Математическая физика, анализ, геометрия
2002, т. 9, № 2, с. 294–305

Голоморфные почти периодические отображения в проективное пространство

Н.Д. Парфенова

Механико-математический факультет
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы 4, Харьков, 61077, Украина
E-mail:Natalia.D.Parfyonova@univer.kharkov.ua
nataliaparfyonova@yahoo.com

Статья поступила в редакцию 25 февраля 2002 г.
Представлена И.В. Островским

Изучаются голоморфные почти периодические отображения из полосы в m-мерное комплексное проективное пространство. Дано полное описание наборов из $(m+1)$ дискретного множества в полосе, которые могут быть нулями однородных координат такого отображения.

Вивчаються голоморфні майже періодичні відображення зі смуги в m-мірний комплексний проективний простір. Наведено повний опис наборів з $(m+1)$ дискретної множини в смузі, які можуть бути нулями однорідних координат такого відображення.

Непрерывное отображение $F(z)$ из горизонтальной полосы S в плоскости в метрическое пространство X называется *почти периодическим,* если семейство сдвигов $\{F(z+h)\}_{h\in\mathbb{R}}$ относительно компактно в топологии равномерной сходимости в S. В случае, когда S — открытая полоса, (возможно бесконечной ширины), семейство сдвигов должно быть относительно компактным в топологии равномерной сходимости в каждой замкнутой подполосе конечной ширины в S.

Если X — комплексная плоскость, а $F(z)$ — голоморфная функция в S, то это определение совпадает с определением *голоморфной почти периодической* функции в S. Такие функции активно изучались на протяжении XX века. В последние годы вопросы, связанные с распределением нулей голоморфных почти периодических функций рассматривались в работах Г. Торнехава [1, 2],

---

Mathematics Subject Classification 2000: 42A74, 30D35.
Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS, проект 99-00089.

А. Рашковского, Л. Ронкина, С. Фаворова [3–6]. В частности, в [3] было получено полное описание нулей голоморфных почти периодических функций в полосе.

В случае, когда X — замкнутая комплексная плоскость со сферической метрикой, а $F(z)$ — мероморфная функция в полосе, то $F(z)$ называется *мероморфной почти периодической* функцией в S. Этот класс был, по-видимому, впервые рассмотрен Сеньером-и-Балагером [7]. Функции этого класса также рассматривались в [8]. Там были описаны нули и полюса таких функций, доказана возможность представления мероморфной почти периодической функции в виде отношения двух голоморфных почти периодических функций (с общими нулями), а также получен критерий сохранения почти периодичности при сложении и умножении двух мероморфных почти периодических функций.

Отметим, что мероморфные почти периодические функции являются частным случаем так называемых нормальных мероморфных функций, которые привлекают интерес аналитиков в последние годы (см. [9–11]).

Заметим, что большинство результатов о распределении значений мероморфных функций обобщаются в той или иной форме на целые кривые, т.е. голоморфные отображения плоскости в проективное пространство; это же справедливо и для нормальных мероморфных функций. Поэтому естественно распространить упоминавшиеся результаты о мероморфных почти периодических функциях на голоморфные почти периодические отображения из полосы в проективное пространство $\mathbb{CP}^m$.

Чтобы сформулировать основные результаты, введем некоторые определения и обозначения.

Проективным пространством $\mathbb{CP}^m$ назывется множество всех комплексных лучей $\Lambda = \left\{z \in \mathbb{C}^{m+1} \mid z \in \lambda w, w \in \mathbb{C}\right\}$, где λ фиксированная точка из $\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$, определяющая луч Λ. *Однородными координатами* точки $\Lambda \in \mathbb{CP}^m$ называются координаты $(\lambda_0, \dots, \lambda_m)$ этой точки λ. Они определяются с точностью до умножения на ненулевой комплексный скаляр. Будем это обзначать $\Lambda = (\lambda_0 : \dots : \lambda_m)$.

Каноническим отображением пространства $\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$ на пространство $\mathbb{CP}^m$ называется отображение π, ставящее в соответствие каждой точке $z \in \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$ содержащий ее луч Λ.

Будем считать, что в $\mathbb{CP}^m$ введена метрика Фубини–Штуди ρ (см. [12]).

Обозначим $\omega_j = \{\pi z \; | z \in \mathbb{C}^{m+1}, \; z^j \neq 0, \; \}$, $j = 0, \dots, m$. Это открытые множества, причем $\mathbb{CP}^m = \bigcup\limits_{j=0,\dots,m} \omega_j$. Каждое из множеств ω_j гомеоморфно $\mathbb{C}^m$. Будем обозначать данные гомеоморфизмы φ_j.

Отображение $F(z)$ голоморфно, если в окрестности каждой точки $z_0 \in S$ такой, что $F(z_0) \in \omega_j$, отображение $\varphi_j(F(z))$ является голоморфным отображением в $\mathbb{C}^m$. Отметим, что любое голоморфное отображение $F(z)$ из полосы S в $\mathbb{CP}^m$ можно записать в однородных координатах в виде $F(z) = (f^0(z) : \ldots : f^m(z))$, где $f^j(z), \quad j = 0, \cdots, m$, — голоморфные функции в S без общих нулей. Очевидно, что нулевые множества координатных функций не зависят от выбора конкретных однородных координат.

