Математическая физика, анализ, геометрия
2002, т. 9, № 3, с. 420–426

О малых движениях и нормальных колебаниях гидросистемы "вязкая жидкость + система идеальных жидкостей"

Д.А. Закора, Н.Д. Копачевский

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
ул. Ялтинская, 4, Симферополь, 95007, Украина

E-mail:dmitry@mail.strace.net
E-mail:kopachevsky@tnu.crimea.ua

Статья поступила в редакцию 30 ноября 2001 г.

Представлена Е.Я. Хрусловым

Представлена новая задача о малых движениях и нормальных колебаниях гидродинамической системы "вязкая жидкость + система идеальных жидкостей". Приведены условия существования сильного решения соответствующей начально-краевой задачи. В спектральной задаче приведены асимптотические формулы для ветвей собственных значений, сформулированы свойства базисности собственных элементов.

Представлено нову задачу про малі рухи та нормальні коливання гідродинамічної системи: "в'язка рідина + система ідеальних рідин". Наведено умови існування сильного рішення відповідної початково-крайової задачі. В спектральній задачі наведено асимптотичні формули для гілок власних значень, сформульовані властивості власних елементів.

1. Эволюционная задача

Рассмотрим неподвижный сосуд, частично заполненный системой из несмешивающихся жидкостей. Жидкости предполагаются тяжелыми, и в силу этого действие капиллярных сил в этой задаче не учитывается. Область Ω_0, самая нижняя по отношению к действию силы тяжести, заполнена вязкой несжимаемой жидкостью плотности ρ_0 и с динамическим коэффициентом вязкости μ (кинематический коэффициент вязкости $\nu = \mu/\rho_0$). Области Ω_i ($i = \overline{1,m}$) заполнены идеальными несжимаемыми жидкостями с плотностями ρ_i ($i = \overline{1,m}$). При этом $\rho_0 > \rho_1 > \rho_2 > ... > \rho_m > 0$.

Mathematics Subject Classification 2000: 76D05, 58D30, 37N10, 58D25.

© Д.А. Закора, Н.Д. Копачевский, 2002

Обозначим через $\vec{n}_i$ единичный вектор, нормальный к $\partial\Omega_i$ и направленный вне Ω_i ($i = \overline{0,m}$). Через S_i обозначим часть стенки сосуда, граничащей с областью Ω_i ($i = \overline{0,m}$). Представим $\Gamma_{(i)} := \partial\Omega_i \setminus \overline{S_i} = \Gamma_{i-1} \cup \Gamma_i$, где Γ_{i-1} и Γ_i — это нижняя и верхняя границы области Ω_i ($i = \overline{1,m}$) соответственно. Для Ω_0 имеем $\Gamma_0 = \partial\Omega_0 \setminus \overline{S_0}$. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с сосудом таким образом, что ось Ox_3 направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится на равновесной поверхности Γ_0.

Рассмотрим задачу о малых движениях изучаемой гидросистемы. Обозначим отклонения движущихся поверхностей $\Gamma_i(t)$ от равновесного состояния Γ_i через ζ_i, через $\vec{u}_i$ — поля скоростей жидкостей в соответствующих областях, через p_i ($i = \overline{1,m}$) — динамические давления в жидкостях. Малые движения изучаемой гидросистемы описываются следующей начально-краевой задачей:

