Математическая физика, анализ, геометрия
2002, т. 9, № 2, с. 224–232

Об одной теореме Г. Вейля для многомерного случая

А.Г. Брусенцев

Белгородская технологическая академия строительных материалов
ул. Костюкова, 46, Белгород, 308012, Россия
E-mail:brusentsev@mail.ru

Статья поступила в редакцию 22 ноября 2001 г.
Представлена В.А. Марченко

Приведена новая теорема, обобщающая на эллиптические операторы второго порядка в $L_2(G)$ ($G \subseteq R^n$) известную теорему Г. Вейля о самосопряженности оператора Штурма–Лиувилля в $L_2(-\infty;+\infty)$. Многомерная теорема Вейля следует из более общей теоремы, для формулировки которой строится особая конструкция накрывающего семейства. Приведенные результаты содержат известные многомерные аналоги теоремы Вейля и, в отличие от них, относятся к области G, которая может быть собственным подмножеством R^n.

Наведено нову теорему, що узагальнює на еліптичні оператори другого порядку в $L_2(G)$ ($G \subseteq R^n$) відому теорему Г. Вейля про самоспряженість оператора Штурма–Лиувілля в $L_2(-\infty;+\infty)$. Багатовимірна теорема Вейля виходить із більш загальної теореми, для формулювання якої будується особлива конструкція покривної сім'ї. Наведені результати містять відомі багатовимірні аналоги теореми Вейля та, на відмінок від них, відносяться до області G, яка може бути власною підмножиною R^n.

Рассматривается вопрос о самосопряженности в существенном эллиптического оператора в $L_2(G)$, имеющего вид

$$Mu = (\nabla - i\vec{b}(x))^* \Big(A(x)(\nabla - i\vec{b}(x))u \Big) + q(x)u, \tag{1}$$

$D_M = C_0^\infty(G)$. Здесь G — открытое множество в R^n, $A(x)$ — позитивная симметрическая (вещественная) матрица-функция, $\vec{b}(x)$ — n-компонентная вектор-функция с вещественными компонентами, а $q(x)$ — вещественная функция, удовлетворяющая условию

$$q(x) \geq const, \; x \in G. \tag{2}$$

Mathematics Subject Classification 2000: 47B25, 81Q10.

Известная теорема Г. Вейля [1] равносильна тому, что оператор Штурма–Лиувилля

$$Lu = -\big(p(x)u'\big)' + q(x)u,$$

$D_L = C_0^\infty(R^1)$ с достаточно гладкими функциями $p(x) > 0$, $q(x) \geq const$ самосопряжен в существенном в пространстве $L_2(R^1)$. Примеры, построенные в работах [2, 3], показывают, что при $G = R^n$ и $n \geq 3$ оператор M вида (1), (2) может иметь ненулевые индексы дефекта даже при $\vec{b}(x) = \vec{0}$, $q(x) = const$. С другой стороны, работы [4, 5] содержат многомерные аналоги теоремы Вейля для матриц $A(x)$ некоторых частных видов. Здесь мы расширяем класс матриц $A(x)$, для которого справедливо обобщение теоремы Вейля. При этом наш класс матриц не только содержит уже описанные виды, но, в отличие от них, относится к области $G \subseteq R^n$, которая может быть собственным подмножеством R^n.

Ниже через $(\cdot,\cdot)$, $|\cdot|$ обозначается скалярное произведение и норма в унитарном пространстве E ($dim\, E < \infty$), а через $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\|\cdot\|$ — скалярное произведение и норма в бесконечномерном пространстве.

1. Обозначим через $Lip_{\alpha\, loc}(G)$ множество функций $f(x)$, определенных в G и удовлетворяющих при некотором $\alpha \in (0;1]$ условию

$$|f(x_0 + y) - f(x_0)| = O(|y|^\alpha), \quad |\mathrm{y}| \to 0,$$

для любой точки $x_0 \in G$. При этом константа в $O(\cdot)$, вообще говоря, зависит от x_0. Ниже через $C^{(1,\alpha)}(G)$ обозначается множество функций из $C^1(G)$, частные производные которых принадлежат $Lip_{\alpha\, loc}(G)$.

