Математическая физика, анализ, геометрия
2002, т. 9, № 4, с. 519–532

Выражение объема асимптотического параллелепипеда

Ю.А. Аминов

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, Харьков, 61103, Украина
E-mail:aminov@ilt.kharkov.ua

Institute of Mathematics, Bialystok University
2 Akademicka Str., 15-267, Bialystok, Poland
E-mail:aminov@cksr.ac.bialystok.pl

Статья поступила в редакцию 8 февраля 2002 г.

При изометрическом погружении области пространства Лобачевского L^n в евклидово пространство E^{2n-1} существует координатная сеть, составленная из асимптотических линий. С ее помощью строится n-мерный параллелепипед P, называемый асимптотическим. Рассматриваются свойства его объема V. В случае $n = 2$ известна формула Хацидакиса. Исходя из аналогии с этим случаем, Д. Мур высказал предположение о том, что объем V можно выразить через значения углов ω_i между асимптотическими линиями в вершинах P и он ограничен. Получено выражение V для P на универсальном накрытии 3- и 4-мерных аналогов псевдосферы и доказано, что объем V ограничен универсальной постоянной. Доказано, что существуют погружения областей L^3 в E^5, для которых объем не выражается в виде альтернированной суммы значений одной функции двух переменных, зависящих от ω_i. .

При ізометричному зануренні області простору Лобачевського L^n у евклідів простір E^{2n-1} існує координатна сітка, яку складено з асимптотичних ліній. За її допомогою будується n-мірний паралелепіпед P, що називається асимптотичним. Розглядаються властивості об'єму V. У випадку $n = 2$ відома формула Хацідакиса. Виходячи з аналогії з цим випадком, Д. Мур висловив гіпотезу про те, що об'єм V можна виразити через значення кутів ω_i між асимптотичними лініями у вершинах P і він є обмеженим. Отримано вираз V для P на універсальному накритті 3- та 4-мірних аналогів псевдосфери і доведено, що об'єм V обмежено універсальною сталою. Доведено, що існують занурення областей L^3 в E^5, для яких об'єм не має вигляду альтернувальної суми значень однієї функції двох змінних, що виражені через ω_i.

Mathematics Subject Classification 2000: 53A07.

В теории изметрических погружений плоскости Лобачевского L^2 в трехмерное евклидово пространство E^3 важное значение имеет формула Хацидакиса для площади асимптотического параллелограмма. Согласно данной формуле эта площадь выражается через значения углов между асимптотическими линиями в вершинах параллелограмма. Из этой формулы вытекает знаменитая теорема Гильберта о невозможности изометрически погрузить всю плоскость Лобачевского в E^3 в классе регулярных поверхностей. Идея доказательства состоит в том, что, с одной стороны, площадь произвольного асимптотического параллелограмма ограничена сверху универсальной постоянной, а с другой стороны, любой геодезический круг, площадь которого может быть сделана сколь угодно большой, накрывается некоторым асимптотическим параллелограммом.

Заметим, что во время работы исследовательской группы "Actual problems in the geometry of submanifolds" в Интернациональном математическом центре им. С. Банаха в Варшаве 12–24 ноября 2001 г. Дж.Д. Мур высказывал гипотезу, что объем асимптотического параллелепипеда погружения L^n в E^{2n-1} ограничен и выражается через углы между асимптотическими линиями, взятыми в его вершинах, и указал некоторый подход к ее доказательству в случае четной размерности n. Некоторые соображения по этому вопросу имеются в работе [1]. Естественно проверить эту гипотезу в некоторых простых случаях.

В данной работе рассмотрим частные случаи погружения областей L^3 в E^5 и L^4 в E^7 с одним семейством линий кривизны, составленным из геодезических линий, которые являются аналогами псевдосферы, и покажем, что эти объемы ограничены.

