_2;\cdot,\cdot\right)a\right\|^2_{\hat{H}}\underset{y_2\to\infty}{\longrightarrow}0,\quad\forall a\in D.\end{aligned}$$

Таким образом, $F(z_1,z_2)\equiv F(z_1,w)\equiv 0$, и, следовательно, 1 не является собственным значением оператора $V(w)$.

Определим оператор $\hat{Y}$ в пространстве $\hat{H}$ из соотношения

$$\hat{Y}=\left(wV(w)-\bar{w}I_{\hat{H}}\right)\left(V(w)-I_{\hat{H}}\right)^{-1}.\tag{68}$$

Это определение корректно, т.к. 1 не является собственным значением $V(w)$. Поскольку оператор $V(w)$ — унитарный, то из (68) легко проверить, что оператор $\hat{Y}$ — самосопряженный. Из (59) и (68) получаем явное выражение для резольвенты $\hat{Y}$:

$$\left(\hat{Y}-wI_{\hat{H}}\right)^{-1}F(z_1,z_2)=\tfrac{F(z_1,z_2)-F(z_1,w)}{z_2-w}.\tag{69}$$

Далее зададим для невещественных z отображение $U(z)$ в $\hat{H}$:

$$\begin{gathered} U(z)\,F(z_1,z_2) = F(z_1,z_2) + \\ +(z-\bar{z})\,\frac{F(z_1,z_2)-E(z_1,z_2)E(z,z_2)^{-1}F(z,z_2)}{z_1-z}. \end{gathered} \tag{70}$$

Если рассмотрим для невещественных z следующий оператор $U_0(z)$ в $\hat{H}$:

$$U_0(z)\,F(z_1,z_2) = F(z_1,z_2) + (z-\bar{z})\,\frac{F(z_1,z_2)-F(z,z_2)}{z_1-z}, \tag{71}$$

то очевидно, что

$$U(z) = E(z_1,z_2)\,U_0(z)\,E(\cdot,z_2)^{-1}. \tag{72}$$

Рассматривая $U_0(z)$ на элементах вида

$$F(z_1,z_2) = K(w_1,w_2;z_2,z_1)\,a, \quad \forall a \in D,$$

и дословно повторяя предыдущее рассуждение, получаем, что $U_0(z)$ — унитарный оператор в $\hat{H}$. Легко также проверить, что 1 не является собственным значением операторов $U_0(z)$ и $U(z)$.

Аналогично определим операторы $\hat{X}$ и $\hat{X}_0$ в $\hat{H}$:

$$\hat{X}_0 = \left(zU_0(z) - \bar{z}I_{\hat{H}}\right)\left(U_0(z) - I_{\hat{H}}\right)^{-1}, \tag{73}$$

$$\hat{X} = \left(zU(z) - \bar{z}I_{\hat{H}}\right)\left(U(z) - I_{\hat{H}}\right)^{-1}. \tag{74}$$

Оператор $\hat{X}_0$ — самосопряженный, а оператор $\hat{X}$ из (72)–(74) подобен $\hat{X}_0$:

$$\hat{X} = E(z_1,z_2)\,\hat{X}_0 E(z_1,z_2)^{-1}, \tag{75}$$

и из (70) его резольвента имеет вид

$$\left(\hat{X} - zI_{\hat{H}}\right)^{-1} F(z_1,z_2) = \frac{F(z_1,z_2)-E(z_1,z_2)E(z,z_2)^{-1}F(z,z_2)}{z_1-z}. \tag{76}$$

Определим $\forall a \in D$ отображение $K^* : \hat{H} \to D$:

$$K^*\left[K(w_1,w_2;z_1,z_2)\,a\right] = 2\left(\sigma^{-1} - E^*(w_1,w_2)\right)a. \tag{77}$$

