Математическая физика, анализ, геометрия
2002, т. 9, № 1, с. 95–100

Меры на единичной окружности с медленно убывающими круговыми параметрами и ряды Фурье

Л.Б. Голинский

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, Харьков, 61103, Украина*

E-mail:golinskii@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 17 декабря 2001 г.

Представлена Г.М. Фельдманом

Исследуется связь между теорией ортогональных полиномов на единичной окружности и спектральной теорией одного класса матричных разностных уравнений, известных как уравнения Сеге. Ключевую роль играет матричная форма рекуррентных соотношений Сеге, которые полностью определяются последовательностью комплексных чисел из открытого единичного круга (круговых параметров). Структура мер (абсолютно непрерывная и сингулярная компоненты) с медленно убывающими круговыми параметрами изучается с помощью теории равномерно сходящихся рядов Фурье. ·

Досліджується зв'язок між теорією ортогональних поліномів на одиничному колі та спектральною теорією одного класу матричних різницевих рівнянь, відомих як рівняння Сеге. Ключову роль відіграє матрична форма рекурентних відношень Сеге, які цілком визначаються послідовністю комплексних чисел з відкритого одиничного круга (кругових параметрів). Структура мір (абсолютно безперервна та сінгулярна компоненти) з повільно спадними круговими параметрами вивчається за допомогою теорії рівномірно збіжних рядів Фур'є.

Пусть μ — вероятностная мера на единичной окружности $\mathbb{T}$, т.е. конечная положительная борелевская мера на $\mathbb{T}$ массы 1. Будем считать носитель меры $\operatorname{supp}\mu$ бесконечным множеством. Ортонормированные по мере μ полиномы $\{\phi_n\}_{n\geq 0}$ однозначно определяются соотношениями

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \phi_n(\mu,\zeta)\overline{\phi_m(\mu,\zeta)}\,d\mu(\zeta) = \delta_{m,n}\,, \qquad m,n = 0,1,2,\dots\,,$$

· Mathematics Subject Classification 2000: 42C05.

Работа частично поддержана INTAS, грант № 2000-272.

где
$$\phi_n(\mu,z)=\kappa_n(\mu)z^n+\dots\ , \qquad \kappa_n(\mu)>0.$$
Монические ортогональные полиномы $\Phi_n=\kappa_n^{-1}\phi_n=z^n+\dots$.

Новый подход к теории ортогональных полиномов на единичной окружности как к спектральной теории одного класса матричных разностных уравнений, называемых уравнениями Сеге, предложен в [2]. Ключевую роль при этом играют рекуррентные соотношения Сеге, записанные в матричном виде:
$$\begin{bmatrix}\phi_n(z)\\ \phi_n^*(z)\end{bmatrix}=T_n(z)\begin{bmatrix}\phi_{n-1}(z)\\ \phi_{n-1}^*(z)\end{bmatrix},\quad T_n(z)=T_n(z,a_n)=\frac{1}{\rho_n}\begin{pmatrix} z & a_n\\ \overline{a}_n z & 1\end{pmatrix},$$
$n=1,2,\dots$. Здесь взаимные полиномы ϕ_n^* задаются формулой $\phi_n^*(z)=z^n\overline{\phi_n(1/\bar z)}$, а $a_n=\Phi_n(0)$ и $\rho_n^2=1-|a_n|^2$. Последовательность комплексных чисел $\{a_n\}_{n\ge1}$, известных как *круговые параметры*, представляет собой произвольную последовательность точек из открытого единичного круга и является аналогом потенциала в теории одномерного оператора Шредингера на полуоси. По теореме Фавара существует взаимно однозначное соответствие между множеством вероятностных мер на единичной окружности и классом всех таких последовательностей. Тем самым представляется естественным изучение свойств мер в терминах их круговых параметров.

Рассмотрим векторное уравнение $X_n=T_nX_{n-1}$ с начальными данными $X_0\in\mathbb{C}^2$ и определим *фундаментальную матрицу* равенством $\mathcal{T}_n\stackrel{\text{def}}{=}T_nT_{n-1}\dots T_1$, так что $X_n=\mathcal{T}_nX_0$. Мы имеем
$$\begin{bmatrix}\phi_n(z)\\ \phi_n^*(z)\end{bmatrix}=\mathcal{T}_n(z)\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\qquad n=1,2,\dots\ .$$

В [2] установлена связь между асимптотическим поведением фундаментальной матрицы и “тонкой” структурой меры ортогональности (абсолютно непрерывная и сингулярная составляющие). Так (ср. [2, теорема 15]), если для некоторой дуги $\Gamma\subset\mathbb{T}$ выполняется
$$\sup_n\max_{\zeta\in\Gamma}\|\mathcal{T}_n(\zeta)\|<\infty, \tag{1}$$
то μ абсолютно непрерывна на Γ.