Отображение $F(z)$, действующее из полосы S в проективное пространство $\mathbb{CP}^m$, будем называть *невырожденным*, если для любого $j = 0, \ldots, m$ $F(S) \cap \omega_j \neq \oslash$. Это означает, что ни одна из координатных функций не равна тождественно 0.

Далее через S обозначим полосу $\{z \in \mathbb{C} | a < \mathrm{Im}\ z < b\}$, где $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Если $S' = \{z \in \mathbb{C} | \alpha < \mathrm{Im}\ z < \beta\}$, то $S \subset\subset S'$ означает, что $a < \alpha < \beta < b$.

Для описания нулевых множеств голоморфных функций в полосе S будем использовать понятие дивизора. Под *дивизором* в области $G \subset \mathbb{C}$ понимается множество пар $\{(a_n, k_n)\}$, где носитель дивизора supp $d = \{a_n\}$ — дискретное множество без предельных точек внутри G, а k_n — натуральные числа.

Если $f(z)$ — голоморфная функция в S, то ее дивизором d_f называется множество пар $\{(a_n, k_n)\}$, где a_n — корни $f(z)$, k_n их кратности. Дивизор можно также трактовать как заряд, сосредоточенный в точках a_n с массами k_n. Следуя [3, 4], *дивизор* d в полосе S *назовем почти периодическим*, если для любой бесконечно дифференцируемой финитной в S функции $\chi(z)$ сумма $\sum\limits_{a_n \in \mathrm{supp}\ d} k_n \chi(a_n + t)$ (т.е. свертка заряда d с функцией χ) является непрерывной почти периодической функцией по переменной $t \in \mathbb{R}$.

В [5, 6] было доказано, что каждому дивизору d соответствует некоторый элемент $c(d)$ группы когомологий $\mathbf{H}^2(\mathbf{K}, \mathbb{Z})$, где $\mathbf{K}$ — универсальный Боровский компакт (фактически, первый класс Чженя некоторого специального расслоения над $\mathbf{K}$), при этом d есть дивизор голоморфной почти периодической функции в полосе тогда и только тогда, когда $c(d)$ — тривиальный класс.

Дивизоры $d_1, \ldots, d_m$ назовем совместно разделенными, если в любой полосе $S' \subset\subset S$ найдется число $r(S') > 0$ такое, что в любой круг r радиуса с центром в произвольной точке из S' не пересекается с носителем хотя бы одного из дивизоров $d_1, \ldots, d_m$.

Основным реультатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы дивизоры $d_0, \ldots, d_m$ в полосе S были бы дивизорами координатных функций для какого-либо голоморфного почти периодического отображения $F : S \to \mathbb{CP}^m$, необходимо и достаточно выполнения следующих условий: а) дивизоры $d_0, \ldots, d_m$ почти периодические, б) классы Чженя $c(d_j)$ всех дивизоров равны, в) дивизоры $d_0, \ldots, d_m$ совместно разделены.*

Точку $a \in S$ назовем *устранимой особой точкой* голоморфного отображения $F(z)$, если в выколотой окрестности этой точки $0 < |z-a| < \delta$, $F(z)$ представимо в виде $F(z) = (f^0(z) : \ldots : f^m(z))$, причем все функции $f^j(z)$ голоморфны в окрестности $|z-a| < \delta$ и обращаются в нуль в точке a. Очевидно, что после деления всех функций на $(z-a)^n$ в подходящей степени получается представление $F(z) = (\tilde{f}^0(z) : \ldots : \tilde{f}^m(z))$, где функции $\tilde{f}^j(z)$ голоморфны при $|z-a| < \delta$ и одновременно не обращаются в нуль в точке a.

Теорема 2. *Для любого голоморфного почти периодического отображения $F(z)$ из полосы S в $\mathbb{CP}^m$ можно найти такое дискретное множество $V \subset S$, что на $S \setminus V$ справедливо представление $F(z) = (f^0(z) : \ldots : f^m(z))$, где f^j — голоморфные почти периодические функции в S, при этом все точки из V будут устранимыми особенностями для $F(z)$.*

Пусть $F_1(z) = (f_1^0(z) : \ldots : f_1^m(z))$ и $F_2(z) = (f_2^0(z) : \ldots : f_2^m(z))$ — голоморфные отображения из S в $\mathbb{CP}^m$, и пусть V — множество общих нулей $m+1$ функции $f_1^0(z)f_2^0(z), \ldots, f_1^m(z)f_2^m(z)$.

Голоморфное отображение $(F_1 \times F_2)(z)$ из S в $\mathbb{CP}^m$ определяется как аналитическое продолжение отображения вида $(f_1^0(z)f_2^0(z) : \ldots : f_1^m(z)f_2^m(z))$ из $S \setminus V$ в $\mathbb{CP}^m$ на все S.

При доказательстве теорем 1 и 2 используем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $F_1(z)$, $F_2(z)$ — голоморфные почти периодические отображения из S в $\mathbb{CP}^m$. Отображение $(F_1 \times F_2)(z)$ будет голоморфным почти периодическим отображением тогда и только тогда, когда дивизоры его координатных функций совместно разделены.*

Прежде чем доказать эти теоремы, отметим простые факты, которые доказываются так же, как и соответствующие утверждения для голоморфных функций в полосе (см.[13]).