Сначала рассмотрим погружения L^3 в E^5. Пусть $u_1, \dots, u_3$ — координаты кривизны и u_1-линии являются геодезическими на L^3. Метрику погруженной области можно записать в виде

$$ds^2 = \sin^2\sigma(du^1)^2 + \cos^2\sigma[\sin^2\gamma(du^2)^2 + \cos^2\gamma(du^3)^2].$$

В работе [2] показано, что функция $\sigma = \sigma(u^1)$ и удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(\frac{d\sigma}{du^1})^2 = \cos^2\sigma - \frac{c_0^2}{\cos^2\sigma} - 2c_1\,,$$

а функция $\gamma = \eta(u^1) + \omega(u^2, u^3)$, причем η выражается через σ, и ω удовлетворяет уравнению в частных производных (см. теорему 4). Если положить $\sigma = \sigma(u^1)$, $\gamma = \gamma(u^2, u^3)$, то из основной системы погружения L^3 в E^5-системы LE можно непосредственно получить уранения на σ и γ. Если метрика погруженной области в координатах кривизны имеет вид

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} H_i^2 (du^i)^2,$$

то эта система записывается через H_i и символы Дарбу $\beta_{ij} = \frac{\partial H_j}{H_i \partial u^i}$, $i \neq j$, в следующем виде:

$$\frac{\partial H_j}{\partial u^i} = \beta_{ij} H_i, \quad \frac{\partial H_i}{\partial u^i} = -\beta_{ij} H_j - \beta_{ik} H_k,$$

$$\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^k} = \beta_{ik}\beta_{kj}, \quad \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^j} + \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial u^i} + \beta_{ik}\beta_{jk} = 0,$$

$$\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^i} + \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial u^j} + \beta_{ki}\beta_{kj} = H_i H_j,$$

где индексы i, j, и k различные.

В рассматриваемом случае непосредственно из этой системы находим $\beta_{21} = \beta_{31} = 0$, $\gamma_{u^2} = -\beta_{23}$, $\gamma_{u^3} = \beta_{32}$, $\beta_{12} = -\sigma_{u^1} \sin\gamma$, $\beta_{13} = \sigma_{u^1} \cos\gamma$.

Кроме того,

$$\sigma_{u^1}^2 - \cos^2\sigma = k,$$

$$\gamma_{u^2u^2} - \gamma_{u^3u^3} = k \sin\gamma \cos\gamma,$$

где k — постоянное число. Все уравнения системы LE в этом случае выполнены. В частности, можно положить $k = 0$ и

$$\sigma_{u^1} = \cos\sigma, \quad \gamma_{u^2u^2} - \gamma_{u^3u^3} = 0.$$

Рассмотрим случай $\gamma = \gamma_0 = const$. Легко убедиться, что соответствующее погружение является трехмерным аналогом псевдосферы. Если x_i — декартовы координаты в E^5, то подмногообразие имеет представление

$$x^1 = a_2 e^{-t} \cos u^2, \quad x^2 = a_2 e^{-t} \sin u^2,$$

$$x^3 = a_3 e^{-t} \cos u^3, \quad x^4 = a_3 e^{-t} \sin u^3,$$

$$x^5 = \int_0^t \sqrt{1 - e^{-\tau}}\, d\tau,$$

где a_i — постоянные, $a_2^2 + a_3^2 = 1$ и $t = lnchu^1$. В дальнейшем рассмотрим универсальное накрытие этой области, которое гомеоморфно полупространству в евклидовом пространстве, а с метрической точки зрения является внутренностью орисферы. На этом универсальном накрытии существуют асимптотические параллелепипеды со сколько угодно большими длинами ребер.

В этом случае $\sin\gamma = a_2$, $\cos\gamma = a_3$, $\sin\sigma = thu^1$. Вторые квадратичные формы можно записать в виде

$$II^1 = -\frac{shu^1}{ch^2u^1}\Big(-(du^1)^2 + a_2^2(du^2)^2 + a_3^2(du^3)^2\Big),$$

$$II^2 = \frac{a_2a_3}{chu^1}\Big((du^2)^2 - (du^3)^2\Big).$$

Интегрируя уравнение

$$\frac{d\sigma}{du^1} = \cos\sigma, \tag{1}$$

получим

$$\sin\sigma = thu^1, \quad \cos\sigma = \frac{1}{chu^1}. \tag{2}$$

Область регулярного погружения задается неравенством $u^1 > 0$. Объем области в координатах кривизны выражается интегралом

$$V = \frac{1}{2}\int \sin\sigma\cos^2\sigma\sin 2\gamma du^1du^2du^3.$$

Перейдем к асимптотическим координатам α^i, положив

$$u^1 = -\alpha^1 + \alpha^2 + \alpha^3, \quad \alpha^1 = \frac{1}{2}(u^2 + u^3),$$
$$u^2 = \alpha^1 - \alpha^2 + \alpha^3, \quad \alpha^2 = \frac{1}{2}(u^1 + u^3),$$
$$u^3 = \alpha^1 + \alpha^2 - \alpha^3, \quad \alpha^3 = \frac{1}{2}(u^1 + u^2).$$

