Математическая физика, анализ, геометрия
2002, т. 9, № 3, с. 478–486

Оцінка знизу найкращого наближення тригонометричними поліномами сумовних функцій двох змінних

Т.О. Кононович

Полтавський державний педагогічний університет
вул. Остроградського, 2, Полтава, 36000, Україна
E-mail:ptkm@ukr.net

Стаття надійшла до редакції 12 жовтня 2001 р.
Представлена Й.В. Островським

Отримано виражену через коефіцієнти Фур'є оцінку знизу найкращого наближення в метриці L сумовних функцій двох змінних при умові сумовності функцій, які спряжені за кожною і обома змінними.

Получена выраженная через коэффициенты Фурье оценка снизу наилучшего приближення в метрике L суммируемых функций двух переменных при условии суммируемости функций, сопряженных по каждой и обеим переменным.

Нехай L — простір сумовних функцій двох змінних, 2π-періодичних за кожною змінною, з нормою

$$\|f(x_1,x_2)\|_L = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x_1,x_2)|\,dx_1\,dx_2\,.$$

Позначимо через $T_{n_1n_2}$ множину тригонометричних поліномів виду

$$t_{n_1n_2}(x_1,x_2) = \sum_{l_1=0}^{n_1}\sum_{l_2=0}^{n_2} 2^{-\gamma}(A_{l_1l_2}\cos l_1x_1\cos l_2x_2 + B_{l_1l_2}\cos l_1x_1\sin l_2x_2$$

$$+C_{l_1l_2}\sin l_1x_1\cos l_2x_2 + D_{l_1l_2}\sin l_1x_1\sin l_2x_2),$$

Mathematics Subject Classification 2000: 41A10, 41A50.

де γ — кількість рівних нулеві координат вектора (l_1, l_2), $A_{l_1 l_2}$, $B_{l_1 l_2}$, $C_{l_1 l_2}$, $D_{l_1 l_2}$ — довільні дійсні числа, n_1, $n_2 = 0, 1, \dots$, а через $E_{n_1 n_2}(f)$ — величину найкращого наближення функції $f \in L$ тригонометричними поліномами $t_{n_1 n_2} \in T_{n_1 n_2}$: $E_{n_1 n_2}(f) = \inf\limits_{t_{n_1 n_2} \in T_{n_1 n_2}} \|f(x_1, x_2) - t_{n_1 n_2}(x_1, x_2)\|_L$. Символом $S[f]$ позначатимемо ряд Фур'є функції $f \in L$. Нехай також $N_0 = N \cup \{0\}$, $Z_+^2 = N_0 \times N_0$, $Q_{m_1 m_2} = \{(l_1, l_2) \in Z_+^2 : (l_1 \le m_1) \wedge (l_2 \le m_2)\}, m_1, m_2 \in N_0$; H_1^2 — клас регулярних в $\Delta^2 = \{(z_1, z_2) : |z_j| < 1, j = 1, 2\}$ функцій $f(z_1, z_2)$ таких, що

$$\sup_{0 \le r_j < 1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r_1 e^{it_1}, r_2 e^{it_2})| \, dt_1 \, dt_2 < \infty, \quad j = 1, 2.$$

Називатимемо спряженими до $f \in L$ за першою, другою і обома змінними функції, які відповідно визначаються рівностями (див. [1, с. 123])

$$\overline{f}_1(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1 + t_1, x_2) \mathrm{ctg}\, \frac{t_1}{2} \, dt_1,$$

$$\overline{f}_2(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1, x_2 + t_2) \mathrm{ctg}\, \frac{t_2}{2} \, dt_2,$$

$$\overline{f}_3(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1 + t_1, x_2 + t_2) \mathrm{ctg}\, \frac{t_1}{2} \mathrm{ctg}\, \frac{t_2}{2} \, dt_1 \, dt_2.$$

Домовимось через C позначати абсолютні додатні сталі, які можуть бути неоднаковими в різних формулах.

