Математическая физика, анализ, геометрия
2003, т. 10, № 1, с. 106–115

О сумме индексов потока с изолированными особыми точками на стратифицированном множестве

А.О. Пришляк

Киевский национальный университет им. Т.Г. Шевченко
пр. Глушкова, 2/7, Киев, 03127, Украина
E-mail:prishlyak@yahoo.com

Статья поступила в редакцию 4 январяя 2002 г.
Представлена А.А. Борисенко

Введены относительный и суммарный индексы изолированной особой точки гладкого потока на компактном стратифицированном множестве, удовлетворяющем условиям Уитни. Доказана теорема, аналогичная теореме Пуанкаре–Хопфа о сумме индексов. Описаны необходимые и достаточные условия существования потока с заданным набором индексов особых точек.

Введено відносний і сумарний індекси ізольованої особливої точки гладкого потоку на компактній стратифікованій множині, що задовольняє умовам Уітні. Доведено теорему, аналогічну теоремі Пуанкаре–Хопфа про суму індексів. Описано необхідні і достатні умови існування потоку з заданим набором індексів особливих точок.

Пусть M — стратифицированное множество в гладком многообразии N, удовлетворяющее условиям Уитни [1]. Пусть $M = \cup S_i$ — стратификация. Каждый страт S_i есть гладко вложенным связным многообразием, поэтому для каждой его точки определено касательное к этой точке пространство. Под касательным векторным полем на стратифицированном множестве M будем понимать задание в каждой точке M вектора, касательного к соответствующему страту. Заметим, что каждый 0-мерный страт является особой точкой. Касательное векторное поле на стратифицированном множестве M называется гладким, если его можно продлить до гладкого векторного поля на всем многообразии N.

Mathematics Subject Classification 2000: 57N80, 37C25 (Primary), 58A35, 37B30 (Secondary).

В случае компактного стратифицированного множества M, как и для компактных многообразий, задание касательного векторного поля равносильно заданию потока на M. Далее мы будем рассматривать такие потоки (касательные векторные поля), у которых конечное число особых точек. Важность рассмотрения потоков на стратифицированных множествах обусловлена тем, что именно стратифицированные множества часто являются инвариантными множествами потока на многообразии, а ограничение потока на них содержит всю основную топологическую информацию о потоке.

Напомним, что по теореме Пуанкаре–Хопфа для замкнутого многообразия сумма индексов особых точек x_i потока равна эйлеровой характеристике $\sum \operatorname{ind} x_i = \chi(M)$ [2]. Верно и обратное: для произвольных точек $x_1, \ldots, x_k$ на многообразии M^n $(n{>}1)$ и целых чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ таких, что $\sum \lambda_i = \chi(M)$, существует векторное поле с особыми точками $x_1, \ldots, x_k$ и такое, что $\operatorname{ind} x_i = \lambda_i$ [3]. Аналогичный результат имеет место для многообразий с краем, если поле на краю направлено вовне многообразия. Если поле X на краю — произвольное и без особых точек на краю, то зафиксируем любую риманову метрику на многообразии. Тогда для поля X на многообразии M определено касательное к краю ∂M поле ∂X, каждый вектор которого есть проекцией вектора X на касательное пространство к ∂M. Поле ∂X будем называть индуцированным векторным полем. Пусть $y_1, \ldots, y_m$ — особые точки индуцированного поля ∂X, в которых поле направлено внутрь многообразия, а $y_{m+1}, \ldots, y_n$ — вовне. Тогда

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{ind} x_i + \sum_{i=1}^{m} \operatorname{ind} y_i, \tag{1}$$

$$\chi(\partial M) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{ind} y_i. \tag{2}$$

Выполнение этих формул является достаточным условием существования векторного поля X [3].

Основная цель данной работы — получить обобщение теоремы Пуанкаре–Хапфа и ей обратной для компактных стратифицированных множеств, удовлетворяющих условиям Уитни.

1. Относительный индекс

Каждый страт S_j вместе с его границей в стратификации стратифицированного множества можно рассматривать как многообразие с краем таким, что край приклеивается к многообразиям меньшей размерности. Если из него выкинуть малую окрестность края, не содержащую особых точек (кроме точек края), то получим многообразие с краем, для которого выполняются формулы (1) и (2). Тогда эти формулы, примененные к каждому страту, будут задавать достаточные условия существования векторного поля на компактном стратифицированном множестве.