Предложение 1. *Пусть F — голоморфное почти периодическое отображение, действующее из полосы S в проективное пространство $\mathbb{CP}^m$. Тогда F равномерно непрерывно в метрике ρ в любой полосе $S' \subset\subset S$.*

Предложение 2. *Если последовательность $\{F_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ голоморфных почти периодических отображений, дествующих из полосы S в проективное пространство $\mathbb{CP}^m$, равномерно сходится к отображению $F(z)$, то $F(z)$ является почти периодическим отображением.*

Следующее утверждение показывает, что условие совместной разделенности дивизоров в теореме 1 является необходимым для почти периодичности соответствующего голоморфного отображения.

Предложение 3. *Пусть* $F(z) = (f_1^0(z) : \ldots : f_1^m(z))$ — *голоморфное почти периодическое отображение из* S *в* $\mathbb{CP}^m$. *Тогда для любой подполосы* $S' \subset\subset S$ *найдётся положительное число* $r_0 = r_0(S')$ *такое, что в любом круге* $B(z_0, r_0) \subset\subset S'$ *какая-то из однородных координатных функций* $f^j(z)$ *не обращается в нуль.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что это не так. Тогда для некоторой замкнутой подполосы $S' \subset\subset S$ найдется последовательность кругов $B(z_n, r_n)$, где $z_n \in S'$ и $r_n \to 0$ при $n \to \infty$, что в этих кругах все координатные функции $F(z)$ не обращаются в нуль. Пусть $z_n = x_n + iy_n$ и $\alpha < y_n < \beta$ $(\bar{S}' = \{z \in S | \alpha \le \operatorname{Im} z \le \beta\})$. При необходимости, переходя к подпоследовательности, можно считать, в силу замкнутости подполосы $\bar{S}'$, что последовательность $\{y_n\}$ сходится к $y_0 \in \bar{S}'$.

Зафиксируем произвольное положительное число δ.

Из определения почти периодичности и равномерной непрерывности $F(z)$ найдется почти периодическое отображение $\bar{F}(z)$, для которого последовательность $F(z + x_n + iy_n)$ равномерно при $n \to \infty$ сходится к $\bar{F}(z + iy_0)$. То есть при достаточно больших n для всех $z \in S'$

$$\rho(F(z + iy_0 + x_n); \bar{F}(z + iy_0)) < \delta/2.$$

Из-за непрерывности отображения $\bar{F}(z)$ можно выбрать радиус r_0 такой, что для всех $z \in B(iy_0, r_0) \rho(\bar{F}(z); \bar{F}(iy_0)) < \delta/2$.

Из последних неравенств получаем для всех $z \in B(0, r_0)$

$$\rho(F(z + x_n + iy_n); \bar{F}(iy_0))$$
$$\le \rho(F(z + x_n + iy_n); \bar{F}(z + iy_0)) + \rho(\bar{F}(z + iy_0); \bar{F}(iy_0)) \le \delta.$$

Найдется множество ω_j, содержащее $F(iy_0)$ вместе с δ-окрестностью, в силу открытости ω_j. Следовательно, при достаточно больших n для всех $z \in B(0, r_0)$ $F(z + x_n + iy_n) \in \omega_j$.

Далее при тех же n для всех $z \in B(z_n, r_0)$ $F(z) \in \omega_j$.

Так как $r_n \to 0$ при $n \to \infty$ и r_0 — фиксированное число, то при достаточно больших n $r_n < r_0$, т.е. для всех $z \in B(z_n, r_n)$ $F(z) \in \omega_j$. Следовательно, j-я координатная функция отображения $F(z)$ в круге $B(z_n, r_n)$ в нуль не обращается.

Получили противоречие. ∎

Предложение 4. *Пусть* $F(z)$ — *невырожденное голоморфное почти периодическое отображение из* S *в* $\mathbb{CP}^m$. *Пусть для некоторой последовательности* $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ *последовательность отображений* $\{F(z + t_n)\}$ *сходится к* $G(z)$ *равномерно в любой подполосе* $S' \subset\subset S$. *Тогда* $G(z)$ *также невырожденное.*

Доказательство. Предположим противное. Если $G(z)$ вырожденное, то $G(S) \cap \omega_{j_0} = \emptyset$ для некоторого j_0. Так как $F(z)$ невырожденное, то $F(z_0) \in \omega_{j_0}$ для некоторого $z_0 \in S$. Выберем $\gamma > 0$ и $S' \subset\subset S$ так, что если $\rho(w, F(z_0)) < \gamma$, то $w \in \omega_{j_0}$ и $z_0 \in S'$. Так как

$$\sup_{z \in S'} \rho(F(z), G(z - t_n)) = \sup_{z \in S'} \rho(F(z + t_n), G(z)),$$

то при n достаточно больших $\rho(F(z_0), G(z_0 - t_n)) < \gamma$ и $G(z_0 - t_n) \in \omega_{j_0}$, что противоречит предположению. ■

Предложение 5. *Пусть $F(z)$ — невырожденное голоморфное почти периодическое отображение из S в $\mathbb{CP}^m$. Пусть $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ — произвольная последовательность. Если последовательность отображений $\{F(z + t_n)\}$ сходится к $G(z)$ равномерно в любой подполосе $S' \subset\subset S$, и носитель дивизора d_F^0 не пересекается для некоторого $z_0 \in S'$ с кругами $B(z_0 + t_n, r_0(S'))$, тогда для любого $r' < r_0(S')$ носитель дивизора d_G^0 не будет пересекаться с кругом $B(z_0, r')$.*