Якобиан перехода $J(\frac{u^1,u^2,u^3}{\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3}) = 4$, поэтому в асимптотических координатах

$$V = 2\int \sin\sigma\cos^2\sigma\sin 2\gamma d\alpha^1d\alpha^2d\alpha^3. \tag{3}$$

В асимптотических координатах область регулярного погружения задается неравенством $\alpha^2 + \alpha^3 > \alpha^1$. Рассмотрим асимптотический параллелепипед, задаваемый неравенствами

$$a^i \le \alpha^i \le b^i, \quad i = 1,2,3.$$

Найдем такую функцию $\theta(-\alpha^1 + \alpha^2 + \alpha^3)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^3\theta}{\partial\alpha^1\partial\alpha^2\partial\alpha^3} = 2a\sin\sigma\cos^2\sigma, \tag{4}$$

где постоянная $a = \sin 2\gamma_0$. Это уравнение можно переписать как обыкновенное дифференциальное уравнение. Для упрощения записи обозначим $x = u^1$. Тогда

$$\frac{d^3\theta}{dx^3} = -2a \sin\sigma \cos^2\sigma.$$

Проверим, что функция $\theta = alnchx$ удовлетворяет этому уравнению с учетом $\sin\sigma = thx$, $\cos\sigma = \frac{1}{chx}$. Имеем

$$\frac{d\theta}{dx} = athx, \quad \frac{d^2\theta}{dx^2} = a\frac{1}{ch^2x},$$

$$\frac{d^3\theta}{dx^3} = -2athx\frac{1}{ch^2x} = -2a\sin\sigma\cos^2\sigma,$$

что и требовалось доказать. Интегрируя правую и левую части (4) по параллелепипеду, получим выражение объема

$$V = 2\sin 2\gamma_0 ln \frac{ch(-b^1+b^2+b^3)ch(-a^1+b^2+a^3)ch(-b^1+a^2+a^3)ch(-a^1+a^2+b^3)}{ch(-b^1+b^2+a^3)ch(-a^1+b^2+b^3)ch(-b^1+a^2+b^3)ch(-a^1+a^2+a^3)}.$$

Перейдем сначала к пределу, когда $b^3 \to \infty$, а остальные переменные постоянны. Тогда под знаком ln получим выражение

$$\frac{ch(-a^1+b^2+a^3)ch(-b^1+a^2+a^3)}{ch(-b^1+b^2+a^3)ch(-a^1+a^2+a^3)}.$$

Далее, устремляя $b^2 \to \infty$, получим

$$\frac{ch(-b^1+a^2+a^3)e^{b^1}}{ch(-a^1+a^2+a^3)e^{a^1}}.$$

При $a^1 \to -\infty$ предел этого выражения равен

$$1 + e^{2(b^1-a^2-a^3)}.$$

Так как точка с координатами (b^1, a^2, a^3) должна находиться в области регулярного погружения, то $-b^1 + a^2 + a^3 > 0$, следовательно,

$$e^{2(b^1-a^2-a^3)} < 1.$$

Тогда $ln(1 + e^{2(b^1-a^2-a^3)}) < ln2$. Итак, объем построенной фигуры ограничен сверху.

Так как объем является положительной аддитивной функцией измеряемых множеств и любой асимптотический параллелепипед можно накрыть построенной неограниченной фигурой, то и его объем тоже ограничен. Наше утверждение доказано. Таким образом, доказана

Теорема 1. *На универсальном накрытии трехмерного аналога псевдосферы объемы асимптотических параллелепипедов ограничены.*

Выражение объема можно записать через значения углов σ и γ в вершинах параллелепипеда. Действительно, $chu^1 = \frac{1}{\cos\sigma}$. Используя обозначение вершин, указанное на рис. 1, получим

$$V = 2\sin 2\gamma_0 ln \frac{\cos\sigma(P_2)\cos\sigma(P_4)\cos\sigma(P_6)\cos\sigma(P_8)}{\cos\sigma(P_1)\cos\sigma(P_3)\cos\sigma(P_5)\cos\sigma(P_7)}. \qquad (5)$$

Вершины, отмеченные на рисунке черными кружками, входят в числитель дроб ные светлыми кружками — в знаменатель

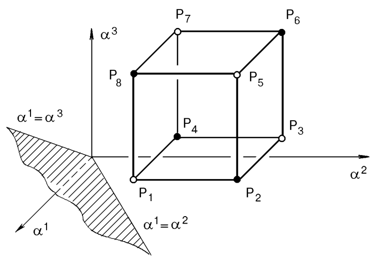

Рис. 1.

