Математическая физика, анализ, геометрия
2002, т. 9, № 3, с. 502–508

Многочлены, ортогональные на вещественной и мнимой осях в комплексной плоскости

С.М. Загороднюк

Механико-математический факультет
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина
E-mail:Sergey.M.Zagorodnyuk@univer.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 30 ноября 2001 г.
Представлена И.В. Островским

Рассматриваются системы многочленов, удовлетворяющие пятичленному рекуррентному соотношению, которое в матричной форме может быть записано в виде $J_5 p(\lambda) = \lambda^2 p(\lambda)$, где $p(\lambda) = (p_0(\lambda), p_1(\lambda), \ldots, p_n(\lambda), \ldots)^T$ — вектор из многочленов, J_5 — полубесконечная пятидиагональная эрмитова матрица. Рассматриваются многочлены такого вида, которые кроме этого удовлетворяют соотношению $J_3 p = \lambda p$, где J_3 — якобиева матрица. Получен параметрический вид некоторых таких систем и матриц. Для некоторых систем также получены соотношения ортонормированности.

Розглядаються системи многочленів, що задовольняють п'ятичленному рекурентному співвідношенню, яке у матрицевій формі може бути записано у вигляді $J_5 p(\lambda) = \lambda^2 p(\lambda)$, де $p(\lambda) = (p_0(\lambda), p_1(\lambda), \ldots, p_n(\lambda), \ldots)^T$ — вектор з многочленів, J_5 — півнескінченна п'ятидіагональна ермітова матриця. Розглядаються многочлени такого вигляду, які крім цього задовольняють співвідношенню $J_3 p = \lambda p$, де J_3 — якобієва матриця. Одержано параметричний вигляд деяких таких систем і матриць. Для деяких систем також одержано співвідношення ортонормованості.

Как известно [1], системы многочленов, ортонормированных на вещественной оси, удовлетворяют рекуррентному соотношению, которое может быть записано в матричной форме $Jp = \lambda p$, где J — якобиева матрица, $p = (p_0(\lambda), p_1(\lambda), \ldots, p_n(\lambda), \ldots)^T$ — вектор из многочленов. В работах многих

Mathematics Subject Classification 2000: 42C05.

© С.М. Загороднюк, 2002

авторов изучались матрицы, имеющие более общую структуру, чем якобиева матрица [2, 3]. Предметом нашего изучения будут системы многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющие соотношению

$$J_5 p = \lambda^2 p, \tag{1}$$

где $J_5 = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \beta_0 & \alpha_0 & 0 & 0 & . \\ \overline{\beta_0} & \gamma_1 & \beta_1 & \alpha_1 & 0 & . \\ \alpha_0 & \overline{\beta_1} & \gamma_2 & \beta_2 & \alpha_2 & . \\ 0 & \alpha_1 & \overline{\beta_2} & \gamma_3 & \beta_3 & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$ $\alpha_n > 0,\ \beta_n \in \mathbb{C},\ \gamma_n \in R,\ n \in N_+ = N \cup \{0\}$ — полубесконечная пятидиагональная эрмитова матрица, p — вектор из многочленов. В.А. Золотаревым мне было предложено изучить подобные системы многочленов. Результаты исследования нашли отражение в работе [4]. В частности, справедлива теорема (см. [4, Th. 5, p. 272]):

Теорема 1. *Пусть задана следующая система многочленов:* $p_0 = 1, p_1 = c_1\lambda + b, \dots, p_k(\lambda) = c_k \lambda^k + \dots, \dots$, *где* $c_k > 0, k = \overline{1,\infty}, b \in \mathbb{C}$ *и выполнено соотношение (1). Для справедливости равенства*

$$\begin{pmatrix} \widehat{\beta}_0 & \widehat{\alpha}_0 & 0 & 0 & . \\ \widehat{\gamma}_0 & \widehat{\beta}_1 & \widehat{\alpha}_1 & 0 & . \\ 0 & \widehat{\gamma}_1 & \widehat{\beta}_2 & \widehat{\alpha}_2 & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \end{pmatrix} \tag{2}$$

