Математическая физика, анализ, геометрия
2002, т. 9, № 2, с. 253–260

Непрерывность мер на единичной окружности, заданных своими круговыми параметрами

Л.Б. Голинский

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, Харьков, 61103, Украина
E-mail:golinskii@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 5 февраля 2002 г.
Представлена И.В. Островским

Ортогональные полиномы на единичной окружности полностью определяются своими круговыми параметрами посредством рекуррентных соотношений Сеге. Исследуется точечный спектр (множество точечных масс) мер, заданных своими круговыми параметрами. При этом существенно различаются случаи, в которых параметры близки к нулю или ненулевому комплексному числу из открытого единичного круга. Приведены новые примеры сингулярных непрерывных мер в терминах их круговых параметров.

Ортогональні поліноми на одиничному колі повністю визначаються своїми круговими параметрами за допомогою рекурентних відношень Сеге. Досліджується дискретний спектр (множина точкових мас) мір, які задані своїми круговими параметрами. При цьому суттєво відрізняються випадки, коли ці параметри збігаються до нуля або до ненульового комплексного числа з відкритого одиничного кола. Наведено нові приклади сингулярних неперервних мір у термінах їх кругових параметрів.

Пусть μ — вероятностная мера на единичной окружности $\mathbb{T}$, т.е. конечная положительная борелевская мера на $\mathbb{T}$ массы 1. Будем считать носитель меры $\operatorname{supp}\mu$ бесконечным множеством. Ортонормированные по мере μ полиномы $\{\varphi_n\}_{n\ge 0}$ однозначно определяются соотношениями

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi_n(\mu,\zeta)\overline{\varphi_m(\mu,\zeta)}\, d\mu(\zeta) = \delta_{m,n}\,, \qquad m,n=0,1,2,\dots\,,$$

где

$$\varphi_n(\mu,z) = \kappa_n(\mu)z^n + \dots\,, \qquad \kappa_n(\mu) > 0.$$

Mathematics Subject Classification 2000: 42C05.

Изучение множества точечных масс меры, заданной своими круговыми параметрами, опирается на известное соотношение (ср. [3, теорема 20.2]):

$$\mu\{\zeta\} > 0, \quad \zeta \in \mathbb{T} \iff \sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_k(\zeta)|^2 < \infty. \tag{1}$$

Тем самым, для доказательства того, что $\mu\{\zeta\} > 0$ $(\mu\{\zeta\} = 0)$, необходимо получить оценки сверху (снизу) ортонормированных полиномов φ_n.

Монические ортогональные полиномы определяются равенствами

$$\Phi_n(\mu, z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \kappa_n^{-1} \varphi_n(\mu, z) = z^n + \dots, \quad n \geq 1, \qquad \Phi_0 = 1$$

и задают последовательность комплексных чисел $a_n = \Phi_n(\mu, 0)$, называемых *круговыми параметрами*, которые играют ключевую роль в теории ортогональных полиномов на единичной окружности. Известно [2, с. 7], что $|a_n| < 1$, $n \geq 1$, и, более того, по теореме Фавара существует взаимно однозначное соответствие между множеством вероятностных мер на единичной окружности и классом всех последовательностей комплексных чисел из открытого единичного круга $\mathbb{D}$. Тем самым представляется естественным изучение свойств мер в терминах их круговых параметров.

Начнем с основных рекуррентных соотношений для монических ортогональных полиномов [2, формула (8.1)], в которых взаимные полиномы Φ_j^* задаются формулой $\Phi_j^*(z) = z^j \overline{\Phi_j(1/\bar{z})}$:

$$\Phi_n^*(z) = \Phi_{n-1}^*(z) + \overline{a}_n z \Phi_{n-1}(z) = \Phi_{n-1}^*(z) \left(1 + \overline{a}_n z \frac{\Phi_{n-1}(z)}{\Phi_{n-1}^*(z)} \right), \qquad n \geq 1.$$

Итерация этого равенства приводит к

$$\Phi_n^*(z) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \overline{a}_n z b_{k-1}(z) \right), \qquad b_j = \frac{\Phi_j}{\Phi_j^*}. \tag{2}$$

Поскольку $|b_j| = 1$ на $\mathbb{T}$ и $\Phi_j^* \neq 0$ в $\overline{\mathbb{D}}$, то $|b_j| \leq 1$ в $\overline{\mathbb{D}}$ и

$$|\Phi_n^*(z)| = \frac{|\varphi_n^*(z)|}{\kappa_n} \leq \prod_{k=1}^{n} \left(1 + |a_n| \right), \tag{3}$$

$$|\varphi_n^*(\zeta)| = |\varphi_n(\zeta)| \leq \kappa_n \exp\left\{ \sum_{k=1}^{n} |a_k| \right\}, \qquad \zeta \in \mathbb{T}. \tag{4}$$

Известный класс Сеге мер на $\mathbb{T}$ $(\log \mu' \in L^1(\mathbb{T}))$ в терминах круговых параметров характеризуется условием $\sum_n |a_n|^2 < \infty$ [2, теорема 8.2].