Если записать метрику L^3 в асимптотических координатах в виде

$$ds^2 = (d\alpha^1)^2 + (d\alpha^2)^2 + (d\alpha^3)^2$$
$$+2\cos\omega_1 d\alpha^2 d\alpha^3 + 2\cos\omega_2 d\alpha^1 d\alpha^3 + 2\cos\omega_3 d\alpha^1 d\alpha^2,$$

тогда можно записать связь углов ω_i с σ и γ:

$$2\sigma = \omega_1, \quad tg\gamma = \frac{\cos\frac{\omega_2}{2}}{\cos\frac{\omega_3}{2}}.$$

Таким образом, объем асимптотического параллелепипеда для рассматриваемого погружения выражен через значения углов между асимптотическими линиями в его вершинах. При этом легко видеть, что выражение для объема можно записать в виде альтернированной суммы значений одной и той же функции двух переменных σ, γ (а именно, функции $\theta = 2\sin 2\gamma ln\cos\sigma$), взятых в вершинах параллелепипеда

$$V = |\sum_{i=1}^{8}(-1)^i\theta(P_i)|,$$

причем значения функции θ для двух соседних вершин берутся с противоположными знаками.

Три угла между асимптотическими линиями ω_i связаны между собой и выражаются через σ и γ. Интересным является вопрос, выражается ли объем V через значения σ и γ, взятые в вершинах параллелепипеда в общем случае, т.е. представляется ли объем для произвольных погружений в виде

$$V = f(\sigma(P_1), \gamma(P_1), \dots, \sigma(P_8), \gamma(P_8)),$$

где f — некоторая функция. Наложим на эту функцию f ограничение, согласно которому она является альтернированной суммой значений одной и той же функции $\theta(\sigma, \gamma)$ двух аргументов, взятых в вершинах параллелепипеда.

Теорема 2. *Существуют погружения областей L^3 в E^5, для которых объемы асимптотических параллелепипедов не выражаются через значения функции двух переменных от углов между асимптотическими линиями в его вершинах.*

Более точно покажем, что существуют погружения такие, что не существует функция $\theta(\sigma, \gamma)$ двух аргументов, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^3\theta}{\partial\alpha^1\partial\alpha^2\partial\alpha^3} = 2\sin\sigma\cos^2\sigma\sin 2\gamma. \qquad (6)$$

Для доказательства рассмотрим более широкий класс погружений, для которого $\sigma_{u^1} = \cos\sigma$, $\gamma_{u^2u^2} - \gamma_{u^3u^3} = 0$. Следовательно,

$$\gamma = \phi(u^2 + u^3) + \psi(u^2 - u^3),$$

где ϕ и ψ — некоторые функции. Учитывая связь координат кривизны с асимптотическими координатами, получим

$$\gamma = \phi(2\alpha^1) + \psi(2\alpha^3 - 2\alpha^2).$$

В дальнейшем рассмотрим более конкретное выражение

$$\gamma = \frac{1}{2}(\alpha^1)^2 + \alpha^3 - \alpha^2.$$

Последовательно вычисляя производные, получим

$$\frac{\partial^3\theta}{\partial\alpha^1\partial\alpha^2\partial\alpha^3} = -\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial\gamma^2}] + \alpha^1\frac{\partial}{\partial\gamma}[\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial\gamma^2}] = \frac{shx}{ch^3x}\sin 2\gamma.$$

Введем новые координаты:

$$x = -\alpha^1 + \alpha^2 + \alpha^3,$$
$$\gamma = \frac{1}{2}(\alpha^1)^2 + \alpha^3 - \alpha^2,$$
$$\rho = \alpha^1 + \alpha^2 - \alpha^3.$$

Так как производная $\frac{\partial\alpha^1}{\partial\rho}$ не равна тождественно нулю, то коэффициент при α^1 должен быть равен нулю. Следовательно, выражение в квадратных скобках является некоторой функцией $T(x)$ от x. Тогда получим уравнение

$$-\frac{dT(x)}{dx} = 2\frac{shx}{ch^3x}\sin 2\gamma.$$

Следовательно, $\gamma = const$, что противоречит нашему выбору. Теорема 2 доказана.