с некоторым набором комплексных чисел $\widehat{\alpha}_k$, $\widehat{\beta}_k$, $\widehat{\gamma}_k$, $k = \overline{0,\infty}$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$\text{а) } \beta_k = 0 \text{ или } \frac{\overline{\beta_k}}{\beta_k} = \begin{cases} c, & \text{если } k \ - \ \text{четно} \\ \frac{1}{c}, & \text{если } k \ - \ \text{нечетно} \end{cases},\ k = \overline{0,\infty}, \tag{3}$$

где c *— некоторое фиксированное комплексное число на единичной окружности (одно и то же для всех ненулевых* β_k*);*

$$\text{б) } \gamma_0 = \frac{b^2 + c}{c_1^2},\ \gamma_{2k} = \frac{1}{c}{\alpha'}_{2k-1}^2 + c{\alpha'}_{2k}^2 + {\beta'}_{2k}^2,\ k = \overline{1,\infty},$$

$$\gamma_{2k+1} = c{\alpha'}_{2k}^2 + \frac{1}{c}{\alpha'}_{2k+1}^2 + {\beta'}_{2k+1}^2, k = \overline{0,\infty}, \tag{4}$$

где c *из условия а), если не все* β_k *равны нулю или некоторое ненулевое, конечное, комплексное число, в противном случае,*

$$\alpha'_k = \begin{cases} \frac{1}{c_1}\frac{\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_{k-1}}{\alpha_0\alpha_2\ldots\alpha_{k-2}}, & \text{если к} - \text{четно} \\ c_1\frac{\alpha_0\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}}{\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_{k-2}}, & \text{если к} - \text{нечетно} \end{cases} \quad k = 2, 3, \dots,$$

$$\alpha'_0 = \frac{1}{c_1}, \ \alpha'_1 = \alpha_0 c_1, \tag{5}$$

$$\beta'_k = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \frac{\beta_{k-1-j}}{\alpha'_{k-1-j}} + (-1)^{k+1}\frac{b}{c_1}, \ k = 0, 1, \dots . \tag{6}$$

Если условия а) и б) выполнены, тогда коэффициенты $\{\widehat{\alpha}_k, \widehat{\gamma}_k, \widehat{\beta}_k\}$ *определяются следующим образом:*

$$\widehat{\alpha}_k = \alpha'_k, \widehat{\beta}_k = \beta'_k, \widehat{\gamma}_{2k} = c\alpha'_{2k}, \ \widehat{\gamma}_{2k+1} = \frac{1}{c}\alpha'_{2k+1}, \ k = \overline{0,\infty}. \tag{7}$$

Рассмотрим различные случаи выполнения условий этой теоремы и получим представление соответствующих матриц, вид систем многочленов, а также соотношения ортогональности для некоторых таких систем.

1. Пусть для системы многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющей (1), выполнены условия теоремы 1 и $\beta_k = 0, k = \overline{0,\infty}$.

В этом случае из (6) следует, что $\beta'_k = (-1)^{k+1}\frac{b}{c_1}$, $k = 0, 1, \dots$. Из (4),(5) заключаем, что $\gamma_1 = c{\alpha'}_0^2 + \frac{1}{c}{\alpha'}_1^2 + {\beta'}_1^2 = c\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c}\alpha_0^2 c_1^2 + \frac{b^2}{c_1^2} = \gamma_0 + \frac{1}{c}\alpha_0^2 c_1^2$, $c = \frac{\alpha_0^2 c_1^2}{\gamma_1 - \gamma_0}$, где $\gamma_1 \neq \gamma_0$ (если $\gamma_1 = \gamma_0$, то $c = \infty$, что противоречит предположениям теоремы). Поскольку $\gamma_0, \ \gamma_1 \in R, \ \alpha_0 > 0, \ c_1 > 0$, то $c \in R\backslash\{0\}$. Из (4) следует, что $b^2 = c_1^2\gamma_0 - c$ и, значит, $b^2 \in R$. Обозначим $\delta = \frac{b}{c_1} \in R \cup T$, где $T = (-i\infty, i\infty)$. Тогда, учитывая (7), заключаем, что матрица в (2) имеет вид

$$\widehat{J}_3(\delta, c) = \begin{pmatrix} -\delta & \alpha'_0 & 0 & 0 & . \\ c\alpha'_0 & \delta & \alpha'_1 & 0 & . \\ 0 & \frac{1}{c}\alpha'_1 & -\delta & \alpha'_2 & . \\ 0 & 0 & c\alpha'_2 & \delta & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}, \ \alpha'_k > 0, \ k \in N_+, \ c \in R\backslash\{0\}, \ \delta \in R \cup T.$$