$$\frac{\partial \vec{u}_0}{\partial t} = -\rho_0^{-1}\nabla p_0 + \nu\Delta\vec{u}_0 + \vec{f}, \quad \mathrm{div}\vec{u}_0 = 0 \quad (\text{в } \Omega_0), \quad \vec{u}_0 = \vec{0} \quad (\text{на } S_0), \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} = -\rho_i^{-1}\nabla p_i + \vec{f}, \quad \mathrm{div}\vec{u}_i = 0 \quad (\text{в } \Omega_i,\ ), \quad \vec{u}_i \cdot \vec{n}_i = 0 \quad (\text{на } S_i,\ i = \overline{1,m}),\\
&\frac{\partial \zeta_i}{\partial t} = \vec{u}_i \cdot \vec{n}_i = \vec{u}_{i+1} \cdot \vec{n}_i \quad (\text{на} \Gamma_i,\ i = \overline{0,m-1}), \quad \frac{\partial \zeta_m}{\partial t} = \vec{u}_m \cdot \vec{n}_m \quad (\text{на } \Gamma_m),\\
&p_m = g\rho_m\zeta_m \quad (\text{на } \Gamma_m), \quad p_i = g\Delta\rho_i\zeta_i + p_{i+1} \quad (\text{на } \Gamma_i,\ i = \overline{1,m-1}),\\
&\mu\left(\frac{\partial (u_0)_k}{\partial x_3} + \frac{\partial (u_0)_3}{\partial x_k}\right) = 0 \quad (k = 1,2) \quad (\text{на } \Gamma_0),\\
&-p_0 + 2\rho_0\nu\frac{\partial (u_0)_3}{\partial x_3} = -g\Delta\rho_0\zeta_0 - p_1 \quad (\text{на } \Gamma_0), \quad \Delta\rho_i := \rho_i - \rho_{i+1} > 0,
\end{aligned}$$

$$\vec{u}_i(0,x) = \vec{u}_i^0(x), \quad \zeta_i(0,\hat{x}) = \zeta_i^0(\hat{x}) \quad (i = \overline{0,m}). \tag{2}$$

Применим к задаче (1) метод ортогонального проектирования [1]. После отделения тривиальных решений основную задачу можно записать в виде дифференциального уравнения в ортогональной сумме гильбертовых пространств:

$$\begin{pmatrix} C_{1,1} & 0 & C_{1,2} \\ 0 & \widehat{C} & 0 \\ C_{2,1} & 0 & C_{2,2} \end{pmatrix} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \vec{u}_0 \\ \zeta_0 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu A & G_0 & 0 \\ -\gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{u}_0 \\ \zeta_0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ 0 \\ f_2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$(\vec{u}_0(0), \zeta_0(0), v(0))^t = (\vec{u}_0^0, \zeta_0^0, v^0)^t, \tag{4}$$

$$(\vec{u}_0, \zeta_0, v)^t \in \vec{J}_{0,S}(\Omega_0) \oplus L_{2,\Gamma_0} \oplus H =: \mathcal{H}_1,$$

где

$$\vec{J}_{0,S_0}(\Omega_0) := \{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega_0) |\ \mathrm{div}\vec{u} = 0 \ (\text{в } \Omega_0), \quad \vec{u}\cdot\vec{n}_0 = 0 \ (\text{на } S_0)\},$$

$L_{2,\Gamma_0} := L_2(\Gamma_0) \ominus \{1_{\Gamma_0}\}$, H — гильбертово пространство, которое связано с системой идеальных жидкостей.

Введем следующие обозначения:

$$\mathcal{J} := \begin{pmatrix} C_{1,1} & 0 & C_{1,2} \\ 0 & \widehat{C} & 0 \\ C_{2,1} & 0 & C_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} := \begin{pmatrix} \mu A & G_0 & 0 \\ -\gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{\Gamma_0} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

$$y := (\vec{u}_0, \zeta_0, v)^t, \quad f := (\vec{f}_1, 0, f_2)^t.$$

Теорема 1.1. *Пусть функции $\vec{u}_i$, ζ_i $(i = \overline{0,m})$ — классическое решение задачи (1)–(2), тогда функция $y(t)$ является решением следующей задачи Коши:*

$$\mathcal{J}\frac{dy}{dt} + \mathcal{A}y = f(t), \quad y(0) = y^0. \tag{5}$$

Матричный оператор $\mathcal{J}$ (оператор полной энергии рассматриваемой гидросистемы) и $\mathcal{A}$ обладают следующими свойствами:
1. Оператор $\mathcal{J}$ самосопряженный в $\mathcal{H}_1$, положительно определенный и ограниченный.
2. Оператор A^{-1} самосопряженный в $\vec{J}_{0,S_0}(\Omega_0)$, положительный и компактный.
3. Оператор iF самосопряженный в H и неограниченный.
4. Оператор γ_0 сопряжен к G_0 и неограничен.