Рассмотрим теперь боковую поверхность асимптотического параллелепипеда. Имеет место

Теорема 3. *Пусть некоторая область из L^3 погружена в E^5 так, что одно семейство линий кривизны составлено из геодезических линий. Пусть τ — поле касательных к этим линиям. Тогда площадь любого криволинейного асимптотического параллелограмма, проходящего через τ, ограничена сверху универсальной постоянной.*

Запишем выражение метрики в координатах кривизны

$$ds^2 = \sin^2\sigma_1(du^1)^2 + \sin^2\sigma_2(du^2)^2 + \sin^2\sigma_3(du^3)^2.$$

Положим $\sigma_1 = \sigma$, $\omega = 2\sigma$ и $\omega_i = 2\sigma_i$. Кроме того, пусть

$$\sin\sigma_2 = cos\sigma\sin\gamma, \quad \sin\sigma_3 = \cos\sigma\cos\gamma.$$

Если u_1 — семейство линий кривизны, составленное из геодезических линий, то имеем

$$r_{\alpha^1} = -r_{u^1} + r_{u^2} + r_{u^3},$$
$$r_{\alpha^2} = r_{u^1} - r_{u_2} + r_{u^3},$$
$$r_{\alpha^3} = r_{u^1} + r_{u^2} - r_{u^3}.$$

Отсюда

$$\tau = r_{u^1} = \frac{1}{2}(r_{\alpha^2} + r_{\alpha^3}),$$

т.е. касательный вектор τ к u^1-линии касается асимптотической поверхности α^2, α^3. Рассмотрим эту поверхность. Имеет место общее уравнение (см. [2])

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2 \partial \alpha^3} = \sin\omega\Big(1 + \frac{A^2}{g}\Big) + 2ctg\sigma \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha^2}\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha^3},$$

где

$$A = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial \cos\omega_1}{\partial \alpha^1} + \frac{\partial \cos\omega_2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial \cos\omega_3}{\partial \alpha_3}\right),$$
$$g = 16\sin^2\sigma_1 \sin^2\sigma_2 \sin^2\sigma_3\,.$$

Тогда

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha^2} = \gamma_{u^1} - \gamma_{u^2} + \gamma_{u_3}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha^3} = \gamma_{u^1} + \gamma_{u^2} - \gamma_{u_3}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha^2}\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha^3} = \gamma_{u^1}^2 - (\gamma_{u^2} - \gamma_{u^3})^2.$$

После вычислений получим

$$A = 4[\sin\sigma\cos\sigma(\sigma_{u^2}\cos^2\gamma + \sigma_{u^3}\sin^2\gamma) + \cos^2\sigma\sin\gamma\cos\gamma(\gamma_{u^2} - \gamma_{u^3})].$$

Если имеем погружение с семейством u^1-линий кривизны, составленным из геодезических линий, то $\sigma_{u^2} = \sigma_{u^3} = 0$. Тогда

$$A = 4\cos^2\sigma\sin\gamma\cos\gamma(\gamma_{u^2} - \gamma_{u^3}).$$

Имеем

$$\sin\omega\frac{A^2}{g} = 2ctg\sigma(\gamma_{u^2} - \gamma_{u_3})^2.$$

В рассматриваемом случае получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2 \partial \alpha^3} = -\sin\omega - 2ctg\sigma\gamma_{u^1}^2\,.$$

Пусть S — площадь асимптотического четырехугольника T с параметрами α^2, α^3. Тогда

$$S = \sum \pm\omega(P_i) - 2\int\limits_T ctg\gamma^2_{u^1} d\alpha^2 d\alpha^3,$$

где $\omega(P_i)$ — значение угла ω в вершинах четырехугольника. Две вершины берутся со знаком $+$ и две — со знаком $-$. Отсюда следует, что $S < 2\pi$. Таким образом, теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай погружения L^4 в E^7. Метрику подмногообразия в координатах кривизны можно записать в виде

$$ds^2 = \sin^2\sigma(du^1)^2 + \cos^2\sigma(l_2^2(du^2)^2 + l_3^2(du^3)^2 + l_4^2(du^4)^2,$$