Обратно, если система многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет соотношению

$$J_3(\Delta, C)p = \lambda p, p_0 = 1, \tag{8}$$

где $J_3(\Delta, C) = \begin{pmatrix} -\Delta & \tilde{\alpha}'_0 & 0 & 0 & . \\ C\tilde{\alpha}'_0 & \Delta & \tilde{\alpha}'_1 & 0 & . \\ 0 & \frac{1}{C}\tilde{\alpha}'_1 & -\Delta & \tilde{\alpha}'_2 & . \\ 0 & 0 & c\tilde{\alpha}'_2 & \Delta & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$, $\tilde{\alpha}'_k > 0, \ k \in N_+, \ C \in R\backslash\{0\}$,

$$\Delta \in R \cup T,$$

то она удовлетворяет (1) и для нее выполнены условия теоремы 1 с $\beta_k = 0, k = \overline{0,\infty}$. Действительно,

$$J_3 J_3 p = \lambda J_3 p = \lambda^2 p,$$

$$J_3^2 = \begin{pmatrix} \Delta^2 + C\tilde{\alpha}_0'^2 & 0 & \tilde{\alpha}_0'\tilde{\alpha}_1' & 0 & . \\ 0 & C\tilde{\alpha}_0'^2 + \Delta^2 + \frac{1}{C}\tilde{\alpha}_1'^2 & 0 & \tilde{\alpha}_1'\tilde{\alpha}_2' & . \\ \tilde{\alpha}_0'\tilde{\alpha}_1' & 0 & \frac{1}{C}\tilde{\alpha}_1'^2 + \Delta^2 + C\tilde{\alpha}_2'^2 & 0 & . \\ 0 & \tilde{\alpha}_1'\tilde{\alpha}_2' & 0 & C\tilde{\alpha}_2'^2 + \Delta^2 + \frac{1}{C}\tilde{\alpha}_3'^2 & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

$$p_0 = 1, \quad p_1 = \frac{1}{\tilde{\alpha}_0'}\lambda + \frac{\Delta}{\tilde{\alpha}_0'}.$$

Изучим теперь системы многочленов, удовлетворяющих соотношению (8). Сначала рассмотрим некоторую систему многочленов $\{r_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющую соотношению (8) с $\Delta = 0$. Для многочленов $r_n(\lambda)$ справедливо

$$\tilde{\alpha}_{2k-2}'\tilde{\alpha}_{2k-1}' r_{2k-2} + (\frac{1}{C}\tilde{\alpha}_{2k-1}'^2 + C\tilde{\alpha}_{2k}'^2) r_{2k} + \tilde{\alpha}_{2k}'\tilde{\alpha}_{2k+1}' r_{2k+2} = \lambda^2 r_{2k},$$

$$\tilde{\alpha}_{2k-1}'\tilde{\alpha}_{2k}' r_{2k-1} + (C\tilde{\alpha}_{2k}'^2 + \frac{1}{C}\tilde{\alpha}_{2k+1}'^2) r_{2k+1} + \tilde{\alpha}_{2k+1}'\tilde{\alpha}_{2k+2}' r_{2k+3} = \lambda^2 r_{2k+1},$$

где $\tilde{\alpha}_{-2}' = \tilde{\alpha}_{-1}' = 0, \quad k \in N_+$.

Обозначим $\widetilde{\alpha}_{2k} = C\tilde{\alpha}_{2k}'$, $\widetilde{\alpha}_{2k+1} = \tilde{\alpha}_{2k+1}'$, $k \in N_+$. Умножая последние равенства на C, заключаем, что

$$\widetilde{\alpha}_{n-2}\widetilde{\alpha}_{n-1} r_{n-2} + (\widetilde{\alpha}_{n-1}^2 + \widetilde{\alpha}_n^2) r_n + \widetilde{\alpha}_n \widetilde{\alpha}_{n+1} r_{n+2} = C\lambda^2 r_n, \ n \in N_+ \, .$$