Вычислим сопряженное отображение $K : D \to \hat{H}$. Поскольку

$$\begin{gathered} \left\langle Ka_1, K(w_1,w_2;z_1,z_2)\,a_2\right\rangle_{\hat{H}} = \left\langle a_1, 2\left(\sigma^{-1} - E^*(w_1,w_2)\right)a_2\right\rangle_D \\ = \left\langle 2\left(\sigma^{-1} - E(w_1,w_2)\right)a_1, a_2\right\rangle_D \\ = \left\langle 2\left(\sigma^{-1} - E(z_1,z_2)\right)a_1, K(w_1,w_2;z_1,z_2)\,a_2\right\rangle_{\hat{H}}, \quad \forall a_{1,2} \in D, \end{gathered}$$

то

$$(Ka)(z_1,z_2)=2\left(\sigma^{-1}-E(z_1,z_2)\right)a,\quad \forall a\in D. \tag{78}$$

Пусть $H\subseteq\hat{H}$ — наименьшее приводящее подпространство операторов $\hat{X}$ и $\hat{Y}$, содержащее образ отображения K. Пусть $X=\hat{X}|_H$, $Y=\hat{Y}|_H$. Если покажем, что $2i\,[X,Y]=K\sigma K^*$ и $E(z,w)$ имеет вид (29), то получим требуемую пару операторов X и Y, для которой $E(z,w)$ будет полуопределяющей функцией. Для этого, с учетом теоремы 4 и разложения резольвент по степеням, достаточно проверить тождество

$$\begin{gathered}\left(\hat{X}-zI_{\hat{H}}\right)^{-1}\left(\hat{Y}-wI_{\hat{H}}\right)^{-1}-\left(\hat{Y}-wI_{\hat{H}}\right)^{-1}\left(\hat{X}-zI_{\hat{H}}\right)^{-1}\\ =\left(\hat{Y}-wI_{\hat{H}}\right)^{-1}\left(\hat{X}-zI_{\hat{H}}\right)^{-1}\tfrac{K\sigma K^*}{2i}\left(\hat{X}-zI_{\hat{H}}\right)^{-1}\left(\hat{Y}-wI_{\hat{H}}\right)^{-1}\end{gathered} \tag{79}$$

на элементах (78).

Из (33) следует, что

$$E(z,w)^{-1}=\sigma E^*(\bar{z},\bar{w})\,\sigma. \tag{80}$$

Поскольку

$$\begin{gathered}\left(\hat{X}-zI_{\hat{H}}\right)^{-1}\left(\hat{Y}-wI_{\hat{H}}\right)^{-1}F(z_1,z_2)=\tfrac{F(z_1,z_2)-F(z_1,w)}{(z_2-w)(z_1-z)}\\ -E(z_1,z_2)\,E(z,z_2)^{-1}\,\tfrac{F(z,z_2)-F(z,w)}{(z_2-w)(z_1-z)},\end{gathered} \tag{81}$$

$$\begin{gathered}\left(\hat{Y}-wI_{\hat{H}}\right)^{-1}\left(\hat{X}-zI_{\hat{H}}\right)^{-1}F(z_1,z_2)\\ =\tfrac{F(z_1,z_2)-E(z_1,z_2)E(z,z_2)^{-1}F(z,z_2)}{(z_2-w)(z_1-z)}-\tfrac{F(z_1,w)-E(z_1,w)E(z,w)^{-1}F(z,w)}{(z_2-w)(z_1-z)},\end{gathered} \tag{82}$$

то учитывая (80) и (52), имеем

$$\begin{gathered}\left[\left(\hat{X}-zI\right)^{-1}\left(\hat{Y}-wI\right)^{-1}-\left(\hat{Y}-wI\right)^{-1}\left(\hat{X}-zI\right)^{-1}\right]\\ \times F(z_1,z_2)=\tfrac{1}{2i}K(\bar{z},\bar{w};z_1,z_2)\,\sigma F(z,w)\,.\end{gathered} \tag{83}$$

Используя (52), (78), (80) и (81), легко проверить, что

$$\begin{gathered}\left(\hat{X}-zI_{\hat{H}}\right)^{-1}\left(\hat{Y}-wI_{\hat{H}}\right)^{-1}Ka\\ =iK(\bar{z},\bar{w};z_1,z_2)\,\sigma E(z,w)\,a,\quad \forall a\in D,\end{gathered} \tag{84}$$