Для 2π-періодичних сумовних функцій однієї змінної відомо ряд оцінок знизу найкращого наближення $E_n(f)$ тригонометричними поліномами порядку не вище n, які виражено через коефіцієнти Фур'є (див., наприклад, [2, теорема 3; 3, лема 2]).

Метою даної роботи є отримання вираженої через коефіцієнти Фур'є оцінки знизу величини $E_{n_1 n_2}(f)$ для функцій $f \in L$ при умові сумовності спряжених $\overline{f}_j(x_1, x_2)$ $(j = \overline{1, 3})$.

Спочатку доведемо деякі допоміжні твердження.

Лема 1. *Якщо* $f \in L$, $\overline{f}_j \in L$ $(j = \overline{1, 3})$, *то функція*

$$F(z_1, z_2) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} 2^{-\gamma} (a_{k_1 k_2} - d_{k_1 k_2} - i(b_{k_1 k_2} + c_{k_1 k_2})) z_1^{k_1} z_2^{k_2}, \tag{1}$$

де $a_{k_1k_2}, b_{k_1k_2}, c_{k_1k_2}, d_{k_1k_2}$ *— коефіцієнти Фур'є функції* f, *належить класу* H_1^2.

Д о в е д е н н я. Оскільки $a_{k_1k_2}-d_{k_1k_2}-i(b_{k_1k_2}+c_{k_1k_2}) \to 0$ при $k_1+k_2 \to \infty$, то функція $F(z_1, z_2)$ є регулярною в Δ^2.

Позначивши через $\overline{S}_1[f], \overline{S}_2[f], \overline{S}_3[f]$ тригонометричні ряди, які спряжені з рядом $S[f]$, відповідно, за першою, другою і обома змінними, за умов леми маємо $\overline{S}_j[f] = S[\overline{f}_j]$ $(j = \overline{1,3})$ (див. [1, с. 252]).

Тоді, поклавши $z_1 = r_1 e^{it_1}$, $z_2 = r_2 e^{it_2}$, одержуємо

$$F(r_1e^{it_1}, r_2e^{it_2}) = \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} 2^{-\gamma}(a_{k_1k_2} - d_{k_1k_2} - i(b_{k_1k_2} + c_{k_1k_2}))\; r_1^{k_1} r_2^{k_2}$$

$$\times(\cos k_1t_1 + i\sin k_1t_1)(\cos k_2t_2 + i\sin k_2t_2) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(f(x_1,x_2)$$

$$+i\overline{f}_1(x_1,x_2) + i\overline{f}_2(x_1,x_2) + i^2\overline{f}_3(x_1,x_2)\Big)P(r_1, t_1 - x_1)P(r_2, t_2 - x_2)\,dx_1\,dx_2\,,$$

де $P(r_1, t_1 - x_1)P(r_2, t_2 - x_2)$ — ядро Пуасона.

Оскільки функція

$$G(x_1,x_2) := f(x_1,x_2) + i\overline{f}_1(x_1,x_2) + i\overline{f}_2(x_1,x_2) + i^2\overline{f}_3(x_1,x_2)$$

сумовна, то для будь-яких $0 \le r_j < 1$ $(j = 1, 2)$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(r_1e^{it_1}, r_2e^{it_2})|\,dt_1\,dt_2 \le \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |G(x_1,x_2)|\Big(\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_1, t_1 - x_1)$$

$$\times P(r_2, t_2 - x_2)\,dt_1\,dt_2\Big)\,dx_1\,dx_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |G(x_1,x_2)|\,dx_1\,dx_2 = const. \qquad (2)$$

Отже, $F(z_1, z_2) \in H_1^2$. Лему 1 доведено.