Доказательство. Предположим противное. Из предложений 3 и 4 следует, что $G(z)$ — голоморфное почти периодическое отображение. Для него существует $\tilde{r} = \tilde{r}(S', G)$ такое, что для z_0 найдется $j_1 \in 1, \dots, m$ в силу предположения $j_1 \neq 0$ такое, что носитель дивизора $d_g^{j_1}$ не пересекается с $B(z_0, \tilde{r})$. Можно считать, что $\tilde{r} < r_0(S')$ и $j_1 = 1$. Множество ω_1 открытое и $G(z_0) \in \omega_1$. Следовательно, существует $\gamma > 0$ такое, что вся γ-окрестность точки $G(z_0)$ принадлежит ω_1. В силу равномерной сходимости $F(z + t_n)$ к $G(z)$, начиная с некоторого номера $\rho(F(z + t_n); G(z)) < \gamma/2$ для всех $z \in S'$. Тогда $F(z + t_n)$ лежит также в ω_1.

По определению топологии в $\mathbb{CP}^m$, $f^j(z + t_n)$ равномерно сходятся в круге $\overline{B(z_0, \tilde{r})}$ к $g^j(z), j = 0, \dots, m$. По теореме Гурвица, начиная с некоторого номера n , $f^0(z + t_n)$ будут иметь нули в некоторой окрестности точки z_1, т.е. при $z \in B(z_1, r_2) \subset B(z_0, \tilde{r})$. Это противоречит тому, что носитель дивизора d_F^0 не пересекается с кружками $B(z_0 + t_n, r_0(S'))$. ■

Предложение 6. *Пусть $F(z)$ — голоморфное почти периодическое отображение из S в $\mathbb{CP}^m$. Тогда дивизоры его координатных функции являются почти периодическими.*

Доказательство. Будем доказывать, например, почти периодичность дивизора d_{f^0}. Нужно показать, что для любой финитной в S бесконечно дифференцируемой функции $\chi(z)$ свертка $(d_{f^0} * \chi)(t) = \sum_n k_n \chi(a_n + t)$ является почти периодической функцией переменной t.

Пусть $\{s_n\} \subset \mathbb{R}$ — произвольная последовательность. Заменяя ее при необходимости на подпоследовательность, можно считать, что последовательность отображений $\{F(z+s_n)\}$ сходится в $\mathbb{CP}^m$ равномерно по z в любой подполосе $S' \subset\subset S$ к почти периодическому отображению $G(z)$.

Проверим, что последовательность функций $(d_{f^0} * \chi)(t+s_n)$ сходится равномерно по $t \in \mathbb{R}$ к функции $(d_{g^0} * \chi)(t)$.

Предположим противное. Тогда для некоторого γ и некоторой подпоследовательности $\{t_{n'}\}$

$$\rho((d_{f^0} * \chi)(s_{n'} + t_{n'}); (d_{g^0} * \chi)(t_{n'})) \geq \gamma\,. \tag{1}$$

Переходя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что последовательность отображений $\{F(s_n+t_n+z)\}$ сходится к отображению $H(z)$ равномерно для любой $\bar{S}' \subset S$. К тому же отображению сходится и последовательность отображений $\{G(t_n+z)\}$. Отображение $H(z)$ невырожденное, следовательно, существует круг $B \subset S'$ такой, что при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ для всех $z \in B$ $\quad F(s_n+t_n+z) \in \omega_1, \quad G(t_n+z) \in \omega_1, \quad H(z) \in \omega_1$. Таким образом, последовательности функций $\left\{\frac{f^0(s_n+t_n+z)}{f^1(s_n+t_n+z)}\right\}$ и $\left\{\frac{g^0(t_n+z)}{g^1(t_n+z)}\right\}$ равномерно в данном круге B сходятся к функции $\frac{h^0(z)}{h^1(z)}$. Тогда по лемме 3.1 из [14] последовательности дивизоров функций $\frac{f^0(s_n+t_n+z)}{f^1(s_n+t_n+z)}$ и $\frac{g^0(t_n+z)}{g^1(t_n+z)}$ сходятся в пространстве распределений на B к дивизору d_{h^0}. Функции $f^1(s_n+t_n+z)$ и $g^1(t_n+z)$ в круге B нулей не имеют, значит, дивизоры функций $\frac{f^0(s_n+t_n+z)}{f^1(s_n+t_n+z)}$ и $\frac{g^0(t_n+z)}{g^1(t_n+z)}$ совпадают с дивизорами функций $f^0(s_n+t_n+z)$ и $g^0(t_n+z)$ на B. Поэтому вышеуказанная сходимость дивизоров противоречит (1).