Введем следующие обозначения: $Q := \gamma_0 A^{-\frac{1}{2}}$, $Q^+ := A^{-\frac{1}{2}}G_0$.

Теорема 1.2. *Справедливы следующие утверждения:*
$Q^+ \subset Q^*$, $Q^+ = Q^*|_{D(G_0)}$, $\overline{Q^+} = Q^*$.

Оператор $\mathcal{A}$ аккретивен и не является замкнутым, оператор γ_0 неограничен и $D(A) \subset D(\gamma_0)$. Таким образом, $\mathcal{A}$ не является максимальным аккретивным оператором.

Теорема 1.3. *Замыкание $\mathcal{A}_0 := \overline{\mathcal{A} + \varepsilon\mathcal{P}}$ $(\varepsilon > 0)$ оператора $\mathcal{A} + \varepsilon\mathcal{P}$ есть максимальный аккретивный оператор в $\mathcal{H}_1$. При этом*

$$D(\mathcal{A}_0) = \{(\vec{u}_0, \zeta_0, v)^t \in \mathcal{H}_1 |\ \mu\vec{u}_0 + A^{-\frac{1}{2}}Q^*\zeta_0 \in D(A), \quad v \in D(F)\},$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\Gamma_0} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu I_0 & Q^* & 0 \\ -Q & \varepsilon I_{\Gamma_0} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon I + F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\Gamma_0} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

В задаче Коши (5) положим $z(t) = e^{-t}y(t)$, тогда для функции $z(t)$ получим следующую задачу:

$$\mathcal{J}\frac{dz}{dt} + (\mathcal{A} + \varepsilon\mathcal{P})z + (\mathcal{J} - \varepsilon\mathcal{P})z = e^{-t}f(t), \quad z(0) = y^0, \tag{6}$$

где $\varepsilon > 0$ такое, что оператор $\mathcal{J} - \varepsilon\mathcal{P}$ положительно определен.

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{dz}{dt} + \widetilde{\mathcal{A}_0}z = e^{-t}\mathcal{J}^{-1}f(t), \quad z(0) = y^0, \tag{7}$$

где $\widetilde{\mathcal{A}_0} := \mathcal{J}^{-1}(\mathcal{A}_0 + \mathcal{J} - \varepsilon\mathcal{P})$. Введем новое скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_1$ по формуле

$$< x, y >:= (\mathcal{J}x, y)_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}_1. \tag{8}$$

Можно проверить, что в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_1$ со скалярным произведением (8) задача Коши (7) — задача с максимальным аккретивным оператором. Как известно [1], задача Коши (7) имеет единственное сильное решение, если $y^0 \in D(\widetilde{\mathcal{A}_0})$, $f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{H}_1)$. Можно показать, что решение задачи Коши (7) принимает значения из $D(\mathcal{A})$, если только $y^0 \in D(\mathcal{A})$, $f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{H}_1)$. Отсюда следует, что задача Коши (5) имеет единственное сильное решение, если $y^0 \in D(\mathcal{A})$, $f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{H}_1)$. Из теоремы 1.1 следует

Теорема 1.4. *Начально-краевая задача* (1)–(2) *имеет единственное решение в интервале* $[0,T]$*, если выполняются следующие условия:*

1. $\vec{u}_0^0 \in D(A)$, $\vec{u}_i^0 \in \vec{H}^1(\Omega_i) \cap \vec{J}_{\widehat{0,S_i}}(\Omega_i)$ $(i = \overline{1,m})$, $\quad \zeta_i^0 \in H_{\Gamma_i}^{\frac{1}{2}}$ $(i = \overline{0,m})$,
$\vec{u}_i^0 \cdot \vec{n}_i = \vec{u}_{i+1}^0 \cdot \vec{n}_i$ $\quad$ (*на* Γ_i, $i = \overline{0, m-1}$), *где*

$$\vec{J}_{\widehat{0,S_i}}(\Omega_i) := \{\vec{u}_i \in \vec{L}_2(\Omega_i) \mid \operatorname{div}\vec{u}_i = 0 \quad (\textit{в } \Omega_i), \quad \vec{u}_i \cdot \vec{n}_i = 0 \quad (\textit{на } S_i), \\ \int_{\Gamma_{i-1}} \vec{u}_i \cdot \vec{n}_i \, d\Gamma_{i-1} = 0, \quad \int_{\Gamma_i} \vec{u}_i \cdot \vec{n}_i \, d\Gamma_i = 0\} \quad (i = \overline{1,m}).$$