Так как каждая точка стратифицированного множества, удовлетворяющего условию Уитни, имеет конический тип [4] и особые точки x_i — изолированные, то существуют их окрестности $U(x_l)$ такие, что

$$U(x_l) \approx \mathrm{Con}(\partial U(x_l)),\ \mathrm{cl}(U(x_l)) \cap \mathrm{cl}(U(x_p)) = \emptyset,\ l \neq p,$$

где Con(X) — конус над стратифицированным множеством X, а $\mathrm{cl}(X)$ — замыкание X. Далее будем считать эти окрестности фиксированными.

Определение. *Относительным индексом особой точки x_i относительно страта S_j называется целое число $\mathrm{ind}\,(x_i, S_j)$, которое определяется из условий:*

1) Если $x_i \notin \mathrm{cl}\,(S_j)$, то $\mathrm{ind}\,(x_i, S_j) = 0$.

2) Если $x_i \in S_j$, то $\mathrm{ind}\,(x_i, S_j)$ равен индексу Пуанкаре $\mathrm{ind}\, x_i$ особой точки x_i для ограничения X_j векторного поля X на страт S_j.

3) Если $S_j = x_i$, то $\mathrm{ind}\,(x_i,\, S_j) = 1$.

4) Если особая точка x_i принадлежит границе ∂S_j страта S_j, то $\mathrm{ind}\,(x_i, S_j)$ определяется следующим образом. Пусть $U_{ij} \subset U(x_i)$ — такая окрестность точки x_i, что граница дополнения $\partial(S_j \backslash U_{ij})$ — гладкая во всех точках из пересечения $V_{ij} = \partial(S_j \backslash U_{ij}) \cap \partial U_{ij}$. Положим $\mathrm{ind}\,(x_i,\, S_j)$ равным сумме индексов особых точек поля ∂X_j на V_{ij}, в которых поле направлено вовне $S_j \backslash U_{ij}$.

Для $x_i \in \partial S_j$ назовем относительным внутренним индексом $\mathrm{ind}_{in}(x_i,\, S_j)$ сумму индексов особых точек ∂X_j на V_{ij}, в которых поле направлено внутрь $S_j \backslash U_{ij}$.

П р и м е р. Пусть на плоскости с прямоугольными декартовыми координатами u, v заданы множества $S_0 = \{(u,v)|v = 0\}$, $S_1 = \{(u,v)|v > 0\}$, точка $x_0 = (0,0)$ и векторное поле $X = (u, -v)$. Тогда $\mathrm{ind}\,(x_0, S_0) = 1$, $\mathrm{ind}\,(x_0, S_1) = 1$, $\mathrm{ind}_{in}(x_0, S_1) = 0$.

Лемма. *Определения $\mathrm{ind}\,(x_i,\, S_j)$ и $\mathrm{ind}_{in}(x_i,\, S_j)$ не зависят от выбора окрестности U_{ij}.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть U_{kj} — такие окрестности особых точек $x_k \in \partial S_j$, что граница дополнения $W_j = S_j \backslash (\cup_k U_{kj})$ — гладкая. В формулах (1) для W_j при замене окрестности U_{ij} другой окрестностью эйлеровы характеристики $\chi(W_j)$ и $\chi(\partial W_j)$, а также индексы особых точек индуцированного поля вне V_{ij} остаются неизменными. Тогда суммы индексов особых точек индуцированного поля на V_{ij} равны для разных выборов U_{ij}, что и требовалось доказать.

Теорема 1. *Если S_j — страт в стратифицированном множестве M, то имеют место формулы*

$$\chi(S_j) = \sum_{x_i \in S_j} \mathrm{ind}\,(x_i, S_j) + \sum_{x_i \in \partial S_j} \mathrm{ind}_{in}(x_i, S_j), \tag{3}$$

$$\chi_\partial(S_j) = \sum_{x_i \notin S_j} \mathrm{ind}\,(x_i, S_j) + \sum_{x_i \in \partial S_j} \mathrm{ind}_{in}(x_i, S_j), \tag{4}$$

где $\chi_\partial(S_j)$ — эйлерова характеристика края компактного многообразия, внутренность которого гомеоморфна страту S_j.