поэтому с учетом (77) и (80)

$$\begin{gathered}K^*\left(\hat{X}-zI_{\hat{H}}\right)^{-1}\left(\hat{Y}-wI_{\hat{H}}\right)^{-1}Ka\\ =2i\left(E(z,w)-\sigma^{-1}\right)a,\quad \forall a\in D,\end{gathered} \tag{85}$$

откуда следует, что полуопределяющая функция $E(z,w)$ имеет нужный вид (29).

Аналогичным образом, из (82) следует, что $\forall a \in D$:

$$\left(\hat{Y} - wI_{\hat{H}}\right)^{-1} \left(\hat{X} - zI_{\hat{H}}\right)^{-1} Ka = iK\left(\bar{z}, \bar{w}; z_1, z_2\right) a. \qquad (86)$$

Сопоставляя (83), где $F(z_1, z_2) = (Ka)(z_1, z_2)$, (78), (85) и (86), получаем, что выполнено (79). Теорема доказана.

6. Мозаики и принципальные функции

Далее будем считать, что $\sigma = \sigma^* = \sigma^{-1}$ — инволюция в D и $Q_\pm = \frac{1}{2}(I_D \pm \sigma)$ — ортопроекторы. Следующие две теоремы доказаны в [13, 14].

Теорема 9. *Пусть A — самосопряженный оператор в H и $K : D \to H$. Тогда существует единственная D-значная функция $B(t)$, называемая фазовым оператором, такая что для почти всех вещественных t справедливо*

$$0 \le B(t) \le I_D, \quad B(t) - Q_- \in L^1\left((-\infty, +\infty), D, \tfrac{dt}{1+|t|}\right), \qquad (87)$$

$$\begin{aligned} &\sigma + K^*(A - wI_H)^{-1} K \\ &= \exp\left\{\pm i\pi Q_- + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{B(t) - Q_-}{t - w} dt\right\}, \quad \pm \operatorname{Im} w > 0. \end{aligned} \qquad (88)$$

Функцию $B(t)$ можно вычислить по формуле

$$B(t) = \tfrac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to +0} \operatorname{Im} \ln\left[\sigma + K^*(A - (t + i\varepsilon) I_H)^{-1} K\right]. \qquad (89)$$

Если кроме того K^*— отображение Гильберта–Шмидта, то $Q_+ B(t) Q_+$ и $Q_-(I_D - B(t)) Q_-$ — неотрицательные ядерные операторы.

Теорема 10. *Пусть A — самосопряженный оператор в H и $K^* : H \to D$ — отображение Гильберта–Шмидта. Тогда существует единственная суммируемая вещественная функция $\delta(t)$, называемая фазовым сдвигом, такая что*

$$\det\left[I_D + \sigma K^*(A - wI_H)^{-1} K\right] = \exp\left[\int\limits_{-d}^{d} \frac{\delta(t)}{t - w} dt\right], \qquad (90)$$

$$\delta(t) = \mathrm{Tr}\left[Q_+ B(t) Q_+\right] - \mathrm{Tr}\left[Q_- \left(I_D - B(t)\right) Q_-\right], \tag{91}$$

где $B(t)$ — фазовый оператор и $d = \|A\|_H + \|K^*\|_D^2$. Кроме того, если ядерный оператор $K\sigma K^*$ имеет всего p положительных (всего q отрицательных) собственных значений, то почти всюду $\delta(t) \le p$ ($\delta(t) \ge -q$). При соответствующем выборе аргумента функцию $\delta(t)$ можно вычислить по формуле

$$\delta(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to +0} \arg\det\left[I_D + \sigma K^* \left(A - (t + i\varepsilon) I_H\right)^{-1} K\right]. \tag{92}$$

Теперь, используя эти теоремы, построим мозаики и принципальную функцию Пинкуса оператора T, которые ранее были построены соответственно в [13] и [15] посредством предела некоторой комбинации определяющих функций. В [15] также впервые была получена связь детерминанта определяющей функции с принципальной функцией. Здесь получим непосредственное представление мозаик и принципальной функции через характеристические функции оператора T, т.е. через операторнозначные коэффициенты соответствующих сингулярных интегральных моделей T.