Теорема 1. *Пусть мера μ принадлежит классу Сеге, и пусть ее круговые параметры a_n удовлетворяют*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-2\sum_{k=1}^{n}|a_k|\right\} = \infty. \tag{5}$$

Тогда $\mu\{\zeta\} = 0$ при всех $\zeta \in \mathbb{T}$, т.е. мера μ непрерывна. Обратно, если для произвольной меры μ ее круговые параметры $a_n < 0$ и ряд (5) *сходится, то* $\mu\{1\} > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем в рассмотрение полиномы 2-го рода ψ_n, ортонормированные относительно некоторой меры σ, круговые параметры которых равны $\{-a_n\}$. Соотношение между φ_n и ψ_n известно [2, формула (1.17)]:

$$\varphi_n^*(z)\psi_n(z) + \varphi_n(z)\psi_n^*(z) = 2z^n.$$

При $z = \zeta \in \mathbb{T}$ имеем

$$\overline{\varphi_n(\zeta)}\psi_n(\zeta) + \varphi_n(\zeta)\overline{\psi_n(\zeta)} = 2\Re\left\{\varphi_n(\zeta)\overline{\psi_n(\zeta)}\right\} = 2. \tag{6}$$

Поэтому на окружности выполняется $|\varphi_n\psi_n| \geq 1$, и оценка сверху для ψ_n влечет оценку снизу для φ_n.

Формула для старшего коэффициента κ_n в терминах круговых параметров [2, формула (8.6)]

$$\kappa_n^{-2} = \prod_{k=1}^{n}(1-|a_k|^2), \quad n \geq 1, \qquad \kappa_0 = 1, \tag{7}$$

показывает, что эти коэффициенты для φ_n и ψ_n совпадают. Кроме того, в классе Сеге $\kappa_n^2 \nearrow \kappa^2 < \infty$. Из (4), примененному к ψ_n, следует, что

$$|\varphi_n(\zeta)|^2 \geq |\psi_n(\zeta)|^{-2} \geq \kappa^{-2}\exp\left\{-2\sum_{k=1}^{n}|a_k|\right\}.$$

По (5) ряд в (1) расходится, и первое утверждение тем самым установлено.

Предположим теперь, что $a_n = \overline{a}_n$. Тогда полиномы φ_n, ψ_n вещественны на вещественной оси, и в силу (2), (7)

$$\Phi_n(1) = \Phi_n^*(1) = \prod_{k=1}^{n}(1+a_n), \qquad \varphi_n^2(1) = \kappa_n^2\Phi_n^2(1) = \prod_{k=1}^{n}\frac{1+a_k}{1-a_k}.$$

Если дополнительно известно, что $a_n < 0$, то

$$\psi_n^2(1) = \prod_{k=1}^{n}\frac{1+|a_k|}{1-|a_k|} = \exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\log\frac{1+|a_k|}{1-|a_k|}\right\}.$$

Элементарное неравенство $\log \frac{1+x}{1-x} \ge 2x,\ \ 0 \le x < 1$, дает

$$\psi_n^2(1) \ge \exp\left\{2\sum_{k=1}^{n}|a_k|\right\}.$$

Из (6) видно, что $\varphi_n(1)\psi_n(1) = 1$ и

$$\varphi_n^2(1) \le \exp\left\{-2\sum_{k=1}^{n}|a_k|\right\}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^2(1) \le \sum_{n=1}^{\infty}\exp\left\{-2\sum_{k=1}^{n}|a_k|\right\}.$$

Второе утверждение теоремы есть теперь непосредственное следствие (1). ■

Следствие 2. *Если $|a_n| \le (2n)^{-1}$ при $n \ge n_0$, то мера μ непрерывна. Если же $a_n < 0$ и $|a_n| \ge (1/2+\epsilon)n^{-1}$ при некотором $\epsilon > 0$ и $n \ge n_0$, то $\mu\{1\} > 0$.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно в виду расходимости ряда (5). Что касается второго утверждения, мы хотим показать, что ряд (5) сходится. С этой целью положим

$$u_n = \exp\left\{2\sum_{k=1}^{n}a_k\right\} = \exp\left\{-2\sum_{k=1}^{n}|a_k|\right\},$$