У всякой функции $f(x) \in Lip_{1\, loc}(G) (\alpha = 1)$ почти всюду в G существуют частные производные первого порядка (см. [6, с. 295]). Поэтому оператор M можно считать корректно определенным на $C_0^\infty(G)$ при условиях

$$a_{ij}(x), b_j(x) \in Lip_{1\, loc}(G);\; q(x) \in L_{2\, loc}(G). \tag{3}$$

Обозначим через $D_{loc}(M^*)$ множество функций $u \in L_{2\, loc}(G)$, для каждой из которых найдется такая функция $g \in L_{2\, loc}(G)$, что и при всех $\phi \in C_0^\infty(G)$ справедливо равенство

$$\langle u, M\phi\rangle = \langle g, \phi\rangle,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $L_2(supp\, \phi)$. В частности,

$$D_{M^*} \subset D_{loc}(M^*).$$

В дальнейшем мы предполагаем коэффициенты выражения M имеющими такие локальные свойства, что выполнено

Условие А. *Для всякой функции* $u \in D_{loc}(M^*)$ *и любой ограниченной области* Ω $(\bar{\Omega} \subset G)$ *существует последовательность* $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ *функций из* $C^2(G)$, *для которой* $u_m \to u$ *в* $L_2(\Omega)$ *и*

$$\lim_{m\to\infty} Re\langle \psi M u_m, u_m\rangle_{L_2(\Omega)} = Re\langle \psi g, u\rangle_{L_2(\Omega)}$$

при любой вещественной функции $\psi \in C_0(\Omega)$.

С помощью адаптации метода Като [7] можно доказать

Предложение. *Пусть в операторе* M *вида (1)*

$$a_{ij}(x) \in C^{(1,\alpha)}(G),\ b_j(x) \in C^1(G),\ \alpha \in (0,1],$$

а функция $q(x) \in L_{2\,loc}(G)$ *и, вместо (2), локально ограничена снизу. Тогда условие А выполнено.*

2. Рассмотрим область вида

$$G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_k,\ k \geq 1, \tag{4}$$

где открытые множества $G_j \subseteq R^{n_j}(\sum n_j = n)$. При $x \in G$ будем писать $x = \{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \ldots, \vec{x_k}\}$, где $\vec{x_j} \in G_j$. Основные ограничения относятся к множеству $G \setminus Q$, где область

$$Q = Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_k, \tag{5}$$

а Q_j — ограниченные открытые множества в R^{n_j} такие, что $\bar{Q_j} \subset G_j$.

Ниже для функции $f(\vec{x_j})$, определенной в $G_j \setminus Q_j$, условие $f(\vec{x_j}) \to \infty$ при $\vec{x_j} \to \partial G_j$ означает, что для любого $N > 0$ в G_j существует такой компакт $R_N(\bar{Q_j} \subseteq R_N)$, что при $\vec{x_j} \in G_j \setminus R_N$ выполнено неравенство $|f(\vec{x_j})| > N$.

Теорема 1. *Пусть для определенной в* G *вида (4) симметрической позитивной матрицы-функции* $A(x)$ *найдется такая область* Q *вида (5), что при* $x \in G \setminus Q$ $A(x)$ *имеет блочно-диагональный вид*

$$A(x) = diag\left\{a_j\left(\mu_j\left(\vec{x_j}\right)\right) B_j\left(\vec{x_j}\right)\right\}_{j=1}^{k}, \tag{6}$$

где $\vec{x_j} \in G_j \setminus Q_j$, $a_j(\cdot)$ *— определенные в* R^1 *положительные функции из* $C^1(R^1)$, $\mu_j(\vec{x_j})$ *— такие функции из* $C^{(1,1)}(G_j \setminus Q_j)$, *что* $|\nabla \mu_j| > 0$ *и*

$$\mu_j^2(\vec{x_j}) \to \infty \ \ \vec{x_j} \to \partial G_j, \tag{7}$$

а $B_j(\vec{x_j})$ *— матрицы-функции размера* $n_j \times n_j$ *с элементами из* $Lip_{1\,loc}(G_j \setminus Q_j)$, *удовлетворяющие неравенствам*

$$\nabla\left(B_j \nabla \mu_j^2\right) \geq 0, \quad \text{почти всюду в} \ \ G_j \setminus Q_j, \tag{8}$$

$$(B_j \nabla \mu_j, \nabla \mu_j) \leq const, \ \vec{x_j} \in G_j \setminus Q_j. \tag{9}$$

Тогда при выполнении условий (3) и условия A оператор M вида (1), (2) с такой матрицей $A(x)$ самосопряжен в существенном в пространстве $L_2(G)$.