Лема 2. *Якщо* $f \in L$, $\overline{f}_j \in L$ $(j = \overline{1,3})$, *то*

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x_1,x_2)|\,dx_1\,dx_2 \ge C\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{|\tau_{k_1k_2}|}{(k_1+1)(k_2+1)}, \qquad (3)$$

де $\tau_{k_1k_2} = a_{k_1k_2} - d_{k_1k_2} - i(b_{k_1k_2} + c_{k_1k_2})$, $a_{k_1k_2}, b_{k_1k_2}, c_{k_1k_2}, d_{k_1k_2}$ *— коефіцієнти Фур'є функції* f.

Д о в е д е н н я. Якщо $f \in L$, $\overline{f}_j \in L$ $(j = \overline{1,3})$, то за лемою 1 функція $F(z_1, z_2)$ (див. (1)) належить класу H_1^2. Тому майже скрізь на $\Gamma^2 = \{(z_1, z_2) : |z_j| = 1, j = 1, 2\}$ існує $F(e^{it_1}, e^{it_2})$ як границя $F(r_1e^{it_1}, r_2e^{it_2})$ за недотичними напрямками (див. [4, с. 476]). Крім того, має місце нерівність (2), тому за теоремою Фату (див. [5, с. 38]) $F(e^{it_1}, e^{it_2})$ сумовна на $[0; 2\pi]^2$ і

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(e^{it_1}, e^{it_2})|\, dt_1\, dt_2 \le \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |G(x_1, x_2)|\, dx_1\, dx_2 = const. \tag{4}$$

Нехай

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x_1, x_2)|\, dx_1\, dx_2 = C_0, \ \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\overline{f}_j(x_1, x_2)|\, dx_1\, dx_2 = C_j \ (j = \overline{1,3}).$$

Тоді

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x_1, x_2)|\, dx_1\, dx_2 \ &= \ \frac{C_0}{\sum\limits_{j=0}^{3} C_j}\Bigg(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x_1, x_2)|\, dx_1\, dx_2 \\ + \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{3} |\overline{f}_j(x_1, x_2)|\, dx_1\, dx_2\Bigg) \ &\ge \ C\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(e^{it_1}, e^{it_2})|\, dt_1\, dt_2\end{aligned} \tag{5}$$

(див. нерівність (4)).

Оскільки функція $F(z_1, z_2) \in H_1^2$, то, як показано в роботі [6],

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(e^{it_1}, e^{it_2})|\, dt_1\, dt_2 \ge C\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{|a_{k_1k_2} - d_{k_1k_2} - i(b_{k_1k_2} + c_{k_1k_2})|}{(k_1+1)(k_2+1)}. \tag{6}$$

Отже, з нерівності (5), враховуючи (6), одержуємо (3). Лему 2 доведено.

Лема 3. *Якщо* $f \in L$, *то*

$$E_{n_1n_2}(f) \ge C \max_{(l_1,l_2)\in Q_{n_1+1n_2+1}\setminus Q_{n_1n_2}} \Big(|a_{l_1l_2}| + |b_{l_1l_2}| + |c_{l_1l_2}| + |d_{l_1l_2}|\Big), \tag{7}$$

n_1, $n_2 = 0, 1, \dots$, $a_{l_1l_2}, b_{l_1l_2}, c_{l_1l_2}, d_{l_1l_2}$ *— коефіцієнти Фур'є функції* f.

Д о в е д е н н я. Нехай $t^*_{n_1n_2}(x_1,x_2)$ — поліном найкращого наближення функції $f(x_1,x_2)$ і $(l_1,l_2)\in Q_{n_1+1\ n_2+1}\setminus Q_{n_1n_2}$. Тоді

$$\begin{aligned} E_{n_1n_2}(f) &\geq \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\Big(f(x_1,x_2)-t^*_{n_1n_2}(x_1,x_2)\Big)\cos l_1x_1\cos l_2x_2\right|dx_1\,dx_2 \\ &\geq \left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_1,x_2)\cos l_1x_1\cos l_2x_2\,dx_1\,dx_2\right| = \pi^2|a_{l_1l_2}|. \end{aligned}$$