Доказательство. Как в лемме, по страту S_j зададим множество W_j. По построению $\mathrm{cl}\,(W_j)$ является гладким многообразием с гладким краем. Используя определения относительного и относительного внутреннего индексов, заменяем в формулах (3) и (4) эти индексы суммами индексов особых точек индуцированного векторного поля на $\partial \mathrm{cl}\,(W_j)$. Поскольку W_j гомеоморфно S_j, то применение формул (1) и (2) завершает доказательство.

2. Суммарный индекс

Очевидно, что относительные индексы, а также их число для данной особой точки, зависят от выбора стратификации на стратифицированном множестве. Вводимый ниже суммарный индекс лишен этих недостатков.

Определение. *Суммарным индексом Ind x_i изолированной особой точки $x_i \in S_j$ называется разность относительного индекса* $\mathrm{ind}\,(x_i,\, S_j)$ *и суммы всех других относительных индексов x_i:*

$$\mathrm{Ind}\ x_i = \mathrm{ind}(x_i, S_j) - \sum_{k \neq j} \mathrm{ind}(x_i, S_k).$$

Теорема 2. *Если $\{x_1, \ldots, x_k\}$ — множество особых точек векторного поля X на стратифицированном множестве M, то имеет место формула*

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Ind}\, x_i. \tag{5}$$

Доказательство проведем индукцией по числу стратов и их размерности. Для одного 0-мерного страта, т.е. точки, эйлерова характеристика и индекс поля равны 1.

Предположим что формула (5) выполняется для множества из n стратов. Пусть M — стратифицированное множество, состоящее из $n+1$ страта, и пусть S_{n+1} — страт максимальной размерности. Рассмотрим такую достаточно малую окрестность U дополнения $M\backslash S_{n+1}$, что множество $\operatorname{int}(S_{n+1}\backslash U)$ гомеоморфно S_{n+1}. Тогда для эйлеровой характеристики M

$$\chi(M)=\chi(U)+\chi(M\backslash U)-\chi(\partial(M\backslash U)). \tag{6}$$

Для того чтобы убедиться в справедливости этой формулы, достаточно представить M в виде клеточного комплекса, в котором $\partial(M\backslash U)$ является подкомплексом, и воспользоваться тем, что эйлерова характеристика равна разности числа четномерных и нечетномерных клеток.

Поскольку U гомотопически эквивалентно $M\backslash S_{n+1}$, то $\chi(U)=\chi(M\backslash S_{n+1})$. Кроме того, поскольку $M\backslash U$ гомеоморфно S_{n+1}, то формулу (6) можно переписать в виде

$$\chi(M)=\chi(M\backslash S_{n+1})+\chi(S_{n+1})-\chi_\partial(S_{n+1}).$$

По предположению индукции формула (5) верна для ограничения Y векторного поля X на $M\backslash S_{n+1}$. Для $\chi(S_{n+1})$ и $\chi_\partial(S_{n+1})$ применим формулы (3) и (4), сооответственно:

$$\begin{aligned}\chi(M) &= \sum_{x_i\notin S_{n+1}}\operatorname{Ind}_Y x_i+\sum_{x_i\in S_{n+1}}\operatorname{ind}(x_i,S_{n+1})+\sum_{x_i\in\partial S_{n+1}}\operatorname{ind}_{in}(x_i,S_{n+1})\\ &-\sum_{x_i\notin S_{n+1}}\operatorname{ind}(x_i,S_{n+1})-\sum_{x_i\in\partial S_{n+1}}\operatorname{ind}_{in}(x_i,S_{n+1})\\ &=\sum_{x_i\notin S_{n+1}}\operatorname{Ind}_Y x_i+\sum_{x_i\in S_{n+1}}\operatorname{ind}(x_i,S_{n+1})-\sum_{x_i\in\partial S_{n+1}}\operatorname{ind}_{in}(x_i,S_{n+1}.)\end{aligned}$$

Из определения суммарного индекса разница между индексом поля X в точке $x_i\in\partial S_{n+1}$ и индексом поля Y в этой точке равна относительному индексу $\operatorname{ind}(x_i,S_{n+1})$. Таким образом, формула (5) верна для M.