Теорема 1 содержит теорему Г. Вейля в качестве частного случая, что показывает

Следствие 1. *Пусть $G = R^n$. Если в операторе M матрица $A(x)$ при $|x| \geq N > 0$ имеет вид*

$$A(x) = diag\{a_1(x_1), a_2(x_2), \ldots, a_n(x_n)\},$$

где $a_j(\cdot)$ — положительные функции одной переменной из $C^1(R^1)$, то при выполнении условий (3) и условия A оператор M (1), (2) самосопряжен в существенном.

Доказательство состоит в непосредственной проверке условий теоремы 1 с $G_j = R^1$ $(n_j = 1)$ и функциями $\mu_j(x_j) = x_j$, а также 1×1 матрицами $B_j(x_j) = 1$.

Отметим, что частный случай следствия 1 с четными функциями $a_j(\cdot)$ и с условиями гладкости предложения из п. 1 сформулирован без доказательства в работе [4]. В этой же работе при тех же условиях гладкости установлена самосопряженность в существенном оператора M (1), (2) с матрицами следующих двух видов:

$$A(x) = a(|x|)B_0 \quad \text{и} \quad A(x) = a(|x|)\beta\left(\frac{x}{|x|}\right) I_n,$$

где $a(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ — положительные функции соответственно на $[0, \infty)$ и единичной сфере в R^n, а B_0 — постоянная симметрическая позитивная матрица. Этот результат является частным случаем теоремы 1 при $k = 1$, $G_1 = G = R^n$ с $\mu_1(\vec{x_1}) = \mu(x) = |x|$, $B_1(\vec{x_1}) = B(x) = B_0$ в первом случае и $B(x) = \beta\left(\frac{x}{|x|}\right) I_n$ — во втором. Действительно,

$$\nabla\left(B_0 \cdot \nabla |x|^2\right) = 2SpB_0 > 0,$$

$$\nabla\left(\beta\left(\frac{x}{|x|}\right) I_n \cdot \nabla |x|^2\right) = 2\left(\nabla\beta, x\right) + 2n\beta = 2n\beta\left(\frac{x}{|x|}\right) > 0.$$

Поэтому в обоих случаях выполнено (8). Условие же (9) в обоих случаях очевидно.

Следствие 2. *Пусть $G = R^n$. Если матрица $A(x)$ в операторе M при $|x| \geq N > 0$ имеет вид*

$$A(x) = a(\mu(x))I_n,$$

где $0 < a(\cdot) \in C^1(R^1)$, функция $\mu(x) \in C^2\left(R^n \setminus \{x : |x| < N\}\right)$ такова, что $\mu^2(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$ и

$$\Delta\mu^2(x) \geq 0,\ 0 < |\nabla\mu| \leq const,$$

то при выполнении условий (3) и условия A оператор M (1), (2) самосопряжен в существенном.

Доказательство является непосредственной проверкой условий теоремы 1 с $k = 1$, $B(x) = I_n$.

Пусть связная область $G \subseteq R^n$ является полным римановым многообразием с метрическим тензором $B^{-1}(x)$, где симметрическая матрица-функция $B(x) > 0$. Рассмотрим семейство геодезических, проходящих через некоторую точку x_0. Пусть эти геодезические не имеют точек пересечения (кроме x_0). Они покрывают область G (см. [8, с. 167, теорема 4.2]). Если s — канонический параметр на геодезической, то в области G можно определить векторное поле

$$\vec{p}(x) = \dot{x_s}\big|_{x(s)=x},$$

где $x(s)$ — геодезическая семейства, проходящая через точку x. Это векторное поле будем называть центральным геодезическим потоком, исходящим из точки x_0. Обозначим также через $r(x)$ — расстояние точки x до x_0 в метрике риманова многообразия.