Рассмотрим многочлены $\widetilde{r}_n(\lambda) = r_n(\frac{1}{\sqrt{C}}\lambda)$, $n \in N_+$. Для многочленов $\widetilde{r}_n(\lambda)$ выполнено

$$\widetilde{\alpha}_{n-2}\widetilde{\alpha}_{n-1}\widetilde{r}_{n-2}(\lambda) + (\widetilde{\alpha}_{n-1}^2 + \widetilde{\alpha}_n^2)\widetilde{r}_n(\lambda) + \widetilde{\alpha}_n\widetilde{\alpha}_{n+1}\widetilde{r}_{n+2}(\lambda) = \lambda^2 \widetilde{r}_n(\lambda), n \in N_+ \, . \qquad (10)$$

Начальные условия для многочленов $\widetilde{r}_n(\lambda)$ имеют вид

$$\widetilde{r}_0(\lambda) = r_0(\frac{1}{\sqrt{C}}\lambda) = 1, \widetilde{r}_1(\lambda) = r_1(\frac{1}{\sqrt{C}}\lambda) = \frac{1}{\alpha_0'\sqrt{C}}\,\lambda\, . \qquad (11)$$

Введем теперь в рассмотрение многочлены $\{v_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющие соотношению

$$\begin{pmatrix} 0 & \widetilde{\alpha}_0 & 0 & 0 & . \\ \widetilde{\alpha}_0 & 0 & \widetilde{\alpha}_1 & 0 & . \\ 0 & \widetilde{\alpha}_1 & 0 & \widetilde{\alpha}_2 & . \\ 0 & 0 & \widetilde{\alpha}_2 & 0 & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \end{pmatrix}, \quad v_0 = 1. \qquad (12)$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_0^2 & 0 & \widetilde{\alpha}_0\widetilde{\alpha}_1 & 0 & 0 & . \\ 0 & \widetilde{\alpha}_0^2+\widetilde{\alpha}_1^2 & 0 & \widetilde{\alpha}_1\widetilde{\alpha}_2 & 0 & . \\ \widetilde{\alpha}_0\widetilde{\alpha}_1 & 0 & \widetilde{\alpha}_1^2+\widetilde{\alpha}_2^2 & 0 & \widetilde{\alpha}_2\widetilde{\alpha}_3 & . \\ 0 & \widetilde{\alpha}_1\widetilde{\alpha}_2 & 0 & \widetilde{\alpha}_2^2+\widetilde{\alpha}_3^2 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$v_0(\lambda)=1, \quad v_1(\lambda)=\frac{1}{\widetilde{\alpha}_0}\lambda=\frac{1}{C\alpha_0'}\,\lambda. \quad (14)$$

Сравнивая (10), (11) и (13), (14), убеждаемся, что многочлены $\{\widetilde{r}_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{v_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют одному и тому же разностному уравнению с различными начальными условиями.

Многочлены $\tilde{v}_{2k}(\lambda) := v_{2k}(\lambda), \tilde{v}_{2k+1}(\lambda) := \sqrt{C}v_{2k+1}(\lambda), k \in N_+$ являются решением (13) и удовлетворяют тем же начальным условиям, что и $\tilde{r}_n(\lambda)$. Значит, $\tilde{r}_{2k}(\lambda) = v_{2k}(\lambda), \tilde{r}_{2k+1}(\lambda) = \sqrt{C}v_{2k+1}(\lambda), k \in N_+$. Тогда $r_{2k}(\lambda) = \tilde{r}_{2k}(\sqrt{C}\lambda) = v_{2k}(\sqrt{C}\lambda), r_{2k+1}(\lambda) = \tilde{r}_{2k+1}(\sqrt{C}\lambda) = \sqrt{C}v_{2k+1}(\sqrt{C}\lambda), k \in N_+$.

Поскольку $J_3(0,C)r(\lambda) = \lambda r(\lambda), r = (r_0, r_1, \dots)^T$, то $(J_3(0,C))^2 r(\lambda) = \lambda^2 r(\lambda)$. Отсюда следует, что

$$J_3^2(0,C)r(\sqrt{\lambda^2-\Delta^2}) = (\lambda^2-\Delta^2)r(\sqrt{\lambda^2-\Delta^2}),$$

$$(J_3^2(0,C)+\Delta^2 I)r(\sqrt{\lambda^2-\Delta^2}) = \lambda^2 r(\sqrt{\lambda^2-\Delta^2}),$$

$$J_3^2(\Delta,C)r(\sqrt{\lambda^2-\Delta^2}) = \lambda^2 r(\sqrt{\lambda^2-\Delta^2}).$$