По определению функция $(d_{f^0} * \chi)(t)$ почти периодическая и тогда d_{f^0} почти периодический дивизор. ■

Предложение 7. *Пусть $F(z)$ — голоморфное отображение из S в $\mathbb{CP}^m$, имеющее вид $F(z) = (1 : f^1(z) : \ldots : f^m(z))$. Оно является почти периодическим тогда и только тогда, когда функции $f^1(z), \ldots, f^m(z)$ голоморфные почти периодические.*

Доказательство. Так как φ_0 — гомеоморфизм множества ω_0 и $\mathbb{C}^m$, то почти периодичность $F(z)$ эквивалентна почти периодичности отображения $\varphi(f(z)) = (f^1(z), \ldots, f^m(z))$ из S в $\mathbb{C}^m$. Это, в свою очередь, эквивалентно почти периодичности каждой из функций $f^1(z), \ldots, f^m(z)$. ■

Лемма 1. *Пусть $F_1(z)$, $F_2(z)$ — голоморфные почти периодические отображения из S в $\mathbb{CP}^m$. Пусть у отображения $(F_1 \times F_2)(z)$ дивизоры координатных функций совместно разделены и $\{t_n\}$ такая вещественная последовательность, что последовательности отображений $\{F_1(z+t_n)\}$ и*

$\{F_2(z+t_n)\}$ *сходятся равномерно в любой подполосе* $S' \subset\subset S$ *к отображениям* $G_1(z)$ *и* $G_2(z)$, *соответственно. Тогда дивизоры координатных функций* $(G_1 \times G_2)(z)$ *также разделены.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную подполосу $S' \subset\subset S$ и точку $z_0 \in S'$. Из разделенности дивизоров координатных функций отображения $(F_1 \times F_2)(z)$ найдем $r_0 = r_0(S')$ и по каждой точке $z_0 + t_n$ найдем число $j_n = 0, \dots, m$ такое, что $\operatorname{supp} d^{j_n}_{F_1 \times F_2} \cap B(z_0+t_n, r_0) = \emptyset$. Для всех $n \in \mathbb{N}$ все j_n принимают лишь $m+1$ значение, переходя к подпоследовательности, можно считать, что носитель дивизора $d^{j_n}_{F_1 \times F_2}$ не пересекается ни с одним из кругов $B(z_0 + t_n, r_0)$, а также, что $j_0 = 0$.

Аналогично, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\operatorname{supp} d^{j_1}_{F_1} \cap B(z_0 + t_n, r_0) = \emptyset$, $\operatorname{supp} d^{j_2}_{F_2} \cap B(z_0 + t_n, r_0) = \emptyset$.

По предложению 5 для $r' < \min\{r_0(F_1, S'), r_0(F_2, S'), r_0(F_1 \times F_2, S')\}$ верны $\operatorname{supp} d^{j_1}_{G_1} \cap B(z_0, r') = \emptyset$ и $\operatorname{supp} d^{j_2}_{G_2} \cap B(z_0, r') = \emptyset$. Следовательно, при $z \in B(z_0, r')$ $F_1(z + t_n) \in \omega_{j_1}$, $G_1(z) \in \omega_{j_1}$, $F_2(z + t_n) \in \omega_{j_2}$, $G_2(z) \in \omega_{j_2}$.

Пусть $F_k(z) = (f^0_k(z) : \dots : f^m_k(z))$, $G_k(z) = (g^0_k(z) : \dots : g^m_k(z))$ $k = 1, 2$. Таким образом, при $z \in B(z_0, r')$ функции $f^{j_1}_1(z + t_n)$, $g^{j_1}_1(z)$, $f^{j_2}_2(z + t_n)$, $g^{j_2}_2(z)$ не обращаются в нуль, и последовательности $\left\{\frac{f^j_1(z+t_n)}{f^{j_1}_1(z+t_n)}\right\}$ и $\left\{\frac{f^j_2(z+t_n)}{f^{j_2}_2(z+t_n)}\right\}$ равномерно в $B(z_0, r')$ сходятся к $\frac{g^j_1(z)}{g^{j_1}_1(z)}$ и $\frac{g^j_2(z)}{g^{j_2}_2(z)}$, $j = 0, \dots, m$, соответственно. Тогда подпоследовательности функций $\left\{\frac{f^j_1(z+t_n) f^j_2(z+t_n)}{f^{j_0}_1(z+t_n) f^{j_0}_2(z+t_n)}\right\}$ равномерно сходятся к функциям $\frac{g^j_1(z) g^j_2(z)}{g^{j_0}_1(z) g^{j_0}_2(z)}$ в $B(z_0, r')$ $j = 0, \dots, m$.

Если точка z_0 не является устранимой особой точкой для отображения $(G_1 \times G_2)(z)$, тогда выберем r' так, чтобы в $B(z_0, r')$ не было нулей функции $g^0_1(z) g^0_2(z)$ и лемма доказана.

Рассмотрим случай, когда z_0 является устранимой особой точкой для отображения $(G_1 \times G_2)(z)$. Выберем r' столь маленьким, чтобы в круге $B(z_0, r')$ не было нулей функций $g^j_1(z) g^j_2(z)$, $j = 0, \dots, m$, кроме z_0.

Пусть k — кратность нуля функции $g^0_1(z) g^0_2(z)$ в точке z_0.