так что $u_{n-1}/u_n = e^{2|a_n|}$, $n(u_{n-1}/u_n - 1) = n\left(e^{2|a_n|}-1\right) > 2n|a_n| \ge 1+2\epsilon$ при $n \ge n_0$. В силу признака Раабе сходимости рядов (5) сходится, как и утверждалось. ■

Теорема 3. *Пусть круговые параметры a_n меры μ таковы, что $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \sup_n |a_n| < 1$. Если*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{2}{1-\gamma^2}\sum_{k=1}^{n}|a_k|\right\} = \infty,$$

то μ непрерывна.

Доказательство. Общие ортонормированные полиномы допускают оценку сверху иного рода, справедливую и вне класса Сеге.

Из (3) и (7) ясно, что для $\zeta \in \mathbb{T}$ и для полиномов 2-го рода ψ_n

$$\log|\psi_n(\zeta)|^2 \le \sum_{k=1}^{n}\log\frac{1+|a_k|}{1-|a_k|}.$$

Но
$$\log\frac{1+|a_k|}{1-|a_k|}=2\sum_{s=0}^{\infty}\frac{|a_k|^{2s+1}}{2s+1}\,,$$
так что
$$|\psi_n(\zeta)|\le\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{|a_k|^{2s+1}}{2s+1}\right\}.$$
По предположению теоремы
$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{|a_k|^{2s+1}}{2s+1}<|a_k|\sum_{s=0}^{\infty}|a_k|^{2s}\le\frac{|a_k|}{1-\gamma^2}\,,$$
и значит, в силу $|\varphi_n(1)\psi_n(1)|\ge1$
$$|\varphi_n(\zeta)|^2\ge\exp\left\{-\frac{2}{1-\gamma^2}\sum_{k=1}^{n}|a_k|\right\},\qquad\zeta\in\mathbb{T}.\tag{8}$$
Остается учесть (1). ■

П р и м е р. Оценка (8) приводит к любопытным примерам сингулярных непрерывных мер, заданных своими круговыми параметрами.

Рассмотрим множество $\Lambda=\{n_1<n_2<\dots\}$ натуральных чисел с $m_k=n_{k+1}-n_k\to\ \infty$ при $k\to\infty$. Последовательность $\{a_n\}$ комплексных чисел назовем лакунарной, если $a_n=0,\ \ n\notin\Lambda$.

Введем лакунарную последовательность круговых параметров, таких что $a_{n_k}=a$, $0<|a|<1$. Мы имеем
$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|=j|a|,\quad n_j\le n<n_{j+1}-1,\qquad j\ge1.$$
Согласно (8)
$$\sum_{n=n_1}^{\infty}|\varphi_n(\zeta)|^2\ge\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1}\exp\left\{-\frac{2j|a|}{1-|a|^2}\right\}=\sum_{j=1}^{\infty}(n_{j+1}-n_j)\exp\left\{-\frac{2j|a|}{1-|a|^2}\right\}.$$
Предположим далее, что лакуны m_j растут экспоненциально, точнее говоря,
$$\log m_j\ge2j|a|(1-|a|^2)^{-1}.$$
В этом случае последний ряд расходится, и по (1) $\mu\{\zeta\}=0$ всюду на окружности, т.е. мера непрерывна. С другой стороны, по теореме С.В. Хрущева [6, следствие 9.2] такая мера является сингулярной.

Нетрудно построить примеры более общего вида. Пусть

$$a_{n_k} = \gamma_k, \qquad 0 < \limsup_{k\to\infty} |\gamma_k| < 1. \tag{9}$$

Тогда мера, порожденная такой последовательностью круговых параметров, сингулярна и непрерывна, если только лакуны m_j растут достаточно быстро.

С другой стороны, пусть в (9) $\sum_k |\gamma_k|^2 < \infty$, что приводит к подклассу мер в классе Сеге с лакунарными круговыми параметрами. Как и выше, имеем

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} \exp\left\{-2\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right\} = \sum_{j=1}^{\infty} (n_{j+1}-n_j) \exp\left\{-2\sum_{k=1}^{j} |\gamma_k|\right\}.$$

По неравенству Коши–Буняковского

$$\left(\sum_{k=1}^{j} |\gamma_k|\right)^2 \le j \sum_{k=1}^{j} |\gamma_k|^2 \le C^2 j, \qquad C^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^2,$$

так что

$$\sum_{j=1}^{\infty} (n_{j+1}-n_j) \exp\left\{-2\sum_{k=1}^{j} |\gamma_k|\right\} \ge \sum_{j=1}^{\infty} (n_{j+1}-n_j)\, e^{-2C\sqrt{j}}.$$

По теореме 1 соответствующая мера непрерывна как только лакуны m_j экспоненциально растут. Остается открытым вопрос, будет ли такая мера абсолютно непрерывной.