Теорема 11. *Пусть выполнены условия теоремы 7. Тогда существуют единственные D-значные функции $B_{X,Y}(x,y)$, называемые соответственно вещественной и мнимой мозаикой оператора T, такие что для почти всех вещественных x и y справедливо $0 \le B_{X,Y}(x,y) \le I_D$, $B_{X,Y}(x,y) - Q_-$ — интегрируемые соответственно по y, x функции с весом $\frac{1}{1+|t|}$ и*

$$S_X(x,w)\,\sigma = \exp\left\{\pm i\pi Q_- + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_X(x,y) - Q_-}{y - w} dy\right\}, \quad \pm\,\mathrm{Im}\, w > 0, \tag{93}$$

$$\sigma S_Y(z,y) = \exp\left\{\pm i\pi Q_- + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_Y(x,y) - Q_-}{x - z} dx\right\}, \quad \pm\,\mathrm{Im}\, z > 0, \tag{94}$$

где $S_X(x,w)$ и $S_Y(z,y)$ — соответствующие характеристические функции (40) и (44); при этом $B_{X,Y}(x,y)$ можно вычислить по формулам

$$\begin{aligned} B_X(x,y) &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to +0} \mathrm{Im}\ln\left[S_X(x, y + i\varepsilon)\,\sigma\right], \\ B_Y(x,y) &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to +0} \mathrm{Im}\ln\left[\sigma S_Y(x + i\varepsilon, y)\right]. \end{aligned} \tag{95}$$

Кроме того, если T имеет ядерный самокоммутатор, то оператор-функции $Q_+ B_{X,Y}(x,y) Q_+$ и $Q_- \left(I_D - B_{X,Y}(x,y)\right) Q_-$ — неотрицательные ядерные операторы для почти всех вещественных x и y.

Доказательство теоремы непосредственно следует из теорем 3 и 9. Заметим также, что т.к. $\sigma = \exp(\pm i\pi Q_-)$, то поэтому $B_X(x,y) \equiv Q_-$, $\forall x \notin \sigma(X_{ac})$ и $B_Y(x,y) \equiv Q_-$, $\forall y \notin \sigma(Y_{ac})$.

З а м е ч а н и е. В общем случае мозаики $B_X(x,y)$ и $B_Y(x,y)$ различны. Например, возьмем в качестве T сингулярный интегральный оператор (5), где $\sigma(X) = [0,1]$, $\alpha^*(x) = [1+ix, x+i]$, $\beta(x) = 0$ и $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Тогда легко проверить, что $\alpha^*(x)\,\sigma\alpha(t) = 2i(x-t)$. Отсюда следует, что мнимая часть Y оператора T имеет вид $(Yf)(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 f(t)\,dt$, т.е. является ядерным интегральным оператором с ограниченным ядром [5], а сам T — вполне ненормальный оператор с ядерным самокоммутатором, т.к. $\alpha(t) \neq 0$, $\forall t \in [0,1]$. Здесь также видно существенное отличие от случая $\sigma = I$, где оператор Y по известной теореме Путнама обязан быть абсолютно непрерывным. Очевидно, что $S_X(x,w) \not\equiv I$, поэтому из (93) $B_X(x,y) \not\equiv Q_-$. С другой стороны, т.к. оператор Y — ядерный, то он не имеет абсолютно непрерывного спектра, а значит, по теореме 7 $S_Y(z,y) \equiv I$, и, следовательно, из (94) $B_Y(x,y) \equiv Q_-$.