Аналогічно: $E_{n_1n_2}(f)\geq\pi^2|b_{l_1l_2}|$, $E_{n_1n_2}(f)\geq\pi^2|c_{l_1l_2}|$, $E_{n_1n_2}(f)\geq\pi^2|d_{l_1l_2}|$. Тому нерівність $E_{n_1n_2}(f)\geq C(|a_{l_1l_2}|+|b_{l_1l_2}|+|c_{l_1l_2}|+|d_{l_1l_2}|)$ має місце для $\forall(l_1,l_2)\in Q_{n_1+1\ n_2+1}\setminus Q_{n_1n_2}$, а отже справедлива оцінка (7). Лему 3 доведено.

Теорема. *Якщо* $f\in L$, $\overline{f}_j\in L$ $(j=\overline{1,3})$, *то*

$$\begin{aligned} E_{n_1n_2}(f)\geq\ & C\left(\max_{(l_1,l_2)\in Q_{n_1+1n_2+1}\setminus Q_{n_1n_2}}\Big(|a_{l_1l_2}|+|b_{l_1l_2}|+|c_{l_1l_2}|+|d_{l_1l_2}|\Big)\right. \\ &\left.+\sum_{(l_1,l_2)\in Z^2_+\setminus Q_{n_1n_2}}\frac{|a_{l_1l_2}|+|b_{l_1l_2}|+|c_{l_1l_2}|+|d_{l_1l_2}|}{(l_1+1)(l_2+1)}\right), \end{aligned} \qquad (8)$$

n_1, $n_2=0,1,\ldots$, $a_{l_1l_2},b_{l_1l_2},c_{l_1l_2},d_{l_1l_2}$ — *коефіцієнти Фур'є функції* f.

Д о в е д е н н я. Будь-яку функцію $f\in L$ можна подати у вигляді суми чотирьох: $f(x_1,x_2)=f^{++}(x_1,x_2)+f^{+-}(x_1,x_2)+f^{-+}(x_1,x_2)+f^{--}(x_1,x_2)$, де парна за кожною змінною — $f^{++}(x_1,x_2)=\frac{1}{4}(f(x_1,x_2)+f(-x_1,x_2)+f(x_1,-x_2)+f(-x_1,-x_2))$, парна за x_1 і непарна за x_2 — $f^{+-}(x_1,x_2)=\frac{1}{4}(f(x_1,x_2)+f(-x_1,x_2)-f(x_1,-x_2)-f(-x_1,-x_2))$, непарна за x_1 і парна за x_2 — $f^{-+}(x_1,x_2)=\frac{1}{4}(f(x_1,x_2)-f(-x_1,x_2)+f(x_1,-x_2)-f(-x_1,-x_2))$, непарна за кожною змінною функція — $f^{--}(x_1,x_2)=\frac{1}{4}(f(x_1,x_2)-f(-x_1,x_2)-f(x_1,-x_2)+f(-x_1,-x_2))$.

Нехай $t^*_{n_1n_2}(x_1,x_2)$ — поліном найкращого наближення функції f. Тоді

$$\begin{aligned} \|f(x_1,x_2)-t^*_{n_1n_2}(x_1,x_2)\|_L &= \frac{1}{4}\Big(\|f(x_1,x_2)-t^*_{n_1n_2}(x_1,x_2)\|_L \\ &+\|-f(-x_1,x_2)+t^*_{n_1n_2}(-x_1,x_2)\|_L+\|-f(x_1,-x_2)+t^*_{n_1n_2}(x_1,-x_2)\|_L \\ &+\|f(-x_1,-x_2)-t^*_{n_1n_2}(-x_1,-x_2)\|_L\Big)\geq\|f^{--}(x_1,x_2)-t^{--}_{n_1n_2}(x_1,x_2)\|_L, \end{aligned}$$