Покажем, что для любого $j = 1, \dots, m$ функция $\frac{g^j_1(z) g^j_2(z)}{(z-z_0))^k}$ голоморфна в $B(z_0, r')$. Каждая из функций $f^j_1(z + t_n) f^j_2(z + t_n)$ в круге $B(z_0, r')$ при достаточно большом n имеет столько же корней, как и функция $g^j_1(z) g^j_2(z)$ в точке z_0. Так как $\operatorname{supp} d^{j_0}_{F_1 \times F_2} \cap B(z_0 + t_n, r_0) = \emptyset$, то количество нулей (с учетом кратности) функции $f^0_1(z + t_n) f^0_2(z + t_n)$ не больше, чем у любой из функций $f^j_1(z + t_n) f^j_2(z + t_n)$. Значит, кратность нуля в точке z_0 функции $g^j_1(z) g^j_2(z)$ не меньше, чем у функции $g^0_1(z) g^0_2(z)$. Следовательно, функции $\frac{g^j_1(z) g^j_2(z)}{(z-z_0))^k}$ голоморфны в $B(z_0, r')$ и $\operatorname{supp} d^0_{G_1 \times G_2} \cap B(z_0, r') = \emptyset$. ∎

Доказательство теоремы 3. Необходимость условия следует из предложения 3. Докажем достаточность. Пусть $\{t_n\}$ — произвольная вещественная последовательность. Можно считать, что последовательности отображений $\{F_1(z+t_n)\}$ и $\{F_2(z+t_n)\}$ сходятся равномерно в любой подполосе $S' \subset\subset S$. В силу предложения 2 предельные отображения $G_1(z)$ и $G_2(z)$ также будут почти периодическими.

Чтобы показать почти периодичность отображения $(F_1 \times F_2)(z)$, достаточно проверить равномерную сходимость в любой подполосе $S' \subset\subset S$ последовательности отображений $\{(F_1 \times F_2)(z+t_n)\}$ к отображению $(G_1 \times G_2)(z)$.

Предположим, что это не так, т.е. найдутся $\gamma > 0$ и $\{z_n = x_n + iy_n\} \subset S'$ такие, что

$$\rho((F_1 \times F_2)(z_n + t_n); (G_1 \times G_2)(z_n))) \geq \gamma. \tag{2}$$

Так как $G_1(z)$ и $G_2(z)$ — голоморфные почти периодические отображения, то, переходя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что $\{G_1(x_n + z)\}$ сходится равномерно в любой $S' \subset\subset S$ к голоморфному почти периодическому отображению $H_1(z)$. Соответственно, $\{G_2(x_n + z)\}$ к $H_2(z)$, при этом последовательность $\{iy_n\}$ сходится к точке $iy_0 \in \bar{S}'$. Вследствие равномерной непрерывности $F_1(z)$ и равномерной сходимости $\{F_1(z+t_n)\}$ к $G_1(z)$ последовательность отображений $F_1(z + z_n + t_n - iy_0)$ также сходится равномерно в любой $S' \subset\subset S$ к отображению $H_1(z)$. Соответственно, $F_2(z + z_n + t_n - iy_0)$ сходятся к $H_2(z)$. В силу предложения 4 отображения $G_1(z)$, $G_2(z)$, $H_1(z)$, $H_2(z)$ будут невырожденными.

Если $H_1(iy_0)$ и $H_2(iy_0)$ лежат в одном и том же ω_j, то при достаточно больших n это противоречит (2).

Пусть $H_1(iy_0) \in \omega_1$, $H_2(iy_0) \in \omega_2$. Тогда при $n \in \mathbb{N}$ достаточно больших и $z \in B(iy_0, r(S'))$ верно $F_1(z + z_n + t_n - iy_0) \in \omega_1$, $F_2(z + z_n + t_n - iy_0) \in \omega_2$, $G_1(x_n + z) \in \omega_1$, $G_2(x_n + z) \in \omega_2$. Будем считать, что в шаре $B(iy_0, r')$ $f_1^1(z + z_n + t_n - iy_0) \equiv 1$ и $f_1^2(z + z_n + t_n - iy_0) \equiv 1$, и, соответственно $g_1^1(z + z_n - iy_0) \equiv 1$, $g_2^2(z + z_n - iy_0) \equiv 1$, $h_1^1(z - iy_0) \equiv 1$, $h_2^2(z - iy_0) \equiv 1$.

Таким образом, последовательности $f_1^j(z + z_n + t_n - iy_0) f_2^j(z + z_n + t_n - iy_0)$ и $g_1^j(z + z_n - iy_0) g_2^j(z + z_n - iy_0)$ равномерно в $B(iy_0, r(S'))$ сходятся к $h_1^j(z) h_2^j(z)$, $j = 0, \ldots, m$. Рассматриваемые однородные координаты для каждого отображения являются здесь голоморфными функциями без общих нулей.

По условию дивизоры координатных функций отображения $(F_1 \times F_2)(z)$ совместно разделены. Пусть $\operatorname{supp} d^0_{F_1 \times F_2} \cap B(iy_0, r(S')) = \emptyset$. По лемме 1 из сходимостией (равномерно в $B(iy_0, r')$, $r' < r(S')$,) $\{F_1(z + z_n + t_n - iy_0)\}$ к $H_1(z)$, $\{F_2(z + z_n + t_n - iy_0)\}$ к $H_2(z)$, $\{F_1(t_n + z)\}$ к $G_1(z)$, $\{F_2(t_n + z)\}$ к $G_2(z)$, следует, что $\operatorname{supp} d^0_{G_1 \times G_2} \cap B(iy_0, r') = \emptyset$ и $\operatorname{supp} d^0_{H_1 \times H_2} \cap B(iy_0, r') = \emptyset$.