Следствие 3. *Пусть связная область G является полным римановым многообразием с метрическим тензором $B^{-1}(x)$, где позитивная матрица-функция $B(x) \in C^1(G)$. Пусть также существует исходящий из некоторой точки x_0 центральный геодезический поток $\vec{p}(x) \in C^1(G)$, удовлетворяющий неравенству*

$$\nabla\vec{p}(x) \geq -\frac{1}{r(x)},\ x \in G \setminus \{x_0\}. \tag{10}$$

Если в операторе M матрица $A(x)$ при $r(x) \geq N > 0$ имеет вид

$$A(x) = a(r(x))B(x),$$

где $0 < a(\cdot) \in C^1\left([0;\infty)\right)$, то при выполнении условий (3) и условия A оператор M (1), (2) самосопряжен в существенном.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что $\left(B^{-1}\vec{p},\vec{p}\right) = 1$, а также то, что выражение $\left(B^{-1}\vec{p},\vec{dx}\right)$, где $\vec{dx} = \{dx_1, dx_2, \dots, dx_n\}$, является полным дифференциалом функции $r(x)$ (см. [9, с. 29–51]). Воспользуемся частным случаем теоремы 1 при $k = 1$, $\mu_1(x) = \mu(x) = r(x)$, $B_1(x) = B(x)$.

$$B\nabla\mu^2 = B\nabla r^2 = 2r \cdot B\nabla r = 2rB \cdot B^{-1}\vec{p} = 2r\vec{p},$$

$$\nabla(B\nabla\mu^2) = 2\nabla(r\vec{p}) = 2(\nabla r, \vec{p}) + 2r\nabla\vec{p} = 2(B^{-1}\vec{p},\vec{p}) + 2r\nabla\vec{p} = 2(1 + r\nabla\vec{p}).$$

В силу условия (10) выполнено условие (8) теоремы 1. Далее

$$(B\nabla\mu, \nabla\mu) = (B\nabla r, \nabla r) = \left(B^{-1}\vec{p},\vec{p}\right) = 1.$$

Поэтому и условие (9) тоже выполнено. Следствие 3 доказано.

Поскольку условие (10) является трудно проверяемым, вопрос о том, содержит ли следствие 3 случай $G \neq R^n$, без дополнительных рассмотрений решить нельзя. Следующий простой пример показывает, что в теореме 1 этот случай содержится.

Следствие 4. *Пусть область G является полосой в R^2:*

$$G = \{x \in R^2;\ -\infty < x_1 < \infty;\ -h < x_2 < h\},$$

в которой задана функция $\mu(x) = \sqrt{x_1^2 - h^2 \ln\left(1 - \frac{x_2^2}{h^2}\right)^\alpha}$ с константой $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$. Если при $\mu(x) \geq N > 0$ матрица $A(x)$ в операторе M имеет вид

$$A(x) = a(\mu)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{x_2^2}{h^2}\right)^2 \end{pmatrix},$$

где $0 < a(\cdot) \in C^1([0,\infty))$, то при выполнении условий (3) и условия A оператор M (1), (2) самосопряжен в существенном.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим выполнение условий (8), (9) теоремы 1 с $k = 1$, $\mu_1(x) = \mu(x)$,

$$B_1(x) = B(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{x_2^2}{h^2}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

$$\nabla\left(B\nabla\mu^2\right) = 2\,(1 + \alpha) - 6\alpha\frac{x_2^2}{h^2} \geq 2 - 4\alpha \geq 0,$$

т.е. условие (8) выполняется. Далее

$$(B\nabla\mu, \nabla\mu) = \frac{x_1^2 + \alpha^2 x_2^2}{x_1^2 - h^2 \ln\left(1 - \frac{x_2^2}{h^2}\right)^{\alpha}}.$$

Поскольку при $0 \le t < 1$

$$-\ln(1-t) = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \ldots \ge t,$$

то получаем

$$(B\nabla\mu, \nabla\mu) \le \frac{x_1^2 + \alpha^2 x_2^2}{x_1^2 + \alpha x_2^2} \le 1.$$

То есть условие (9) тоже выполняется. Следствие 4 доказано.

3. Полное доказательство теоремы 1 будет опубликовано в другом месте. Здесь мы опишем основные средства, используемые в этом доказательстве.