Так как эйлерова характеристика является топологическим инвариантом стратифицированного множества, то верно

Следствие. *Суммарный индекс особой точки является топологическим инвариантом поля и не зависит от выбора стратификации.*

П р и м е р ы. 1) Рассмотрим компактное одномерное множество. С точностью до гомеоморфизма поток на таком множестве задается ориентированным графом, в котором вершины являются особыми точками потока, а ориентация ребер задается как положительные ориентации траекторий. Относительный индекс $\operatorname{ind}(v,e)$ вершины v относительно ребра e равен 1, если ребро

e выходит из вершины v и 0, если ребро e выходит из вершины v или не является инцидентным ей. Относительный внутренний индекс $\mathrm{ind}_{in}(v, e)$ равен 1, если ребро e входит в вершину v, и 0 — во всех других случаях. Суммарный индекс $\mathrm{Ind}\, v$ вершины v равен 1 минус число ребер, выходящих из v. Заметим, что суммарный индекс изолированной вершины (связного 0-множества) равен 1.

2) В случае двумерных стратифицированных множеств суммарный индекс особой точки может быть определен с помощью индекса вращения, как в [5].

3) Если особая точка x — источник, то ее суммарный индекс равен 1. Действительно, рассмотрим такую стратификацию, в которой источник x является 0-мерным стратом, и выберем окрестность U точки x так, что на ее границе поле направлено внутрь U. Пусть S_i — такой страт, что $x \in \partial S_i, \;\; x \neq S_i$. Тогда после сглаживания углов в $S_i \backslash U$ по определению относительного индекса $\mathrm{ind}\,(x, S_i) = 0$. Поскольку $\mathrm{ind}\,(x, x) = 1$, то $\mathrm{Ind}\, x = 1$.

Теорема 3. *Пусть x — особая точка векторного поля X, $U(x) \approx \mathrm{Con}\,(\partial U(x))$ — ее коническая окрестность, не содержащая других особых точек и такая, что проекция ∂X (в стандартной евклидовой метрике) векторного поля X на касательные пространства границы $\partial U(x)$ имеет изолированные особые точки. Те из них, в которых поле направлено внутрь $U(x)$, обозначим $y_1, \dots , y_s$. Тогда*

$$\mathrm{Ind}_X x = 1 - \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Ind}_{\partial X} y_j. \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим достаточно малую окрестность W множества $\mathrm{cl}(U(x)\ )$, для которой $W \backslash \mathrm{Int}\, U(x)$ гомеоморфно $\partial U(x) \times [0; 1]$ (существование такой окрестности следует из условий Уитни). Таким образом, на $W \backslash \mathrm{Int}\, U(x)$ можно ввести координаты (y, t), $y \in \partial U(x)$, $t \in [0; 1]$; $(y, 0) \in \partial U(x)$. Векторы $X(y, 0)$ раскладываются в сумму касательного $\partial X(y, 0)$ и нормального $X^{\perp}(y, 0)$ векторов. Зафиксируем константу $C > \max_{y\in\partial U(x)} |X(y, 0)|$, и пусть $\mathrm{E}(y)$ — единичное нормальное поле на $\partial U(x)$, направленное наружу $U(x)$. Рассмотрим на $W \backslash \mathrm{Int}\, U(x)$ векторное поле $Y(y, t) = X(y, 0) + C\, t\, E(y)$ (здесь равенство векторов означает равенство их координат по y и t). По построению оно совпадает с полем X на $\partial U(x)$. Обозначим через Z поле, которое может быть получено после сглаживания полей X и Y в $\partial U(x)$. Таким образом, вне достаточно малой окрестности $\partial U(x)$ поле Z совпадает с X на $U(x)$ и Y на $W \backslash U(x)$. Его особыми точками являются точка x и особые точки поля Y.