Если точка iy_0 не является устранимой особой точкой для отображения $H_1 \times H_2$, то, уменьшая при необходимости радиус круга и учитывая сходимость последовательностей $f_1^j(z + z_n + t_n - iy_0)f_2^j(z + z_n + t_n - iy_0)$ и $g_1^j(z + z_n - iy_0)g_2^j(z + z_n - iy_0)$ равномерно в $B(iy_0, r(S'))$ к $h_1^j(z)h_2^j(z)$, $j = 0, \dots, m$, получаем противоречие 2 в точке iy_0.

Рассмотрим случай, когда точка iy_0 является устранимой особой точкой для отображения $H_1 \times H_2$. Если круг $B(iy_0, r')$ достаточно маленький, то верно $(H_1 \times H_2)(z) = \left(\frac{h_1^0(z)h_2^0(z)}{(z-iy_0)^k} : \dots : \frac{h_1^m(z)h_2^m(z)}{(z-iy_0)^k}\right)$. При достаточно большом n функции $f_1^j(z+z_n+t_n-iy_0)f_2^j(z+z_n+t_n-iy_0)$ и $g_1^j(z+z_n-iy_0)g_2^j(z+z_n-iy_0)$ имеют в $B(iy_0, r')$ столько же нулей, какова кратность нуля в точке iy_0 у функции $h_1^j(z)h_2^j(z)$. Так как $\operatorname{supp} d^0_{G_1 \times G_2} \cap B(iy_0, r') = \emptyset$ и $\operatorname{supp} d^0_{F_1 \times F_2} \cap B(iy_0, r')) = \emptyset$, нули функций $f_1^0(z + z_n + t_n - iy_0)f_2^0(z + z_n + t_n - iy_0)$ и $g_1^0(z + z_n - iy_0)g_2^0(z + z_n - iy_0)$ являются устранимыми особыми точками для отображений $F_1 \times F_2$ и $G_1 \times G_2$, соответственно. Обозначим их $\{v_i^n\}_{i=1}^k$ и $\{w_i^n\}_{i=1}^k$, записывая столько раз, какова их кратность. Заметим, что в силу теоремы Гурвица $v_j^n \to iy_0$, $w_j^n \to iy_0$ при $n \to \infty$.

В соответствии с $\gamma' > 0$ выберем радиус круга $B(iy_0, r')$ так, чтобы ни одна из них не попала на границу этого круга, и найдем номер n, начиная с которого для любого $z \in \partial B(iy_0, r')$ будет верна оценка

$$\left|\frac{f_1^j(z+z_n+t_n-iy_0)f_2^j(z+z_n+t_n-iy_0)}{(z-v_1^n)\dots(z-v_k^n)} - \frac{g_1^j(z+z_n-iy_0)g_2^j(z+z_n-iy_0)}{(z-w_1^n)\dots(z-w_k^n)}\right| < \gamma'.$$

При любом $j = 0, \dots, m$ разность

$$\left|\frac{f_1^j(z+z_n+t_n-iy_0)f_2^j(z+z_n+t_n-iy_0)}{(z-v_1^n)\dots(z-v_k^n)} - \frac{g_1^j(z+z_n-iy_0)g_2^j(z+z_n-iy_0)}{(z-w_1^n)\dots(z-w_k^n)}\right|$$

является голоморфной функцией в круге $\overline{B(iy_0, r')}$. Тогда по принципу максимума оценка этой разности, полученная для $z \in \partial B(iy_0, r')$, верна и во всем круге. В частности, при $z = iy_0$, получаем для любого $j = 0, \dots, m$

$$\left|\frac{f_1^j(z_n+t_n)f_2^j(z_n+t_n)}{(z-v_1^n)\dots(z-v_k^n)} - \frac{g_1^j(z_n)g_2^j(z_n)}{(z-w_1^n)\dots(z-w_k^n)}\right| < \gamma'. \tag{3}$$

То есть каждая координата отображения $F_1 \times F_2$ в точке $z_n + t_n$ γ'-близка к каждой координате отображения $G_1 \times G_2$ в точке z_n. Причем, так как $\left|\frac{h_1^0(z)h_2^0(z)}{(z-iy_0)^k}\right| \geq \alpha$, для $z \in \partial B(iy_0, r')$, то и

$$\left|\frac{g_1^j(z_n)g_2^j(z_n)}{(z-w_1^n)\dots(z-w_k^n)}\right| \geq \frac{\alpha}{2} \qquad \left|\frac{f_1^j(z_n+t_n)f_2^j(z_n+t_n)}{(z-v_1^n)\dots(z-v_k^n)}\right| \geq \frac{\alpha}{2}\,.$$

Поэтому можно считать γ' столь малым, чтобы неравенство (3) противоречило (2). ■

Доказательство теоремы 2. Пусть $F(z) = (f^0(z) : \ldots : f^m(z))$, где все функции $f^j(z)$ голоморфные и не имеют общих нулей. Дивизор d_{f^0} по предложению 6 почти периодический. Согласно [5] к нему можно добавить почти периодический дивизор d' таким образом, чтобы получился дивизор некоторой голоморфной почти периодической функции $u(z)$; функция $w(z) = \frac{u(z)}{f^0(z)}$ является голоморфной.