Назовем семейство функций $\psi(x,\tau)$, которые определены в G, с параметром $\tau \in [\tau_0, \infty)$, ***накрывающим область*** G, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1c) $0 \le \psi(x,\tau) \in C\,(G \times [\tau_0, \infty))$ и при любом $\tau \in [\tau_0, \infty)$
$$\psi(x,\tau) \in C_0(G) \cap C^{(1,1)}(supp\,\psi);$$

2c) открытые множества $\Omega_\tau = Int\,supp\,\psi(x,\tau)$ $(\bar{\Omega}_\tau = supp\,\psi)$ расширяются с ростом τ, т.е.: $\tau_2 > \tau_1 \Rightarrow \bar{\Omega}_{\tau_1} \subset \Omega_{\tau_2}$; (при этом для любого компакта $R \subset G$ при достаточно больших τ $R \subset \Omega_\tau$);

3c) при любом $\tau \in [\tau_0, \infty)$ $\partial\Omega_\tau$ состоит из конечного числа кусочно гладких замкнутых гиперповерхностей, причем для любой точки $x \in G \setminus \Omega_{\tau_0}$ существует единственное значение τ, при котором $x \in \partial\Omega_\tau$;

4c) условие 3c) определяет функцию
$$\tau = \rho(x) \in Lip_{1\,loc}(G \setminus \Omega_{\tau_0});$$

5c) при каждом $x \in G$
$$\int\limits_{\tau_0}^{\infty} \psi(x,\tau)\,d\tau = \infty.$$

Введем вектор-функцию $(\nabla_x\psi)\big|_{\tau=\rho(x)}$, которая понимается в смысле предельных значений $\nabla_x\psi$ на $\partial\Omega_\tau$ из внутренности области Ω_τ.

Теорема 2. *Пусть для оператора M выполнены условия (3) и условие A, а также существует накрывающее область G семейство, с которым матрица $A(x)$ старших коэффициентов оператора M удовлетворяет неравенствам:*

$$\nabla_x\left(A\nabla_x\psi\right)\leq C\psi,\quad \text{почти всюду в}\ \ \Omega_\tau\ (\tau\geq\tau_0);$$

$$\Big(A\left(\nabla_x\psi\right)\big|_{\tau=\rho(x)},\nabla\rho\Big)\geq -C,\quad \text{почти всюду в}\ \ G\setminus\Omega_{\tau_0}$$

с некоторой константой $C>0$. Тогда оператор M вида (1), (2) самосопряжен в существенном.

Теорема 1 является следствием теоремы 2 при особом выборе накрывающего семейства.

Список литературы

[1] *H. Weyl*, Über gewöhnliche differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen. — *Math. Ann.* (1910), Bd. 68, S. 222–269.

[2] *Н.Н. Уральцева*, О несамосопряжённости в $L_2(R^n)$ эллиптического оператора с быстро растущими коэффициентами. — *Зап. науч. семин. ЛОМИ АН СССР* (1969), т. 149, с. 288–294.

[3] *С.А. Лаптев*, О замыкании в метрике обобщенного интеграла Дирихле. — *Дифф. ур* (1971), т. 7, , с. 727–736.

[4] *A. Devinatz*, Essential self-adjointness of Schrödinger-type operators. — *J. Funct. Anal.* (1977), v. 25, No. 1, p. 58–69.

[5] *Ф.С. Рофе-Бекетов*, Замечание в связи с многомерным обобщением теоремы Г. Вейля о самосопряженности. — *Теор. функц., функц. анализ и их прил.* (1989), вып. 52, с. 88–90.

[6] *И. Стейн*, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. Мир, Москва (1972).

[7] *T. Kato*, Schrödinger operators with singular potentials. — *Israel J. Math.* (1972), v. 13, p. 135–148.

[8] *Ш. Кобаяси, К. Номидзу*, Основы дифференциальной геометрии. Мир, Москва (1981).

[9] *Н.И. Ахиезер*, Вариационное исчисление. Выща школа, Харьков (1981).

About one of Weil's theorems for many-dimensional case

A.G. Brusentsev

It is given the new theorem, which extends the known Weil's theorem about Shturm–Liuvill's operator self-adjointness in $L_2(-\infty;+\infty)$ to elliptic second-order operators in $L_2(G)$ $(G \subseteq R^n)$. Many-dimensional Weil's theorem is followed from more general theorem, for statement which special construction of covering collection is built. Given results contain the known analogs of many-dimensional Weil's theorem and, as distinguished from them, the results refer to the domain G, which may be proper subset of R^n.