2. $\quad \vec{f}(t) \in C^1([0,T];\vec{L}_2(\Omega))$ $\quad (\Omega = \cup_{i=0}^m \Omega_i)$.

2. Спектральная задача

Задача о нормальных колебаниях рассматриваемой гидросистемы приводится к следующей системе операторных уравнений:

$$\begin{cases} \lambda^2 T\psi_0 - \lambda\mu I_0\psi_0 + gB\psi_0 - g\mu^{\varepsilon}\Theta^*\psi = 0, \\ \lambda^2 C\psi - g\mu^{-\varepsilon}\Theta\psi_0 + I\vec{\psi} = 0, \end{cases} \tag{9}$$

$$(T := M - NC^{-1}N^*, \quad B := \widehat{B} + \Theta^*\Theta).$$

Здесь T и C — положительные и компактные операторы конечного порядка; их собственные значения имеют степенную асимптотику. Оператор $\widehat{B}$ неотрицательный компактный оператор конечного порядка; его собственные значения имеют степенную асимптотику. Операторы Θ и Θ^* — взаимно сопряженные операторы конечного порядка; λ — спектральный параметр; μ, g (физические параметры системы) — положительные константы; $(\psi_0, \psi)^t$ — искомый вектор, $(\psi_0, \psi)^t \in \mathcal{H}_2 = \vec{J}_{0,S_0}(\Omega_0) \oplus E$, $0 < \varepsilon < 1$.

Рассмотрим две области комплексной плоскости $\Lambda^{\pm}_{R,\varepsilon} = \{\lambda\colon |\lambda| > R,\ |\arg\lambda \mp \frac{\pi}{2}| < \varepsilon\}$ и $\Lambda_{R,\varepsilon} = \{\lambda\colon |\lambda| > R,\ |\arg\lambda| < \varepsilon\}$.

a) Пусть $\lambda \in \Lambda_{R,\varepsilon}$. Тогда задача (9) может быть сведена к эквивалентной спектральной задаче:

$$l_1(\lambda)\psi_0 = 0, \quad \psi_0 \in \vec{J}_{0,S_0}(\Omega_0),$$

где $l_1(\lambda) = \mu I_0 - \lambda T - G_1(\lambda)$ и оператор-функция $G_1(\lambda)$ имеет вид $G_1(\lambda) = \lambda^{-1}g\widehat{B} + \lambda NC^{-1/2}(I + \lambda^2 g^{-1}C)^{-1}C^{-1/2}N^*$. Можно установить следующее соотношение: $G_1(\lambda) = o(1)$ при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in \Lambda_{R,\varepsilon}$. Используя результат из [2], можно доказать, что собственные значения оператор-функции $l_1(\lambda)$ имеют следующую асимптотику:

$$\lambda_k^{\infty} = \mu\lambda_k(T^{-1})(1 + o(1)) \quad (k \to \infty). \tag{10}$$

b) Пусть теперь $\lambda \in \Lambda^{\pm}_{R,\varepsilon}$. В этом случае задача (9) приводится к следующему виду:

$$l_2(\lambda)\psi = 0, \quad \psi \in E,$$

где $l_2(\lambda) = I + \lambda^2 g^{-1}C + G_2(\lambda)$ и оператор-функция $G_2(\lambda)$ имеет вид $G_2(\lambda) = g(\lambda\mu)^{-1}\Theta(I_0 - \lambda\mu^{-1}T - g(\lambda\mu)^{-1}B)^{-1}\Theta^*$.