Поскольку $\partial X(y_i,0) = 0$, то $X(y_i,0) = -|X(y_i,0)|E(y_i)$, $i = 1,\dots,s$. Таким образом, при $t_i = |X(y_i,0)|/C$ точки (y_i,t_i), $i = 1,\dots,s$, являются особыми точками поля Y. Из построения следует, что это единственные особые точки Y. Без ограничения общности можем считать, что $Y(y,t_i) = \partial X(y,0)$ в некоторой окрестности (y_i,t_i). Введем в этой окрестности стратификацию, при которой множество, задаваемое уравнением $t = t_i$, является объединением некоторых стратов. Тогда относительные индексы точки (y_i,t_i) равны соответствующим относительным индексам $(y_i,0)$ поля ∂X. По построению относительные индексы (y_i,t_i) по отношению к оставшимся стратам равны 0. Таким образом, $\mathrm{Ind}_Y(y_i,\, t_i) = \mathrm{Ind}_{\partial X} y_i$.

Ввиду существования конической структуры на W и того, что поле Z направлено наружу на ∂W, можно построить на W векторное поле R, имеющее одну особую точку — точку x, которая является источником, и совпадающее с Z на ∂W. Как показано в примере 3), индекс источника равен 1. Тогда из теоремы 2 следует, что сумма индексов поля Z также равна 1:

$$1 = \mathrm{Ind}_X x + \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Ind}_Y(y_j,t_i) = \mathrm{Ind}_X x + \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Ind}_{\partial X} y_j.$$

Теорема 3 позволяет производить вычисления суммарного индекса индукцией по размерности. При этом предполагается, что на одноточечном множестве (изолированном страте размерности 0) суммарный индекс равен 1. Заметим, что при таком подходе вычислять относительные индексы не нужно.

3. Реализация

Формулы (3)–(5) накладывают ограничения на наборы чисел, которые являются относительными и суммарными индексами особых точек. Для многообразий размерности больше 1 выполнение этих формул является также и достаточным условием существования векторного поля с заданным набором индексов [3]. Исследуем вопрос: выполнение каких условий, кроме формул (3)–(5), необходимо и достаточно для существования векторного поля с заданным набором индексов особых точек на стратифицированном множестве.

А. Начнем с одномерных множеств, т.е. графов. Как в примере 1), введем такую стратификацию, что вершины графа являются особыми точками. Тогда необходимым условием на относительные индексы является их равенство 0 или 1. Оказывается, этих условий вместе с выполнением формул (3) и (4) достаточно для существования векторного поля. Действительно, расставив ориентации ребер по движению от тех вершин, относительный индекс с которыми равен 1, мы тем самым зададим векторное поле.

Пусть $v_1, \dots, v_n$ — вершины графа. Обозначим через k_i — число ребер, инцидентных вершине v_i. Тогда суммарные индексы удовлетворяет неравенствам

$$1 - k_i \leq \operatorname{Ind} v_i \leq 1.$$

Однако выполнение этих неравенств не является достаточным.

Обозначим a_{ij} — число ребер, инцидентных одновременно вершинам v_i и v_j. Если граф ориентированный, то обозначим b_{ij} число ребер, входящих в v_i и выходящих из v_j. Тогда выполняются равенства

$$b_{ij} + b_{ji} = a_{ij}, \quad \operatorname{Ind} v_i = 1 - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}. \tag{8}$$

Обратно, если существуют числа b_{ij}, удовлетворяющие равенствам (8), то можно ориентировать ребра графа в соответствии с ними и построить векторное поле. Таким образом, существование чисел b_{ij}, удовлетворяющих равенствам (8), является необходимым и достаточным условием существования векторного поля с заданным набором особенностей на графе.

B. Общий случай. Пусть нужно построить векторное поле с заданным набором индексов в фиксированных точках.

Одномерный страт, который не является границей стратов большей размерности, будем называть связкой. Так, в графе каждое ребро является связкой. Если связка содержит особые точки, то разобьем связку этими точками на несколько связок.

Разделяющим подмножеством назовем замкнутое подмножество, которое есть минимальным по числу объединением стратов ненулевой размерности, дополнение к которому имеет максимальное число компонент связности. Если в стратифицированном множестве существует непустое разделяющее подмножество, то проверку существования векторного поля будем производить для каждой компоненты дополнения в отдельности.

Рассмотрим стратифицированные множества, которые не содержат разделяющих подмножеств. Легко видеть, что любые две точки x, y этих множеств можно соединить таким путем γ, который разбивается особыми точками на части, при этом каждая из них полностью лежит в одном из стратов. Этот путь будем называть правильным.