де $t^{--}_{n_1 n_2}(x_1, x_2)$ — непарний за кожною змінною поліном з множини $T_{n_1 n_2}$. Отже, $E_{n_1 n_2}(f) \geq E^{--}_{n_1 n_2}(f^{--}) \geq E_{n_1 n_2}(f^{--})$, де $E^{--}_{n_1 n_2}(f^{--})$ — найкраще наближення функції $f^{--}(x_1, x_2)$ непарними за кожною змінною поліномами з множини $T_{n_1 n_2}$. Аналогічно одержуємо $E_{n_1 n_2}(f) \geq E_{n_1 n_2}(f^{++})$, $E_{n_1 n_2}(f) \geq E_{n_1 n_2}(f^{+-})$, $E_{n_1 n_2}(f) \geq E_{n_1 n_2}(f^{-+})$. Тому

$$E_{n_1 n_2}(f) \geq C \Bigg(E_{n_1 n_2}(f^{++}) + E_{n_1 n_2}(f^{+-}) E_{n_1 n_2}(f^{-+}) + E_{n_1 n_2}(f^{--}) \Bigg). \tag{9}$$

Покажемо, що

$$E_{n_1 n_2}(f^{++}) \geq C \sum_{(l_1, l_2) \in Z^2_+ \setminus Q_{n_1 n_2}} \frac{|a_{l_1 l_2}|}{(l_1 + 1)(l_2 + 1)} \, . \tag{10}$$

Нехай $V^{n_1 \; n_2}_{\frac{n_1}{2} \; \frac{n_2}{2}}(f^{++}; x_1, x_2)$ — сума Валле–Пуссена виду

$$V^{n_1 \; n_2}_{\frac{n_1}{2} \; \frac{n_2}{2}}(f^{++}; x_1, x_2) = \sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=0}^{n_2} 2^{-\gamma} \lambda^{(n_1 n_2)}_{l_1 l_2} a_{l_1 l_2} \cos l_1 x_1 \cos l_2 x_2 \, ,$$

де

$$\lambda^{(n_1 n_2)}_{l_1 l_2} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \; 0 \leq l_1 \leq n_1 - \left[\frac{n_1}{2}\right], \\ & \phantom{\text{якщо }} \; 0 \leq l_2 \leq n_2 - \left[\frac{n_2}{2}\right]; \\ 1 - L_2, & \text{якщо } \; 0 \leq l_1 \leq n_1 - \left[\frac{n_1}{2}\right], \\ & \phantom{\text{якщо }} \; n_2 - \left[\frac{n_2}{2}\right] + 1 \leq l_2 \leq n_2; \\ 1 - L_1, & \text{якщо } \; n_1 - \left[\frac{n_1}{2}\right] + 1 \leq l_1 \leq n_1, \\ & \phantom{\text{якщо }} \; 0 \leq l_2 \leq n_2 - \left[\frac{n_2}{2}\right]; \\ (1 - L_1)(1 - L_2), & \text{якщо } \; n_1 - \left[\frac{n_1}{2}\right] + 1 \leq l_1 \leq n_1, \\ & \phantom{\text{якщо }} \; n_2 - \left[\frac{n_2}{2}\right] + 1 \leq l_2 \leq n_2; \end{cases}$$

$L_j := \dfrac{l_j - n_j + [\frac{n_j}{2}]}{[\frac{n_j}{2}] + 1}$ $(j = 1, 2)$. Тоді

$$E_{n_1 n_2}(f^{++}) \geq C \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f^{++}(x_1, x_2) - V^{n_1 \; n_2}_{\frac{n_1}{2} \; \frac{n_2}{2}}(f^{++}; x_1, x_2) \right| dx_1 \, dx_2. \tag{11}$$