где (l_2, l_3, l_4) — постоянный единичный вектор. Все уравнения погружения будут удовлетворены, если функция σ зависит только от u^1 и удовлетворяет уравнению $\frac{d\sigma}{du^1} = \cos\sigma$. Имеем выражение для элемента объема в координатах кривизны

$$dV = \sin\sigma\cos^3\sigma l_2 l_3 l_4 du^1 du^2 du^3 du^4.$$

Связь координат кривизны с асимптотическими координатами представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} u^1 &= -\alpha^1 + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4, \\ u^2 &= \alpha^1 - \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4, \\ u^3 &= \alpha^1 + \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^4, \\ u^4 &= \alpha^1 + \alpha^2 + \alpha^3 - \alpha^4. \end{aligned}$$

Якобиан преобразования равен -16. Следовательно, в асимптотических координатах

$$dV = 16\sin\sigma\cos^3\sigma l_2 l_3 l_4 d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3 d\alpha^4.$$

Найдем функцию $\theta(-\alpha^1+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)$, такую что удовлетворяется уравнение

$$\frac{\partial^4\theta}{\partial\alpha^1\partial\alpha^2\partial\alpha^3\partial\alpha^4} = -l_2 l_3 l_4 \sin\sigma\cos^3\sigma. \tag{7}$$

Это уравнение можно переписать как обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4\theta}{dx^4} = b\sin\sigma\cos^3\sigma,$$

где b — постоянная. Перепишем его в виде

$$\frac{d^4\theta}{dx^4} = b\sin\sigma\cos^2\sigma\frac{d\sigma}{dx} = -b\frac{1}{3}\frac{d\cos^3\sigma}{dx}.$$

Имеем первый интеграл

$$\frac{d^3\theta}{dx^3} = -b\frac{1}{3}\cos^3\sigma + c_1.$$

Постоянную c_1 можно положить равной нулю, т.к. достаточно найти одно решение. Имеем выражение для второй производной

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = -b\frac{1}{3}\int\frac{dx}{ch^3x} + c_2,$$

где постоянную c_2 тоже положим равной нулю. Пусть $thx = v$. Тогда

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = -b\frac{1}{3}\int\sqrt{1-v^2}dv = -b\frac{1}{6}[arcsinv + v\sqrt{1-v^2}]. \qquad (8)$$

Сначала рассмотрим второе слагаемое. Интегрируя его по x и учитывая $ch^2xdv = dx$, получим выражение

$$\int v\sqrt{1-v^2}dx = -\sqrt{1-v^2}.$$

Далее для повторного интеграла получим выражение

$$\int\sqrt{1-v^2}dx = \int\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \arcsin v.$$

Таким образом, в выражении θ рассматриваемое слагаемое дает ограниченные величины. Рассмотрим первое слагаемое в квадратных скобках в (8). Когда $x \to \infty$, выражение $v = thx \to 1$, поэтому $\arcsin v \to \pi/2$. Следовательно, вторая производная функции θ стремится к постоянному числу. Рассмотрим порядок приближения функции $y = \arcsin thx$ к $\pi/2$. Запишем

$$y = \arcsin thx = \pi/2 - \phi(x)$$

и покажем, что при достаточно большом x функция $\phi(x)$ убывает быстрее функции x^{-n} при любом n.

Рассмотрим график функции $y = arcsinv$ на плоскости v, y (рис. 2). Синусоида в точке $A(1, \pi/2)$ имеет кривизну, равную 1. Поэтому если через точку A проведем окружность, касающуюся синусоиды, с кривизной, меньшей 1, то в некоторой окрестности точки A некоторая дуга синусоиды будет лежать внутри окружности. Пусть радиус этой окружности будет равен $1+\epsilon$, где $\epsilon > 0$. Запишем уравнение этой окружности

$$(v+\epsilon)^2 + (\bar{y} - \pi/2)^2 = (1+\epsilon)^2.$$

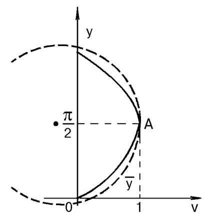

Рис. 2.