Теорема 12. *Пусть оператор T в пространстве H имеет ядерный самокоммутатор. Тогда существует единственная вещественная функция $g(x,y)$, интегрируемая по Лебегу по совокупности переменных, которая называется принципальной функцией оператора T и которая имеет следующие свойства. Эта функция инвариантна при унитарных преобразованиях оператора T*

$$\operatorname{supp} g(x,y) \subset \sigma(X_{ac}) \times \sigma(Y_{ac}), \tag{96}$$

и для почти всех вещественных x и y относительно меры Лебега и невещественных z и w существуют соответствующие следы и детерминанты, с помощью которых она выражается следующим образом:

$$\det[S_X(x,w)] = \exp\left[\int\limits_{\sigma(Y_{ac})} g(x,y)\,\frac{dy}{y-w}\right], \tag{97}$$

$$\det[S_Y(z,y)] = \exp\left[\int\limits_{\sigma(X_{ac})} g(x,y)\,\frac{dx}{x-z}\right], \tag{98}$$

$$\begin{aligned}\det\left[\sigma E\left(z,w\right)\right] &= \det\left[E\left(z,w\right)\sigma\right]\\ &= \det\left\{\left(X-zI_H\right),\left(Y-wI_H\right)\right\}\\ &= \det\left\{\left(X-zI_H\right)^{-1},\left(Y-wI_H\right)^{-1}\right\}\\ &= \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma(X_{ac})}\int\limits_{\sigma(Y_{ac})} g\left(x,y\right)\frac{dx}{x-z}\frac{dy}{y-w}\right], \qquad (99)\end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \mathrm{Tr}[Q_+ B_X(x,y)\, Q_+] - \mathrm{Tr}[Q_-(I_D - B_X(x,y))\, Q_-]\\ &= \mathrm{Tr}[Q_+ B_Y(x,y)\, Q_+] - \mathrm{Tr}[Q_-\,(I_D - B_Y(x,y))\, Q_-], \qquad (100)\end{aligned}$$

и при соответствующем выборе аргумента

$$g\left(x,y\right) = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\arg\det\left[S_X\left(x,y+i\varepsilon\right)\right] = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\arg\det\left[S_Y\left(x+i\varepsilon,y\right)\right]. \quad (101)$$

Кроме того

$$-\mathrm{Tr}\left[Q_-\right] \le g\left(x,y\right) \le \mathrm{Tr}\left[Q_+\right], \qquad (102)$$

т.е. $g\left(x,y\right) \ge 0$, *если* T — *гипонормальный,* $g\left(x,y\right) \le 0$, *если* T — *когипонормальный и*

$$\left|g\left(x,y\right)\right| \le \mathrm{Rank}\, C. \qquad (103)$$

Если для каждого фиксированного $x \in \sigma\left(X_{ac}\right)$ *(или* $y \in \sigma\left(Y_{ac}\right)$*) ядерный оператор* $\alpha^*\left(x\right)\sigma\alpha\left(x\right)$ $\left(\tilde\alpha^*\left(y\right)\sigma\tilde\alpha\left(y\right)\right)$ *имеет всего* $p\left(x\right)$ $\left(\tilde p\left(y\right)\right)$ *положительных и* $q\left(x\right)$ $\left(\tilde q\left(y\right)\right)$ *отрицательных собственных значений, то почти всюду* $-q\left(x\right) \le g\left(x,y\right) \le p\left(x\right)$ $\left(-\tilde q\left(y\right) \le g\left(x,y\right) \le \tilde p\left(y\right)\right)$*. В частности,*

$$\left|g\left(x,y\right)\right| \le \dim\left[\hat H\left(x\right)\right], \quad \left|g\left(x,y\right)\right| \le \dim\left[\tilde H\left(y\right)\right]. \qquad (104)$$

Доказательство. Применим теорему 10 к тождеству (35). Следовательно, для всех невещественных z и w справедливо

$$\ln\det\left[\sigma E\left(z,w\right)\right] - \ln\det\left[\sigma E\left(\bar z,w\right)\right] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g\left(z,y\right)\frac{dy}{y-w}, \qquad (105)$$

где $g\left(z,y\right)$ — вещественная функция с компактным носителем по переменной y.

Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ и невещественных z, w пусть

$$F_\varepsilon(z,w) = \begin{cases} \ln\det\left[\sigma E(z+i\varepsilon, w)\right], & \operatorname{Im} z > 0, \\ \ln\det\left[\sigma E(z-i\varepsilon, w)\right], & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

Тогда (105) означает, что для всех вещественных x

$$F_\varepsilon(x+i0,w) - F_\varepsilon(x-i0,w) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x+i\varepsilon, y)\,\frac{dy}{y-w}.$$

Поскольку из (35) и свойства $\ln\det(I+A) = \operatorname{Tr}\ln(I+A)$ следует, что

$$\begin{gathered}\ln\det\left[\sigma E(x+i\varepsilon,w)\right] - \ln\det\left[\sigma E(x-i\varepsilon,w)\right] \\ = \operatorname{Tr}\ln\Big[I_D + \varepsilon K^*(X-(x+i\varepsilon)I_H)^{-1}(Y-wI_H)^{-1}(X-(x-i\varepsilon)I_H)^{-1}K\sigma\Big],\end{gathered}$$

то из (105) имеем $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x+i\varepsilon,y)\,\frac{dy}{y-w} = O\left(x^{-2}\right)$ для достаточно больших вещественных x. Кроме того, эта функция также непрерывна для всех x, поэтому можем положить

$$G_\varepsilon(z,w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x+i\varepsilon,y)\,\frac{dx}{x-z}\frac{dy}{y-w}.$$

Тогда очевидно, что

$$F_\varepsilon(x+i0,w) - G_\varepsilon(x+i0,w) = F_\varepsilon(x-i0,w) - G_\varepsilon(x-i0,w),$$

т.е. $F_\varepsilon(z,w) - G_\varepsilon(z,w)$ — аналитическая функция по z. Но обе эти функции стремятся к нулю при $z \to \infty$. Следовательно, $F_\varepsilon(z,w) \equiv G_\varepsilon(z,w)$. В силу (35) и теоремы 7 существует предел $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} g(x+i\varepsilon,y) = g(x,y)$, который определяет (97), причем $g(x,y) \equiv 0$ при $x \notin \sigma(X_{ac})$. Поэтому

$$\det\left[\sigma E(z,w)\right] = \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma(X_{ac})}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\,\frac{dx}{x-z}\frac{dy}{y-w}\right].$$

В силу существования соответствующих граничных значений из этого тождества будет следовать, что

$$\ln\det\left[\sigma E(z,y+i0)\right] - \ln\det\left[\sigma E(z,y-i0)\right] = \int\limits_{\sigma(X_{ac})} g(x,y)\,\frac{dx}{x-z}.$$

Используя также теорему 7, получаем, что справедливы (96)–(98), первое и последнее представления (99), а также по теореме 10 — (100)–(104). Из свойств $\det(AB) = \det(BA)$, $\det(I+AB) = \det(I+BA)$ и тождества

$$I_H + \frac{1}{2i} K\sigma K^* (X - zI_H)^{-1} (Y - wI_H)^{-1} = \{(X - zI_H), (Y - wI_H)\}$$

следуют остальные представления (99). Из (99) также следует, что принципальные функции унитарно-эквивалентных операторов совпадают. Теорема доказана.

Для вполне ненормальных гипонормальных операторов в [1] показано, что спектр оператора T совпадает с замыканием существенного носителя мозаик или принципальной функции. В общем случае дело обстоит иначе.

П р и м е р. Пусть $T = X + iY$ ($X = X^*$ — абсолютно непрерывный и $Y = Y^*$) — оператор (5) с ядерным самокоммутатором и соответствующими коэффициентами

$$\alpha(x) = \begin{pmatrix} \alpha_0(x) & 0 \\ 0 & \alpha_0(x) \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\beta(x) = \begin{pmatrix} \beta_0(x) & 0 \\ 0 & \beta_0(x) + \alpha_0^*(x)\,\alpha_0(x) \end{pmatrix},$$