Рассмотренное выше условие (5) с необходимостью влечет $\liminf_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Значительно более сложная ситуация возникает в случае

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad 0 < |a| < 1. \tag{10}$$

По теореме Я.Л. Геронимуса [4, теорема $1'$] существенный носитель соответствующей меры μ есть дуга

$$\Delta_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{e^{it}:\ \alpha \le t \le 2\pi - \alpha\}, \qquad 0 < \alpha \stackrel{\text{def}}{=} 2\arcsin|a| < \pi. \tag{11}$$

Существенный вклад в теорию ортогональных полиномов на дуге окружности внес Н.И. Ахиезер [1].

Обозначим через Δ_α^o внутренность дуги (11). В [5, следствие 13] получен такой результат.

Теорема 4. *Пусть круговые параметры a_n меры μ удовлетворяют условию* (10)*, и для любого вещественного x*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\Big\{x \sum_{k=1}^{\infty} |a_k - a|\Big\} = \infty. \tag{12}$$

Тогда μ непрерывна на дуге Δ_α^o.

Оказывается, этот результат точен в следующем смысле.

Пусть $0 < |b| < 1$, обозначим через $\mathcal{B}(b)$ класс всех последовательностей $\{b_n\}$ комплексных чисел, удовлетворяющих соотношениям:

(i) $|b_n| < 1$ при $n \geq 1$;

(ii) $b_n = b(1+\epsilon_n)$, $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$;

(iii) $\sum_n |\epsilon_n| = \infty$.

Две последовательности $\{a'_n\} \in \mathcal{B}(a')$ и $\{a''_n\} \in \mathcal{B}(a'')$ назовем эквивалентными, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} |\epsilon'_k|}{\sum_{k=1}^{n} |\epsilon''_k|} = 1,$$

где $a'_n = a'(1+\epsilon'_n)$, $a''_n = a''(1+\epsilon''_n)$.

Теорема 5. *Пусть круговые параметры $\{a'_n\}$ меры μ' удовлетворяют условиям $a'_n = a'(1+\epsilon'_n)$ с $\lim_{n\to\infty} \epsilon'_n = 0$ и $0 < |a'| < 1$. Предположим, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{M \sum_{k=1}^{n} |a'_k - a'|\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{M|a'| \sum_{k=1}^{n} |\epsilon'_k|\right\} < \infty$$

при некотором вещественном M. Тогда для любого натурального числа N существует последовательность $\{a_n\}$, эквивалентная исходной, такая, что множество точечных масс соответствующей меры ортогональности μ содержит не менее N точек на дуге Δ_α^o.

Список литературы

[1] *Н.И. Ахиезер*, О полиномах, ортогональных на дуге окружности. — *ДАН СССР* (1960), v. 130, №2, с. 247–250.

[2] *Я.Л. Геронимус*, Многочлены ортогональные на окружности и на отрезке. Гос. изд-во физ.-мат. литературы, Москва (1958).

[3] *Я.Л. Геронимус*, Полиномы, ортогональные на круге, и их приложения. — *Зап. НИИ матем. и мех. и ХМО* (1948), т. 19, с. 35–120.

[4] *Я.Л. Геронимус*, О характере решения проблемы моментов в случае предельно-периодической ассоциированной дроби. — *Изв. АН СССР*, сер. мат. (1941), т. 5, с. 203–210.

[5] *L. Golinskii, P. Nevai, F. Pinter and W. van Assche*, Perturbations of orthogonal polynomials on an arc of the unit circle, II. — *J. Approx. Theory* (1999), v. 96, p. 1–32.

[6] *S.V. Khrushchev*, Schur's algorithm, orthogonal polynomials and convergence of Wall's continued fractions in $L^2(\mathbb{T})$. — *J. Approx. Theory* (2001), v. 108, p. 161–248.

Continuity of measures on the unit circle given by their reflection coefficients

L.B. Golinskii

Orthogonal polynomials on the unit circle are fully determined by their reflection coefficients through the Szegő recurrences. The discrete spectrum (the set of mass points) of measures is studied in terms of the reflection coefficients. The cases when these parameters go to zero or to nonzero complex number from the open unit disk are essentially different. New examples of singular continuous measures given by their reflection coefficients are presented.