Легко построить произвольное касательное векторное поле к стратифицированному множеству $M \subset N$ с конечным числом особых точек. Например, если рассмотреть поле градиента некоторой функции Морса f, то гладко обнулив нормальные векторы при подходе к стратам, получим нужное поле.

Как и на многообразиях [3], в одном страте можем вводить пары дополнительных особых точек индексов $+1$ и -1. Если две особые точки лежат в одном страте, то для них, как на многообразиях, определена операция сложения вдоль пути, лежащего в этом страте. Если особые точки x, y лежат в разных стратах, то выберем правильный путь γ, их соединяющий. Пусть $\operatorname{Ind} x = m$, а $z_0, \dots, z_k$ — особые точки, через которые последовательно проходит γ, $z_0 = x$, $z_k = y$. Сложим x и z_1. На каждой дуге γ между точками z_i и z_{i+1} введем пары дополнительных точек и сложим точку с индексом $-\operatorname{sign} m$ с z_i, а с индексом $\operatorname{sign} m$ — с z_{i+1}. Повторим эту процедуру m раз. В результате получим векторное поле без особой точки x, индекс особой точки y изменится на m, а индекс оставшихся особых точек будет неизменным. Комбинируя операции сложения и введения дополнительных особых точек, легко получить требуемое векторное поле.

Рассмотрим случай, когда стратифицированное поле содержит связки. Пусть $K = \{K_i\}$ — множество компонент дополнения к связкам. Образуем граф, в котором вершинам соответствуют элементы множества K, а ребрам — связки, их соединяющие. Каждой вершине v_i поставим в соответствие индекс, равный $\sum\limits_{x_j \in K_i} \operatorname{Ind} x_j - \chi(K_i) + 1$. Из предыдущих рассуждений следует, что на стратифицированном множестве существует векторное поле с заданным набором индексов, если такое поле существует на графе с построенным набором индексов. Применив результаты из случая A, получим необходимые и достаточные условия существования векторного поля в общем случае:

Теорема 4. *Пусть M — стратифицированное подмножество в многообразии N, удовлетворяющее условиям Уитни; каждое множество K_i не содержит разделяющих подмножеств, a_{ij} — число связок между K_i и K_j. Пусть $\{x_1, \dots, x_k\}$ — набор фиксированных точек, не лежащих на связках; $\{n_1, \dots, n_k\}$ — набор целых чисел. На M существует касательное векторное поле, у которого $x_1, \dots, x_k$ — особые точки и $\operatorname{Ind} x_i = n_i$, $i = 1, \dots, k$, тогда и только тогда, если:*

1) множество $\{x_1, \dots, x_k\}$ содержит все 0-мерные страты;

2) $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = \chi(M)$;

3) существуют числа b_{ij} такие, что $b_{ij} + b_{ji} = a_{ij}$,

$$\sum_{x_m \in K_i} n_m = \chi(K_i) - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\,.$$

Автор выражает свою признательность В.В. Шарко, Е.О. Полуляху и И.Ю. Власенко за содержательные беседы и замечания, высказанные при обсуждении результатов этой работы, а также рецензенту — за внесенные им коррективы.

Список литературы

[1] *H. Whitney*, Complexes of manifolds. — *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* (1947), v. 33, p. 10–11.

[2] *H. Hopf*, Vectorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. — *Math. Ann.* (1926), v. 96, p. 209–221.

[3] *А.О. Пришляк*, Векторные поля с заданным набором особых точек. — *Укр. мат. журн.* (1997), т. 49, № 10, с. 1373–1384.

[4] *М. Горески, Р. Макферстон*, Стратифицированная теория Морса. Мир, Москва (1991).

[5] *М.В. Лосева, О.О. Пришляк*, Індекс ізольованої точки потоку на дійсних 2-вимірних напівалгебраїчних множинах. — *Вісн. Київськ. ун-ту.* Мат., мех. (2001), вип. 6, с. 39–42.

On sum of indices of flow with isolated fixed points on a stratified sets

A.O. Prishlyak

We introduce relative and summarized indexes of an isolated fixed point of a smooth flow on a compact stratified sets, which satisfy to conditions of Whitney. We prove the theorem similar to the Poincare–Hopf theorem on the sum of indexes. We describe necessary and sufficient conditions of existence of a flow with a given set of the indices of the fixed points.