Для оцінки інтегралу (11) застосуємо лему 2. Оскільки $f(x_1,x_2) \in L$, $\overline{f}_j(x_1,x_2) \in L$ $(j=\overline{1,3})$, то сумовними є також $f(x_1,-x_2)$, $f(-x_1,x_2)$, $f(-x_1,-x_2)$, $\overline{f}_j(x_1,-x_2)$, $\overline{f}_j(-x_1,x_2)$, $\overline{f}_j(-x_1,-x_2)$ $(j=\overline{1,3})$. Тому $f^{++}(x_1,x_2) \in L$, $\overline{f^{++}}_j(x_1,x_2) \in L$ $(j=\overline{1,3})$. Нехай $R(x_1,x_2) := f^{++}(x_1,x_2) - V^{n_1}_{\frac{n_1}{2}}{}^{n_2}_{\frac{n_2}{2}}(f^{++};x_1,x_2)$, тоді $R(x_1,x_2) \in L$, $\overline{R}_j(x_1,x_2) \in L$ $(j=\overline{1,3})$ і з (11), враховуючи (3), випливає

$$E_{n_1n_2}(f^{++}) \ge C\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}\frac{|\alpha_{l_1l_2}|}{(l_1+1)(l_2+1)}\,, \tag{12}$$

де

$$\alpha_{l_1l_2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 \le l_1 \le n_1 - \left[\frac{n_1}{2}\right], \\ & \phantom{\text{якщо }} 0 \le l_2 \le n_2 - \left[\frac{n_2}{2}\right]; \\ L_2 a_{l_1l_2}, & \text{якщо } 0 \le l_1 \le n_1 - \left[\frac{n_1}{2}\right], \\ & \phantom{\text{якщо }} n_2 - \left[\frac{n_2}{2}\right] + 1 \le l_2 \le n_2; \\ L_1 a_{l_1l_2}, & \text{якщо } n_1 - \left[\frac{n_1}{2}\right] + 1 \le l_1 \le n_1, \\ & \phantom{\text{якщо }} 0 \le l_2 \le n_2 - \left[\frac{n_2}{2}\right]; \\ (L_1+L_2-L_1L_2)a_{l_1l_2}, & \text{якщо } n_1 - \left[\frac{n_1}{2}\right] + 1 \le l_1 \le n_1, \\ & \phantom{\text{якщо }} n_2 - \left[\frac{n_2}{2}\right] + 1 \le l_2 \le n_2; \\ a_{l_1l_2}, & \text{якщо } l_1 \ge n_1+1 \text{ або } l_2 \ge n_2+1. \end{cases}$$

З (12), враховуючи визначення $\alpha_{l_1l_2}$, одержуємо

$$E_{n_1n_2}(f^{++}) \ge C\left(\sum_{l_1=0}^{n_1}\frac{1}{l_1+1}\left(\sum_{l_2=n_2-[\frac{n_2}{2}]+1}^{n_2} L_2\frac{|a_{l_1l_2}|}{l_2+1} + \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty}\frac{|a_{l_1l_2}|}{l_2+1}\right)\right.$$
$$+\sum_{l_2=0}^{n_2-[\frac{n_2}{2}]}\frac{1}{l_2+1}\left(\sum_{l_1=n_1-[\frac{n_1}{2}]+1}^{n_1} L_1\frac{|a_{l_1l_2}|}{l_1+1} + \sum_{l_1=n_1+1}^{\infty}\frac{|a_{l_1l_2}|}{l_1+1}\right)$$
$$+\sum_{l_1=n_1-[\frac{n_1}{2}]+1}^{n_1}\;\sum_{l_2=n_2-[\frac{n_2}{2}]+1}^{n_2}\frac{L_1(1-L_2)|a_{l_1l_2}|}{(l_1+1)(l_2+1)}$$

$$+ \sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{l_2=n_2-[\frac{n_2}{2}]+1}^{\infty} \frac{|a_{l_1 l_2}|}{(l_1+1)(l_2+1)} \Bigg)$$