Функции $\widetilde{p}_{2k}(\lambda) := r_{2k}(\sqrt{\lambda^2-\Delta^2}), \widetilde{p}_{2k+1}(\lambda) := \frac{\lambda+\Delta}{\sqrt{\lambda^2-\Delta^2}}r_{2k+1}(\sqrt{\lambda^2-\Delta^2})$ будут удовлетворять соотношению: $(J_3(\Delta,C))^2\widetilde{p}(\lambda) = \lambda^2\widetilde{p}(\lambda), \widetilde{p} = (\widetilde{p}_0, \widetilde{p}_1, \dots)^T$. Но начальные условия для $\widetilde{p}_n(\lambda)$ имеют вид $\widetilde{p}_0(\lambda) = r_0(\sqrt{\lambda^2-\Delta^2}) = 1, \widetilde{p}_1(\lambda) = \frac{\lambda+\Delta}{\sqrt{\lambda^2-\Delta^2}}r_1(\sqrt{\lambda^2-\Delta^2}) = \frac{1}{\alpha_0'}\lambda + \frac{\Delta}{\alpha_0'}$. Значит, многочлены $\widetilde{p}_n(\lambda)$ совпадают с многочленами $p_n(\lambda)$. Следовательно,

$$p_{2k}(\lambda) = r_{2k}(\sqrt{\lambda^2-\Delta^2}) = v_{2k}(\sqrt{C}\sqrt{\lambda^2-\Delta^2}),$$

$$p_{2k+1}(\lambda) = \frac{\lambda+\Delta}{\sqrt{\lambda^2-\Delta^2}}r_{2k+1}(\sqrt{\lambda^2-\Delta^2}) = \frac{\lambda+\Delta}{\sqrt{\lambda^2-\Delta^2}}\sqrt{C}v_{2k+1}(\sqrt{C}\sqrt{\lambda^2-\Delta^2}),$$

$$k \in N_+, \quad (15)$$

где многочлены $v_n(\lambda)$ определяются из (12). Многочлены $v_n(\lambda)$ являются ортонормированными многочленами на вещественной оси при $C > 0$.

В случае, когда $\Delta = -di, d \in R, C > 0$ справедливы соотношения ортонормированности

$$\frac{2}{C+1}\int_{-\infty}^{0} p_l(\lambda)\overline{p_r(\lambda)}d\rho(\sqrt{C}\sqrt{\lambda^2+d^2}) + 2\int_0^{di} p_l(\lambda)\overline{p_r(\lambda)}\frac{d\rho(\sqrt{C}\sqrt{\lambda^2+d^2})}{1+C\frac{(\lambda i+d)^2}{\lambda^2+d^2}}$$

$$
+2\int_{-\infty}^{0}(p_l(\lambda),p_l(-\lambda))\begin{pmatrix} \frac{(\lambda^2+d^2-C(\lambda^2-d^2))^2+4C\lambda^2d^2}{(\lambda^2+d^2)^2(1+C)^2} & \overline{-\frac{1-C\frac{(\lambda+di)^2}{\lambda^2+d^2}}{1+C}} \\ -\frac{1-C\frac{(\lambda+di)^2}{\lambda^2+d^2}}{1+C} & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\times\frac{d\rho(\sqrt{C}\sqrt{\lambda^2+d^2})}{1+C-\frac{(\lambda^2+d^2-C(\lambda^2-d^2))^2+4C\lambda^2d^2}{(\lambda^2+d^2)^2(1+C)}}\overline{\begin{pmatrix} p_r(\lambda) \\ p_r(-\lambda) \end{pmatrix}}+2\int_{0}^{di}(p_l(\lambda),p_l(-\lambda))
$$

$$
\times\begin{pmatrix} \frac{(1+C)^2}{(1+C\frac{(\lambda i+d)^2}{\lambda^2+d^2})^2} & \overline{-\frac{1+C}{1+C\frac{(\lambda i+d)^2}{\lambda^2+d^2}}} \\ -\frac{1+C}{1+C\frac{(\lambda i+d)^2}{\lambda^2+d^2}} & 1 \end{pmatrix}\frac{d\rho(\sqrt{C}\sqrt{\lambda^2+d^2})}{1+C\frac{(\lambda i+d)^2}{\lambda^2+d^2}-\frac{(1+C)^2}{1+C\frac{(\lambda i-d)^2}{\lambda^2+d^2}}}\overline{\begin{pmatrix} p_r(\lambda) \\ p_r(-\lambda) \end{pmatrix}}
$$