Для оценки выражения в (1) преобразуем фундаментальную матрицу с помощью окаймления.* Именно, пусть $\{E_k\}_{k\ge0}$ — последовательность обратимых матриц-функций, $E_0=I$ — единичная матрица. Запишем
$$\begin{aligned}\mathcal{T}_n(z)&=E_n\cdot E_n^{-1}T(z,a_n)E_{n-1}\cdot E_{n-1}^{-1}T(z,a_{n-1})E_{n-2}\cdot\dots E_1^{-1}T(z,a_1)E_0\\ &=E_n\tilde T_n(z)\tilde T_{n-1}(z)\dots\tilde T_1(z),\qquad \tilde T_k(z)\stackrel{\text{def}}{=}E_k^{-1}T(z,a_k)E_{k-1}\end{aligned}$$

*В теории операторов Шредингера эта процедура известна как “введение новых переменных”.

и назовем произведение

$$\tilde{\mathcal{T}}_n(z) = \tilde{T}_n(z)\tilde{T}_{n-1}(z)\dots\tilde{T}_1(z) = E_n^{-1}\mathcal{T}_n(z)$$

модифицированной фундаментальной матрицей. Задача состоит в выборе окаймляющих матриц E_k так, чтобы в результате такого "незамысловатого" преобразования асимптотические свойства фундаментальной матрицы улучшились. Заметим, что такую процедуру можно повторить несколько раз.

В качестве первого шага положим

$$\begin{aligned} E_k(z) &= T^k(z,0) = \begin{pmatrix} z^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \tilde{T}_k(z) &= \frac{1}{\rho_k}\begin{pmatrix} z^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & a_k \\ \overline{a}_k z & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z^{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho_k}\begin{pmatrix} 1 & a_k z^{-k} \\ \overline{a}_k z^k & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

так что для модифицированной фундаментальной матрицы имеем

$$\tilde{\mathcal{T}}_n(z) = \prod_{k=1}^{n}\rho_k^{-1}\prod_{k=1}^{n}(I+V_k), \quad V_k = \begin{pmatrix} 0 & a_k z^{-k} \\ \overline{a}_k z^k & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Как известно из теории матриц, бесконечное произведение

$$B_\infty = \prod_{k=1}^{\infty}(I+A_k), \quad B_n = \prod_{k=1}^{n}(I+A_k)$$

абсолютно сходится при условии $\sum_k \|A_k\| < \infty$. При этом, естественно, $\|B_n\| = O(1)$, $n\to\infty$. Применяя это утверждение к (2), видим, что при условии $\sum_k |a_k| < \infty$ существует предел

$$\tilde{\mathcal{T}}_\infty(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\tilde{\mathcal{T}}_n(\zeta)$$

равномерно на $\mathbb{T}$. Поскольку

$$\tilde{\mathcal{T}}_n(\zeta)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \phi_n(\zeta) \\ \phi_n^*(\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta^{-n}\phi_n(\zeta) \\ \phi_n^*(\zeta) \end{bmatrix},$$

то, в частности, существует $D(\zeta) = \lim_{n\to\infty}\phi_n^*(\zeta)$ равномерно на $\mathbb{T}$. В этом случае говорят, что мера μ допускает *равномерное асимптотическое представление* на $\mathbb{T}$. Далее, при предположении $\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = r < 1$ можно доказать, что μ допускает равномерное асимптотическое представление в круге $\{|z| < r^{-1}\}$.

В дальнейшем предполагается выполненным условие $\sum_k |a_k|^2 < \infty$. Класс мер с такими круговыми параметрами известен как *класс Сеге*. По теореме

Я.Л. Геронимуса [1, теорема 8.2] мера μ принадлежит классу Сеге тогда и только тогда, когда $\log \mu' \in L^1(\mathbb{T})$ (при этом сингулярная составляющая меры может быть произвольной).

В замечательной работе [4] обнаружена связь между дискретными операторами Шредингера с медленно убывающим потенциалом и сходящимися рядами Фурье. Оказывается, что аналогичная связь имеет место и для уравнений Сеге. В основе нашего доказательства лежит аналог "$I + Q$"-преобразования Харриса–Лутца для единичной окружности.

Теорема 1. *Пусть мера μ с круговыми параметрами a_n принадлежит классу Сеге. Предположим, что ряд Фурье*

$$q(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a}_k \zeta^k, \qquad \zeta = e^{it},$$

сходится равномерно на дуге Γ, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k q(k-1,\zeta)| < \infty, \quad \zeta \in \Gamma; \quad q(n,\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} -\sum_{k=n+1}^{\infty} \overline{a}_k \zeta^k. \tag{3}$$

Тогда μ допускает равномерное асимптотическое представление на Γ и, в частности, абсолютно непрерывна на Γ.

Отметим, что на самом деле при условии (3) все семейство мер Александрова $\{\mu_\lambda\}$, $|\lambda| = 1$, введенное в [2] и включающее меру μ при $\lambda = 1$, допускает равномерное асимптотическое представление на Γ.

Предположения теоремы 1 выполняются при таких условиях на круговые параметры.