Рассмотрим отображение $U(z) = (1 : u(z) : \ldots : u(z))$. Из предложения 7 оно является голоморфным почти периодическим. Отображение $(F \times U)(z)$ удовлетворяет условию теоремы 3, следовательно, оно является почти периодическим и имеет вид $(F \times U)(z) = (1 : f^1(z)w(z) : \ldots : f^m(z)w(z))$.

В силу предложения 7, каждая из функций $f^1(z)w(z), \ldots, f^m(z)w(z)$ является почти периодической. Нули голоморфной функции $w(z)$ общие для всех координатных функций. Они образуют дискретное множество $V \subset S$. Вне нулей $w(z)$ верно $F(z) = (f^0(z)w(z) : \ldots : f^m(z)w(z))$. ■

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Условия а) и в) следуют из предложений 6 и 3, соответственно. Согласно предположению теоремы, можно $F(z)$ представить в виде $F(z) = (f^0(z)w(z) : \ldots : f^m(z)w(z))$, где все функции $f^j(z)w(z)$ почти периодические. Тогда (см. [5]) $c(d_{f^j w}) = 0$ и $c(d_{f^j}) = -c(d_w)$ для всех j.

Достаточность. Как было показано в [5], к любому почти периодическому дивизору в S можно добавить почти периодический дивизор так, чтобы получился дивизор голоморфной почти периодической функции, причем добавляемый дивизор зависит только от класса Чженя исходного дивизора. Таким образом, существует почти периодический дивизор d' в S такой, что $d_j + d'$ есть дивизоры голоморфных почти периодических функций $g_j(z)$ в S. Если теперь $h(z)$ — голоморфная (не обязательно почти периодическая) функция в S с дивизором нулей, равным d', то отображение $F(z) = \left\{ \frac{g^0(z)}{h(z)} : \ldots : \frac{g^m(z)}{h(z)} \right\}$ является голоморфным отображением из S в $\mathbb{CP}^m$, дивизоры координатных функций которого как раз равны $d_0, \ldots, d_m$ и удовлетворяют условию а). При этом $F(z) = F_1(z) \times F_2(z)$, где $F_1(z) = (1 : g^1(z) : \ldots : g^m(z))$ $F_2(z) = (g_0(z) : 1 : \ldots : 1)$. Из предложения 7 $F_1(z)$ и $F_2(z)$ — голоморфные почти периодические отображения, тогда по теореме 3 $F(z)$ — тоже голоморфное почти периодическое отображение. ■

Список литературы

[1] *H. Tornehave*, On the zeros of entire almost periodic functions. In: The Harald Bohr Centenary, Copenhagen (1987). — *Math. Fys. Medd. Danske* (1989), v. 42, No. 3, p. 125–142.

[2] *H. Tornehave*, Systems of zeros of голоморфной almost periodic functions. Preprint No. 30, Kobenhavns Universitet Matematisk Institut (1988), 53 p.

[3] *S.Ju. Favorov, A.Ju. Rashkovskii and L.I. Ronkin*, Almost periodic divisors in a strip. — *J. D'analyse Math.* (1998), No. 74, p. 325–345.

[4] *А.Ю. Рашковский, Л.И. Ронкин, С.Ю. Фаворов*, О почти периодических множествах в комплексной плоскости. — *Доп. НАН України* (1998), № 12, с. 37–39.

[5] *S.Yu. Favorov*, Zeros of holomorphic almost periodic functions. — *J. D'analyse Math.* (2001), No. 84, p. 51–66.

[6] *С.Ю. Фаворов*, Нулі аналітичних майже періодичних функцій. — *Доп. НАН України* (2001), № 1, с. 32–36.

[7] *F. Sunyer i Balaguer*, Una nova generalizacio de les funcions gairebe-periodiques. — *Inst. d'Estudis Catalans, Arxius de la ciencies* (1949), v. XXVII. (in Catalan)

[8] *N.D. Parfyonova and S.Yu. Favorov*, Meromorphic almost periodic functions. — *Mat. Stud.,* Lviv (2000), v. 13, No. 2, p. 190–198.

[9] *H. Chen*, Yosida functions and Picard values of integral functions and their derivatives. — *Bull. Austral. Math. Soc.* (1996), No. 54, p. 373–381.

[10] *Ch. Pommerenke*, Estimates for normal meromorphic functions. — *Ann. Acad. Sci. Fenn.* (1970), Ser. AI, No. 476, p. 3–10.

[11] *L. Zalcman*, Normal families: New perspectives. — *Bull. Amer. Math. Soc.* (1998), v. 3, No. 35, p. 215–230.

[12] *Б.В. Шабат*, Введение в комплексный анализ. Наука, Москва (1969).

[13] *Б.М. Левитан*, Почти периодические функции. Гостехиздат, Москва (1953).

[14] *Л.И. Ронкин*, Почти периодические обобщенные функции и дивизоры в трубчатих областях. — *Зап. науч. семин. ПОМИ* (1997), № 247, с. 210–236.

Holomorphic almost periodic mappings to projective space

N.D. Parfyonova

A holomorphic almost periodic mappings from a strip to m-measurable complex projective space are being studied. The complete description of families from $(m+1)$ discrete sets in the strip is given which can be zero sets of homogeneous coordinates of such mapping.