$$
=\Delta_{lr},\quad l,r=0,1,\dots .
$$

Это соотношение можно проверить непосредственно, перейдя с помощью замены переменной $\sqrt{C}\sqrt{\lambda^2+d^2}=u$ к вещественному пути интегрирования и воспользовавшись ортогональностью $v_n(\lambda)$.

2. Пусть теперь для системы многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющей (1), выполнены условия теоремы 1 и $\exists\beta_k\neq 0$, $k\in N_+$, а также $c=1$. В этом случае из (7), (4), (3) следует, что $\widehat{\gamma}_n=\widehat{\alpha}_n$, $b^2\in R$, $\beta_n\in R$, $n\in N_+$. Если $b\in R$, то из (6) следует, что $\beta'_k\in R$, $k\in N_+$ и матрица в левой части (2) является якобиевой матрицей, многочлены $p_n(\lambda)$ ортонормированы на вещественной оси.

Если $b\in T\backslash\{0\}$, то из (4) следует, что ${\beta'_n}^2\in R$, т.е. $\beta'_n\in R\cup T$. Тогда рассмотрим в (6) такой номер k, чтобы сумма содержала одно ненулевое вещественное слагаемое. Для этого k правая часть не может быть вещественной, но $\beta'_k\in R$ и мы пришли к противоречию.

3. Пусть для системы многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ из (1) выполнены условия теоремы 1 и $\exists\beta_k\neq 0$, $k\in N_+$, а также $c=-1$.

Из (7), (4), (3) заключаем, что $\widehat{\gamma}_n=-\widehat{\alpha}_n$, $b^2\in R$, $\beta_n\in T$, $n\in N_+$. Если $b\in T$, то из (6) следует, что $\beta'_k\in T$, $k\in N_+$ и матрица в (2) является антисимметрической матрицей, многочлены $p_n(\lambda)$ ортогональны на мнимой оси.

Если $b\in R\backslash\{0\}$, то из (4) заключаем, что ${\beta'_n}^2\in R$, т.е. $\beta'_n\in R\cup T$. Рассмотрим в (6) такой номер k, чтобы сумма содержала одно ненулевое мнимое слагаемое. Для этого номера k правая часть не может быть мнимой, но $\beta'_k\in T$ и приходим к противоречию.

Список литературы

[1] *Г. Сеге*, Ортогональные многочлены. Физматгиз, Москва (1962).

[2] *A.I. Aptekarev, V. Kaliaguine, and W.Van Assche*, Criterion for the resolvent set of nonsymmetric tridiagonal operators. In: *Proc. Amer. Math. Soc.* (1995), v. 123, No. 8, p. 2423–2430.

[3] *Д. Барриос, Г. Лопес, А. Мартинес–Финкельштейн, Е. Торрано*, Конечномерные аппроксимации резольвентного множества бесконечной ленточной матрицы и непрерывные дроби. — *Мат. сб.* (1999), т. 190, №. 4, p. 23–42.

[4] *S. Zagorodniuk*, On a five-diagonal Jacobi matrices and orthogonal polynomials on rays in the complex plane. — *Serdica Math. J.* (1998), v. 24, p. 257–282.

Orthogonal polynomials on the real and the imaginary axes in the complex plane

S.M. Zagorodniuk

In this paper systems of polynomials satisfying a five-term reccurent relation, which can be written in a matrix form $J_5 p(\lambda) = \lambda^2 p(\lambda)$, where $p(\lambda) = (p_0(\lambda), p_1(\lambda), \dots, p_n(\lambda), \dots)^T$ is a vector of polynomials, J_5 is a semi-infinite, five-diagonal, Hermitian matrix are considered. The such kind systems which also satisfy the relation $J_3 p = \lambda p$, where J_3 is a Jacobi matrix, are considered. A parameteric form of some such systems and matrices is obtained. Formulas of orthonormality for some of the systems are also obtained.