Теорема 2. *Пусть мера μ с круговыми параметрами a_n принадлежит классу Сеге. Предположим, что $a_n = O\left(n^{-3/4-\epsilon}\right)$, $\epsilon > 0$, и ряд Фурье*

$$f(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a}_k k^{1/4} \zeta^k \in L^p(\Gamma), \qquad p > \frac{1}{\epsilon}.$$

Тогда μ допускает равномерное асимптотическое представление на Γ.

Следующий пример заимствован из [6, гл. V.4].

П р и м е р. Известно, что ряд Фурье

$$R(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ick\log k}}{k^{1/2+\alpha}} \zeta^k, \qquad 0 < \alpha < 1, \quad c > 0,$$

равномерно сходится на $\mathbb{T}$ и $R \in \mathrm{Lip}_\alpha$. Поэтому [6, формула (13.26)] остаток ряда допускает оценку

$$R_n(\zeta) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{e^{ick\log k}}{k^{1/2+\alpha}} \zeta^k = O\left(n^{-\alpha}\log n\right),$$

и значит, $n^{-1/2-\alpha}R_n = O\left(n^{-1/2-2\alpha}\log n\right)$. Следовательно, мера μ с круговыми параметрами $a_n = n^{-3/4-\epsilon}e^{-icn\log n}$, $\epsilon > 0$, допускает равномерное асимптотическое представление на $\mathbb{T}$.

Условия иного сорта возникают при переходе к разностям круговых параметров. Для заданной последовательности комплексных чисел a_n определим оператор m-кратной разности индуктивным соотношением

$$\Delta_1 a_k = a_k - a_{k+1}, \quad \Delta_m a_k = \Delta_{m-1}\Delta_1 a_k, \quad m = 1, 2, \dots .$$

Применение преобразования Абеля (суммирования по частям) дает

$$\begin{aligned} (1-\zeta)a_n q(n-1,\zeta) &= -|a_n|^2\zeta^n - \zeta a_n q^{(1)}(n-1,\zeta), \\ q^{(1)}(k,\zeta) &\stackrel{\text{def}}{=} -\sum_{j=k+1}^{\infty} (\overline{a}_j - \overline{a}_{j+1})\zeta^j . \end{aligned}$$

Из теоремы 1 теперь вытекает известное утверждение [5, теорема 2.2]: если

$$a_n \to 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left| a_k \sum_{j=k}^{\infty} |a_j - a_{j+1}| \right| < \infty,$$

то μ допускает равномерное асимптотическое представление на $\mathbb{T}\backslash\{1\}$.

Мы, однако, можем продвинуться далее на этом пути, применяя преобразование Абеля m-кратно.

Теорема 3. *Пусть мера μ с круговыми параметрами a_n принадлежит классу Сеге. Предположим, что при некотором фиксированном $m = 1, 2, \dots$*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| a_k \sum_{j=k}^{\infty} |\Delta_m a_j| \right| < \infty.$$

Тогда μ допускает равномерное асимптотическое представление на $\mathbb{T}\backslash\{1\}$.

В связи с последним результатом возникает вопрос о наличии точечной массы в точке $\zeta = 1$ [3].

Теорема 4. *Пусть μ — произвольная вероятностная мера с круговыми параметрами a_n. Предположим, что $\sum_n |\Im a_n| < \infty$ и $\Re a_n \geq 0$ при всех n. Тогда $\mu\{1\} = 0$. Более того, при любом $\epsilon > 0$ существует мера μ с параметрами a_n, такая что*

$$\Re a_n \geq -\epsilon, \quad n \geq 1; \qquad a_n > 0, \quad n \geq n_0,$$

и $\mu\{1\} > 0$.

Список литературы

[1] *Я.Л. Геронимус*, Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. Гос. изд-во физ.-мат. литературы, Москва (1958).

[2] *L. Golinskii and P. Nevai*, Szegő difference equations, transfer matrices and orthogonal polynomials on the unit circle. — *Comm. Math. Phys.* (2001), v. 223, p. 223–259.

[3] *L. Golinskii*, Mass points of measures on the unit circle and reflection coefficients. — Submitted to Proc. AMS.

[4] *A. Kiselev*, Absolutely continuous spectrum of one-dimensional Schrödinger operators and Jacobi matrices with slowly decreasing potential. — *Comm. Math. Phys.* (1996), v. 179, p. 377–400.

[5] *P. Nevai*, Orthogonal polynomials, measures and recurrences on the unit circle. — *Trans. AMS* (1987), v. 300, No. 1, p. 175–189.

[6] *А. Зигмунд*, Тригонометрические ряды. Т. 1. Мир, Москва (1965).

Measures on the unit circle with slowly decaying reflection coefficients and Fourier series

L.B. Golinskii

The relation between the theory of orthogonal polynomials on the unit circle and the spectral theory of a class of matrix difference equations known as the Szegő equations is under the investigation. The key role is played by the matrix form of the Szegő recurrences, which are completely determined by a sequence of complex numbers from the open unit disk (reflection coefficients). The structure of measures (absolutely continuous and singular parts) with slowly decaying reflection coefficients is studied via the theory of uniformly convergent Fourier series.