$$\geq C \left(\sum_{l_1=0}^{n_1} \frac{1}{l_1+1} \left(\frac{1}{n_2/2} \sum_{l_2=n_2-[\frac{n_2}{2}]+1}^{n_2} \frac{|a_{l_1 l_2}|}{l_2+1} + \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} \frac{|a_{l_1 l_2}|}{l_2+1} \right) \right.$$

$$+ \sum_{l_2=0}^{n_2-[\frac{n_2}{2}]} \frac{1}{l_2+1} \left(\frac{1}{n_1/2} \sum_{l_1=n_1-[\frac{n_1}{2}]+1}^{n_1} \frac{|a_{l_1 l_2}|}{l_1+1} + \sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} \frac{|a_{l_1 l_2}|}{l_1+1} \right) + \frac{1}{(n_1/2)(n_2/2)}$$

$$\left. \times \sum_{l_1=n_1-[\frac{n_1}{2}]+1}^{n_1} \sum_{l_2=n_2-[\frac{n_2}{2}]+1}^{n_2} \frac{|a_{l_1 l_2}|}{(l_1+1)(l_2+1)} + \sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{l_2=n_2-[\frac{n_2}{2}]+1}^{\infty} \frac{|a_{l_1 l_2}|}{(l_1+1)(l_2+1)} \right)$$

$$\geq C \left(\sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} \frac{|a_{l_1 l_2}|}{(l_1+1)(l_2+1)} + \sum_{l_2=0}^{n_2-[\frac{n_2}{2}]} \sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} \frac{|a_{l_1 l_2}|}{(l_1+1)(l_2+1)} \right.$$

$$\left. + \sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{l_2=n_2-[\frac{n_2}{2}]+1}^{\infty} \frac{|a_{l_1 l_2}|}{(l_1+1)(l_2+1)} \right) \geq C \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2 \setminus Q_{n_1 n_2}} \frac{|a_{l_1 l_2}|}{(l_1+1)(l_2+1)}.$$

Отже,

$$E_{n_1 n_2}(f^{++}) \geq C \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2 \setminus Q_{n_1 n_2}} \frac{|a_{l_1 l_2}|}{(l_1+1)(l_2+1)}.$$

Таким чином, з (9), враховуючи (10) та аналогічні нерівності для $E_{n_1 n_2}(f^{+-})$, $E_{n_1 n_2}(f^{-+})$, $E_{n_1 n_2}(f^{--})$, одержуємо

$$E_{n_1 n_2}(f) \geq C \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2 \setminus Q_{n_1 n_2}} \frac{|a_{l_1 l_2}| + |b_{l_1 l_2}| + |c_{l_1 l_2}| + |d_{l_1 l_2}|}{(l_1+1)(l_2+1)},$$

що разом з оцінкою (7), справедливою для $\forall f \in L$, доводить теорему.

Список літератури

[1] *Л.В. Жижиашвили*, Сопряженные функции и тригонометрические ряды. Изд-во Тбил. ун-та, Тбилиси (1969).

[2] *А.А. Конюшков*, Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье. — *Мат. сб.* (1958), т. 44, № 1, с. 53–84.

[3] *В.Е. Гейт*, О структурных и конструктивных свойствах синус- и косинус-рядов с монотонной последовательностью коэффициентов Фурье. — *Изв. вузов. Математика* (1969), т. 86, № 7, с. 39–47.

[4] *А. Зигмунд*, Тригонометрические ряды. Т. 2. Мир, Москва (1965).

[5] *С.М. Никольский*, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — Наука, Москва (1969).

[6] *П.В. Задерей*, О многомерном аналоге одного результата Р. Боаса. — *Укр. мат. журн.* (1987), т. 39, № 3, с. 380–383.

The lower bounds estimate of the best approximation with a trigonometric polynomials of a summarized functions of two variables

T.O. Kononovich

The lower bounds estimate of the best approximation in metric L of a summarized functions of two variables under condition of summarability of the functions, conjugated by each and both variables, expressed in terms of Fourier coefficients, is obtained.