При $\lambda \to \infty$, $\lambda \in \Lambda^{\pm}_{R,\varepsilon}$, выполняется следующее соотношение:

$$\|(I - \lambda g^{1/2}C^{-1/2})^{-1}G_2(\lambda)(I + \lambda g^{1/2}C^{-1/2})^{-1}\| = o(1).$$

Применяя результаты работы [2] к оператор-функции $l_2(\lambda)$, получим асимптотическую формулу для собственных значений $l_2(\lambda)$:

$$\lambda_k^{\pm i} = \pm i g^{1/2}\lambda_k^{-1/2}(C)(1 + o(1)) \quad (k \to \infty). \tag{11}$$

c) Предположим теперь, что $\lambda \in (0; g^{1/2}\|C\|^{-1/2})$. В этом случае система (9) может быть записана в виде

$$l_0(\lambda)\psi_0 \equiv (\lambda\mu I_0 - g\widehat{B} - \lambda^2 G_0(\lambda))\psi_0 = 0,$$

где оператор-функция $G_0(\lambda)$ определяется выражением

$$G_0(\lambda) = T + NC^{-1/2}(I_0 + \lambda^2 g^{-1} C)^{-1} C^{-1/2} N^*,$$

она аналитична в окрестности нуля и принимает значения на множестве самосопряженных компактных операторов.

Основываясь на результате В.А. Авакяна [2], заключаем, что у спектральной задачи (9) существует последовательность собственных значений с предельной точкой в нуле со следующей асимптотикой:

$$\lambda_k^0 = g\mu^{-1}\lambda_k(\widehat{B})(1 + o(1)) \quad (k \to \infty). \tag{12}$$

Итогом рассмотрения спектральной задачи (9) является следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Спектр задачи* (9) *состоит из четырех ветвей собственных значений с асимптотическими формулами* (10)–(12).

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.2. *1. Для любого фиксированного $t_0 \in (0, \sqrt{g\|C\|^{-1}})$ и достаточно большой вязкости $\mu = \mu(t_0)$ собственные элементы задачи* (9), *отвечающие собственным значениям из промежутка $(0, t_0]$, после проектирования на $\vec{J}_{0,S_0}(\Omega_0) \ominus \mathrm{Ker}\widehat{B}$ образуют p-базис в пространстве $\vec{J}_{0,S_0}(\Omega_0) \ominus \mathrm{Ker}\widehat{B}$ при $p > 2$.*
2. Для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ собственные элементы задачи (9), *отвечающие собственным значениям из промежутка $(0, \varepsilon]$, после проектирования на $\vec{J}_{0,S_0}(\Omega_0) \ominus \mathrm{Ker}\widehat{B}$ образуют p-базис (при $p > 2$) в пространстве $\vec{J}_{0,S_0}(\Omega_0) \ominus \mathrm{Ker}\widehat{B}$ с точностью до конечного дефекта.*
3. При достаточно большой вязкости μ система векторов $\Psi_k := (\vec{\psi}_{0k}; \vec{\psi}_k; i\lambda_k g^{-\frac{1}{2}} A_{2,2}^{\frac{1}{2}} \vec{\psi}_k)^t$, отвечающая собственным значениям, лежащим вне круга радиуса $R = R(\mu)$, образует полную систему в $\mathcal{H}_3 := \vec{J}_{0,S_0}(\Omega_0) \oplus E \oplus E$.

Список литературы

[1] *Н.Д. Копачевский, С.Г. Крейн, Нго Зуй Кан*, Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. Наука, Москва (1989).

[2] *В.А. Авакян*, Асимптотическое распределение спектра линейного пучка, возмущенного аналитической оператор-функцией. — *Функц. анализ и его прил.* (1978), т. 12, № 2, с. 66–67.

On small motions and normal oscillations of a hydrosystem "a viscous fluid + a system of ideal fluids"

D.A. Zakora and N.D. Kopachevsky

There is investigated a new problem on small motions and normal oscillations of a hydrodynamical system "a viscous fluid + a system of ideal fluids". Existence conditions of strong solution of initial boundary value problem are obtained. For corresponding spectral problem asymptotic formulas for branches of eigenvalues are presented. Basisness properties of eigenelements are formulated.