причем $\alpha_0(x) \neq 0$, $\forall x \in \sigma(X)$. Поскольку из (19) самокоммутатор $(Cf)(x)$ не вырождается для всех $x \in \sigma(X)$, то оператор T — вполне ненормальный. Понятно, что $T = T_1 \oplus T_2$, где T_1 — вполне ненормальный гипонормальный оператор, а T_2 — вполне ненормальный когипонормальный оператор. По теореме Путнама операторы T_1 и T_2, а значит, и T имеют абсолютно непрерывные мнимые части. Пусть $S_X(x,w)$ — вещественная характеристическая функция оператора T (40), а $S_X^{(0)}(x,w)$ — функция вида (40) относительно $\alpha_0(x)$ и $\beta_0(x)$. Тогда с учетом вида обратной характеристической функции [10], имеем

$$\det\left[S_X(x,w)\right] = \det\left[S_X^{(0)}(x,w)\right] \det\left[S_X^{(0)}(x,w)^{-1}\right] \equiv 1.$$

Таким образом, из (97) следует, что принципальная функция оператора T тождественно равна нулю, т.е. ее носитель не совпадает со спектром T.

Автор выражает благодарность В.А. Золотареву и М.М. Маламуду за внимание и полезные замечания к статье.

Список литературы

[1] *Xia Daoxing*, Spectral theory of hyponormal operators. Operator Theory: Adv. Appl. Birkhaüser–Verlag, Basel, Boston, Stuttgart (1983), v. 10, 242 p.

[2] *А.Л. Вольберг, В.В. Пеллер, Д.В. Якубович*, Небольшая экскурсия в теорию гипонормальных операторов. — *Алгебра и анализ* (1990), т. 2, вып. 2, с. 38.

[3] *Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман*, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Т. 2. Вища школа, Харьков (1978).

[4] *М.Ш. Бирман, М.З. Соломяк*, Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Изд-во ЛГУ, Ленинград (1980).

[5] *И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн*, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Наука, Москва (1965).

[6] *М. Рид, Б. Саймон*, Методы современной математической физики. Т. 3: Теория рассеяния. Мир, Москва (1982).

[7] *J.D. Pincus*, Commutators and systems of singular integral equations. I. — *Acta Math.* (1968), v. 121, p. 219–249.

[8] *T. Kato*, Smooth operators and commutators. — *Studia Math.* (1968), v. 31, p. 535–546.

[9] *B.B. Morrel*, A decomposition for some operators. — *Indiana Univ. Math. J.* (1973), v. 23, p. 497–511.

[10] *И.В. Воробьев*, Схема рассеяния для сингулярного метрического узла. — *Вестн. Харьк. ун-та.* Сер.: мат, прикл. мат. и механика (2001), т. 514, с. 73–90.

[11] *В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский*, Теория солитонов: метод обратной задачи. Наука, Москва (1980).

[12] *J.D. Pincus*, Symmetric singular integral operators. — *Indiana Univ. Math. J.* (1973), v. 23, p. 537–556.

[13] *R.W. Carey and J.D. Pincus*, Mosaics, principal functions, and mean motion in von Neumann algebras. — *Acta Math.* (1977), v. 138, p. 153–218.

[14] *М.Г. Крейн*, Об определителях возмущения и формуле следов для унитарных и самосопряженных операторов. — *Докл. АН СССР* (1962), т. 144, вып. 2, с. 268–271.

[15] *R.W. Carey and J.D. Pincus*, An exponential formula for determining functions. — *Indiana Univ. Math. J.* (1974), v. 23, p. 1031–1042.

Functional models, unitary invariants, mosaics and principal functions for operators with trace class self-commutator

I.V. Vorobyov

The singular integral model of an operator with trace class self-commutator is constructed. A decomposition theorem for operators in orthogonal sum of normal and completely nonnormal operators is obtained. A notion of the hyponormal metrical colligation is introduced, and it is proved that the determining and characteristic functions are unitary invariants for the simple colligations. A class of functions, which are the semideterming functions is described. On the base of the singular integral model the mosaics and the Pincus principal functions are constructed.