Здесь $(v, \bar{y})$ — координаты точек окружности. Для нижней ветви окружности имеем

$$\bar{y} = \pi/2 - \sqrt{(1-v)(1+v+2\epsilon)}.$$

Заметим, что для значений v, близких к 1, имеем

$$y = \arcsin v = \pi/2 - \phi(x) > \bar{y} = \pi/2 - \sqrt{(1-v)(1+v+2\epsilon)}.$$

Отсюда при достаточно больших x

$$\phi(x) < \sqrt{(1-v)(1+v+2\epsilon)} < \frac{Ce^{-x}}{\sqrt{1+e^{-2x}}} < \frac{C}{x^n},$$

где C — некоторая постоянная. Таким образом, функция θ при больших x близка к полиному по x второй степени

$$\theta(x) = a_1 x^2 + a_2 x + a_3 + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — ограниченная функция, a_i — постоянные. Нетрудно убедиться, что все вершины можно занумеровать таким образом, что вершины P_i и P_{i+1} будут соседними. Интегрируя уравнение (5) по асимптотическому параллелепипеду, получим выражение объема в виде альтернированной суммы значений функции θ в 16 вершинах этого параллелепипеда

$$V = |\sum_{i=1}^{16} (-1)^i \theta(x_i)|,$$

где x_i — значения x в вершинах параллелепипеда P^i. Запишем более подробно выражение объема

$$V=\theta(-b^1+b^2+b^3+b^4)-\theta(-b^1+b^2+b^3+a^4)$$
$$-\theta(-b^1+b^2+a^3+b^4)+\theta(-b^1+b^2+a^3+a^4)$$
$$-\theta(-b^1+a^2+b^3+b^4)+\theta(-b^1+a^2+b^3+a^4)$$
$$+\theta(-b^1+a^2+a^3+b^4)-\theta(-b^1+a^2+a^3+a^4)$$
$$-\theta(-a^1+b^2+b^3+b^4)+\theta(-a^1+b^2+b^3+a^4)$$
$$+\theta(-a^1+b^2+a^3+b^4)-\theta(-a^1+b^2+a^3+a^4)$$
$$+\theta(-a^1+a^2+b^3+b^4)-\theta(-a^1+a^2+b^3+a^4)$$
$$-\theta(-a^1+a^2+a^3=b^4)+\theta(-a^1+a^2+a^3+a^4).$$

Оказывется, что квадратичные слагаемые в выражении θ дают нулевой вклад. В этом можно убедиться прямой подстановкой значений аргумента x_i и группировкой членов. Рассмотрим, например, восемь выражений, которые получены заменой значений $\theta(x)$ на x^2, стоящих в первом столбце. Комбинируя их, получим

$$(-2b^1+2b^2+b^3+a^3+2b^4)(b^3-a^3)+(-2b^1+2a^2+b^3+a^3+2b^4)(a^3-b^3)$$
$$+(-2a^1+2b^2+a^3+b^3+2b^4)(a^3-b^3)+(-2a^1+2a^2+a^3+b^3+2b^4)(b^3-a^3)$$
$$=2(b^3-a^3)(b^2-a^2)+2(a^3-b^3)(b^2-a^2)=0.$$

Аналогично, для суммы элементов из второго столбца получим нуль.

Оставшиеся члены в выражении этой функции ограничены по модулю. Следовательно, нами доказана

Теорема 4. *На универсальном накрытии четырехмерного аналога псевдосферы объемы асимптотических параллелепипедов ограничены.*

Автор благодарен В.А. Горькавому за полезные замечания по теореме 1.

Список литературы

[1] *J.D. Moore*, Problems in the geometry of submanifolds. — *Mat. fiz., analiz, geom.* (2002), v. 9, No. 4, p. 648–662.

[2] *Ю.А. Аминов*, Изометрические погружения областей n-мерного пространства Лобачевского в $(2n-1)$-мерное эвклидово пространство. — *Мат. сб.* (1980), т. 111, № 3, с. 402–433.

The expression of volume of asymptotic parallelepiped

Yu.A. Aminov

For an isometric immersion of a domain of Lobachevsky space L^n into Euclidean space E^{2n-1} there exists a coordinate net formed by asymptotic lines. Applying this net, we construct an n-dimensional parallelepiped P called asymptotic. Properties of the volume V of P are considered in this paper. If $n = 2$, then there is the well-known Hazidakis formula for V. By analogy with the case $n = 2$, J.D. Moore conjectured that the volume V could be calculated in terms of angles ω_i between asymptotic curves at the vertices of P and that it is bounded from above. We obtain an expression of V for universal coverings of three- and four-dimensional analogues of pseudosphere and prove that V is bouded from above by an universal constant. On the other hand, we prove that there exist isometric immersions of domains of L^3 into E^5 so that it is impossible to express the volume V as an alternated sum of values of one function of two arguments dependent on angles ω_i.